UTFSM - Primer semestre 2016
MAT–341 - Sistemas Dinámicos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 2b

1. Considere el campo de vectores en el cilindro $(y, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1$ dado por $\dot{\theta} = 1$, $\dot{y} = ay$. Defina un mapeo de Poincaré apropiado y encuentre una fórmula para él. Demuestre que el sistema tiene una órbita periódica. Clasifique su estabilidad para todos los valores de $a \in \mathbb{R}$.

2. Sea $(r, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times S^1$ y considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 + a\cos\theta - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

donde $|a| < 1$.

(a) Demuestre que el círculo $r = 0$ es una órbita periódica con período 2π.

(b) Demuestre que los multiplicadores de Floquet de $r = 0$ son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{2\pi}$. *Ayuda:* Muestre que el sistema linealizado cerca de $r = 0$ tiene soluciones de la forma $(0, \delta\theta(t))$ y $(\delta r(t), 0)$.

(c) Demuestre que hay dos círculos $r = r_-$ y $r = r_+$ tales que si $0 < r < r_-$ entonces $\dot{r} > 0$; y si $r > r_+$ entonces $\dot{r} < 0$. Luego la región $N = \{(r, \theta) : r_- < r < r_+\}$ es una región atrapadora. Nuestro próximo objetivo es probar que el conjunto atractor en N es una órbita periódica.

(d) Sea S el rayo $\{(r, 0), r > 0\}$. Argumente que S es una sección global, es decir, el campo de vectores es transversal en todos los puntos de S. Sea $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ el mapeo de Poincaré en S.

(e) Supongamos que la órbita del punto $(r_L, 0)$ cumple que $0 < P(r_L) < r_-$. Argumente que $P(r_L) > r_L$. Alternativamente, suponga que la órbita del punto $(r_H, 0)$ cumple que $P(r_H) > r_+$. Entonces argumente que se debe tener $P(r_H) < r_H$.

(f) Aplique el teorema del valor intermedio a $P(r)$ para probar que existe un punto $(r^*, 0)$ con $r_L < r^* < r_H$ cuya órbita es periódica.

(g) Demuestre que los multiplicadores de Floquet de esta nueva órbita cerrada son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{-4\pi}$ y, en consecuencia, este ciclo es asintóticamente estable. *Ayuda:* Para calcular la integral $\int_0^{2\pi} r^2(t)dt$ use la ecuación diferencial para tener $r^2 = 1 + a\cos\theta - \frac{\dot{r}}{r}$.

3. Demuestre que todos los campos de vectores en $\mathbb{R}$ son gradientes, y por ende, no hay soluciones periódicas en sistemas unidimensionales en la recta real. ¿Es verdadera esta afirmación para campos de vectores en el círculo S^1?

4. Considere el sistema $\dot{x} = y + 2xy$, $\dot{y} = x + x^2 - y^2$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que el campo de vectores es gradiente y encuentre su función potencial V. Bosqueje el retrato de fase.

5. Demuestre que $\dot{x} = -x + 2y^3 - 2y^4$, $\dot{y} = -x - y + xy$ no posee soluciones periódicas. *Ayuda:* Escoja a, m, y n tales que $V = x^m + ay^n$ sea una función de Lyapunov estricta.

6. Suponga que se satisfacen todas las hipótesis del teorema de Dulac, excepto por que la región Ω es topológicamente equivalente a un anillo. Demuestre que existe **a lo más** una órbita cerrada en Ω.

7. Considere el sistema no-lineal bidimensional $\dot{x} = Ax - r^2 x$, donde $x \in \mathbb{R}^2$, $r = ||x||$ y A es una matriz real constante de tamaño 2×2 con valores propios complejos $\alpha \pm i\omega$. Demuestre que existe al menos un ciclo límite para $\alpha > 0$ y que no hay ninguno para $\alpha < 0$.

Esta tarea no se entrega.