UTFSM - Primer semestre 2014
MAT–416 - Sistemas Dinámicos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 1

1. El comportamiento de un sistema mecánico aislado que conserva la energía, con s grados de libertad, está determinado por $2s$ *ecuaciones Hamiltonianas*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

para $i = 1, 2, \ldots, s$. La función escalar $H = H(q, p)$ se llama *función Hamiltoniana*. Por ejemplo, las ecuaciones de movimiento del péndulo ideal

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -k^2 \sin\theta, \end{cases}$$

son ecuaciones Hamiltonianas con $(q, p) = (\theta, \omega)$ y $H(\theta, \omega) = \dfrac{\omega^2}{2} - k^2 \cos\theta$.

   (a) Demuestre que una función Hamiltoniana es constante a lo largo de las órbitas de un sistema Hamiltoniano, es decir, $\dot{H} = 0$.
   (b) Demuestre que el equilibrio $(\theta, \omega) = (0, 0)$ del péndulo ideal es estable en sentido Lyapunov. ¿Es este equilibrio asintóticamente estable?
   (c) Haga un bosquejo del retrato de fase.

2. Considere la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que define un sistema dinámico discreto $x \mapsto f(x)$.

   (a) Demuestre que $f^n \circ f^m = f^{m+n}$ y $(f^n)^m = f^{mn}$.
   (b) Si $f : I \longrightarrow I$, y $a \leq x \leq b$ para todo $x \in I \subset \mathbb{R}$, demuestre que $a \leq f^n(x) \leq b$, para todo $n \geq 1$.

3. Suponga que x^* es un punto periódico del mapeo f con período al menos 2. ¿Es x^* un punto periódico con período 3? ¿Es x^* un punto periódico con período 4? ¿Por qué?

4. Considere el mapeo $x \mapsto f(x) = x^2 - 2$.

   (a) Encuentre los puntos fijos de f.
   (b) Demuestre que $f^2(x) - x = (f(x) - x)\, Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio cuadrático.
   (c) Encuentre los puntos periódicos de período 2 de f.

Fecha de entrega: miércoles 26 de marzo en clases.