UTFSM - Primer semestre 2016
MAT–341 - Sistemas Dinámicos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 2c

1. Considere el oscilador $\boxed{\ddot{x} + F(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0,}$ donde $F(x, \dot{x}) < 0$ si $r \leq a$ y $F(x, \dot{x}) > 0$ si $r \geq b$, donde $r^2 = x^2 + \dot{x}^2$.
(a) Dé una interpretación física de los supuestos sobre F.
(b) Demuestre que existe al menos una órbita cerrada en la región $a < r < b$.

2. Demuestre que la ecuación $\boxed{\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)x + \tanh x = 0,}$ para $\mu > 0$, posee exactamente una solución periódica, y clasifique su estabilidad.

3. Para el oscilador de van der Pol con $\mu >> 1$ demuestre que la rama positiva de la isoclina cúbica comienza en $x_A = 2$ y termina en $x_B = 1$.

4. Estime el período del ciclo límite de $\ddot{x} + k(x^2 - 4)\dot{x} + x = 1$ para $k >> 1$.

5. (Ciclo celular) Tyson (1991) propuso un elegante modelo del ciclo de división de la céluda basado en interacciones entre las proteínas cdc2 y ciclina. Él mostró que la esencia matemática del modelo está contenida en el siguiente conjunto de ecuaciones adimensionalizadas:

$$\begin{cases} \dot{u} &= b(v-u)(\alpha + u^2) - u, \\ \dot{v} &= c - u, \end{cases}$$

donde u es proporcional a la concentración de la forma activa de un complejo cdc2-ciclina, y v es proporcional a la concentración total de ciclina. Los parámetros $b >> 1$ y $\alpha << 1$ están fijos y satisfacen $8\alpha b < 1$, y c es ajustable.

   (a) Bosqueje las isoclinas.
   (b) Muestre que el sistema exhibe oscilaciones de relajación para $c_1 < c < c_2$, donde c_1 y c_2 se deben determinar en forma aproximada si se asume que $8\alpha b << 1$.
   (c) Muestre que el sistema es *excitable*, es decir, posee un equilibrio atractor, pero ciertas condiciones iniciales cerca del atractor pueden generar trayectorias que —en lugar de converger rápidamente al equilibrio atractor— realizan una gran "excursión" en el plano de fase antes de regresar al equilibrio.

6. Considere el flujo en el toro dado por $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, donde ω_1/ω_2 es irracional. Demuestre que cada órbita es densa en el toro, es decir, dados cualquier punto p en el toro, cualquier condición inicial q, y cualquier $\epsilon > 0$, existe algún $t < \infty$ tal que la trayectoria que parte en q pasa a una distancia ϵ de p. Concluya que el conjunto atractor del sistema es todo $\mathbb{T}^2$.

7. Considere el sistema
$$\begin{cases} \dot\theta_1 &= E - \sin\theta_1 + K\sin(\theta_2-\theta_1), \\ \dot\theta_2 &= E + \sin\theta_2 + K\sin(\theta_1-\theta_2), \end{cases}$$
donde $(\theta_1,\theta_2) \in S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$, $E, K \geq 0$.

   (a) Encuentre y clasifique los puntos de equilibrio.

   (b) Demuestre que si E es suficientemente grande, el sistema posee soluciones periódicas en el toro y determine su estabilidad.

8. Considere el sistema $\boxed{\dot x + x = F(t),}$ donde $F(t)$ es una función diferenciable, T-periódica. ¿Es verdad que el sistema necesariamente posee una solución T-periódica $x(t)$? Si es así, demuéstrelo; si no, encuentre una F que sirva de contraejemplo.

9. (Sistema sobreamortiguado forzado por onda cuadrada) Considere un oscilador lineal sobreamortiguado (por ejemplo, un circuito RC) forzado por una onda cuadrada. El sistema se puede adimensionalizar a $\boxed{\dot x + x = F(t),}$ donde $F(t)$ es una onda cuadrada de período T. Más específicamente, supongamos que
$$F(t) = \begin{cases} +A, & 0 < t < T/2, \\ -A, & T/2 < t < T, \end{cases}$$
para $t \in (0,T)$, y luego $F(t)$ se repite periódicamente para todo t. El objetivo es mostrar que todas las trayectorias del sistema se acercan a una única solución periódica. Podemos intentar resolver la EDO y obtener $x(t)$, pero el análisis podría volverse un poco complicado. Por ello, usamos un enfoque basado en el mapeo de Poincaré: La idea es "observar" y registrar el sistema una vez por ciclo.

   (a) Sea $x(0) = x_0$. Demuestre que $x(T) = x_0 e^{-T} - A(1-e^{-T/2})^2$.

   (b) Demuestre que el sistema posee una única solución periódica y que satisface $x_0 = -A\tanh(T/4)$.

   (c) Interprete los límites de $x(T)$ para $T \to 0$ y $T \to \infty$. Explique por qué son plausibles.

   (d) Sea $x_1 = x(T)$ y defina el mapeo de Poincaré P por $x_1 = P(x_0)$. Obtenga la gráfica de $P(x)$ vs x.

   (e) Usando un diagrama de telaraña demuestre que P tiene un punto fijo globalmente estable.

Esta tarea no se entrega.