

UTFSM - Primer semestre 2016
MAT-341 - Sistemas Dinámicos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 4

1. Demuestre que el campo de vectores en \mathbb{R} con un parámetro real λ

$$\dot{x} = \lambda e^x - x$$

posee una **bifurcación silla-nodo** genérica para un $\lambda = \lambda^*$ apropiado. Encuentre λ^* y el equilibrio x_0 en el cual ocurre la bifurcación silla-nodo. (*Sugerencia:* Para hallar el par (λ^*, x_0) estudie las gráficas de $f(x) = \lambda e^x$ y $g(x) = x$.) Verifique las condiciones de bifurcación y genericidad en (λ^*, x_0) , determine la estabilidad de los equilibrios y bosqueje el diagrama de bifurcación en el plano (λ, x) .

2. Considere el campo de vectores $\dot{x} = \lambda x - \sin x$, con $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Demuestre que este campo de vectores pasa por una **bifurcación pitchfork** en algún valor $\lambda = \lambda^*$ por determinar.
- (b) Determine si la bifurcación pitchfork es super- o subcrítica. *Sugerencia:* Encuentre el término relevante de la forma normal.
- (c) Dé un argumento de por qué ocurren infinitas **bifurcaciones silla-nodo**.

3. Considere el sistema depredador-presa

$$\dot{x} = x(x(1-x) - y), \quad \dot{y} = y(x - a),$$

donde $x, y \geq 0$ son poblaciones adimensionalizadas de presas y depredadores, respectivamente, y $a > 0$ es un parámetro.

- (a) Bosqueje las isoclinas en el primer cuadrante (Puede usar un computador si lo desea).
- (b) Verifique que los equilibrios son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(a, a - a^2)$, y clasifique su estabilidad.
- (c) Bosqueje el retrato de fase para $a > 1$ y muestre que los depredadores se extinguen.
- (d) Muestre que ocurre una **bifurcación de Hopf** en $a^* = \frac{1}{2}$. Sin calcular la 1ra cantidad de Lyapunov, dé un argumento para decidir si es subcrítica o supercrítica.
- (e) Bosqueje todos los retratos de fase topológicamente diferentes para $0 < a < 1$.

Fecha de entrega: Martes 24 de mayo en clases.