UTFSM - Primer semestre 2016
MAT–341 - Sistemas Dinámicos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 1b

1. Identifique las funciones siguientes como homeomorfismos, difeomorfismos (o como ninguno) en sus dominios de definición:
   (a) $h(x) = 2x + 1$; (b) $h(x) = 2x^2$; (c) $h(x) = x^3$;
   (d) $h(x) = \frac{5}{3}x^{5/3}$; (e) $h(x) = e^x$; (f) $h(x) = \arctan x$.

2. Construya un homeomorfismo de la recta real que sirva para establecer una equivalencia topológica entre las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = 2x$ y $\dot{x} = x + 2$.

3. Considere la ecuación $\dot{x} = x^2 - 1 + \lambda$ que depende del parámetro real λ. Demuestre que esta EDO es topológicamente equivalente a:
   (a) $\dot{x} = x^2 - 1$ si $-\infty < \lambda < 1$,
   (b) $\dot{x} = x^2$ si $\lambda = 1$,
   (c) $\dot{x} = x^2 + 1$ si $\lambda > 1$.

4. Demuestre que la transformación $y = h(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, es una conjugación topológica entre los mapeos $x \mapsto 2x$ e $y \mapsto 2^{2n+1}y$ en $\mathbb{R}$. ¿Por qué no existe una conjugación diferenciable cuando $n > 0$?

5. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos difeomorfismos que definen dos sistemas dinámicos discretos $x \mapsto f(x)$ e $y \mapsto g(y)$. Suponga además que f y g son C^k-conjugados, $k \geq 1$, mediante $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f(0) = 0$, demuestre que las matrices jacobianas de f en 0 y de g en $h(0)$ son similares. ¿Qué implica esto sobre los valores propios de $Df(0)$ y $Dg(h(0))$?

6. Considere el sistema $\dot{x} = y^3 - 4x$, $\dot{y} = y^3 - y - 3x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Encuentre todos los puntos de equilibrio y clasifíquelos según su estabilidad.
   (b) Demuestre que la recta $y = x$ es un conjunto invariante.
   (c) Demuestre que para cualquier otra órbita se cumple $|x(t) - y(t)| \to 0$ para $t \to \infty$.
   (*Sugerencia:* Forme una ecuación diferencial para $x - y$.)
   (d) Bosqueje el retrato de fase.
   (e) Escoja algún método numérico para integración de EDOs y, en un computador, grafique un retrato de fase más preciso en el dominio cuadrado $-20 \leq x, y \leq 20$. (Para evitar inestabilidades numéricas, necesitará usar un tamaño de paso pequeño debido a la fuerte nolinealidad cúbica.) Note que las órbitas parecen acercarse a cierta curva cuando $t \to \infty$. ¿Podría dar una explicación intuitiva de este comportamiento, y quizás hallar una ecuación aproximada de esta curva?

Esta tarea no se entrega.