

UTFSM - Primer semestre 2014
MAT-416 - Sistemas Dinámicos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 3

1. Considere el mapeo *tent* (“carpa”):

$$T(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Para las siguientes preguntas considere $\mu = 2$:

- (a) Haga bosquejos de la gráfica de $T(x)$ y de la segunda iteración $T^2(x)$. Incluya la diagonal en sus bosquejos.
- (b) Encuentre los puntos fijos y los puntos de período 2.
- (c) Dibuje el diagrama de “telaraña” para la condición inicial $x_0 = \frac{1}{20}$ para ambos mapeos $T(x)$ y $T^2(x)$.
- (d) Escriba las órbitas para las condiciones iniciales $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{7}$, $x_0 = \frac{1}{9}$, $x_0 = \frac{1}{11}$. En cada caso, determine si ha encontrado o no un punto periódico, y si es así, cuál es su período.

2. Considere los siguientes sistemas dinámicos discretos **bidimensionales**:

- (a) $f : (x, y) \mapsto (x^2, x + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) $g : (\theta_1, \theta_2) \mapsto (\sin \theta_1, \theta_1)$, $(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S_1$.
- (c) $h : (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy} \right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Encuentre todos los puntos fijos y discuta su estabilidad.

3. Considere el espacio $\text{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r , invertibles, y con f^{-1} de clase C^r (es decir, f es un C^r -difeomorfismo), con $r \geq 1$. Sea el sistema dinámico discreto

$$x \mapsto f(x)$$

definido por $f \in \text{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ con un punto fijo x^* .

Suponga que para toda vecindad $V \subset \text{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ de f suficientemente pequeña se cumple que el sistema dinámico

$$y \mapsto g(y)$$

generado por **cualquier** $g \in V$ es **localmente topológicamente conjugado** a f . Es decir, el retrato de fase de f cerca de x^* es cualitativamente equivalente al retrato de fase de g cerca de su punto fijo y^* , **para todo** $g \in V$.

Demuestre que x^* es un punto fijo hiperbólico.

Fecha de entrega: miércoles 16 de abril en clases.