UTFSM - Primer semestre 2021
MAT–449 - Sistemas Dinámicos y Caos
Profesor: Pablo Aguirre

TAREA 3

Instrucciones:

- La tarea debe ser desarrollada y respondida en forma individual.
- Fecha límite de entrega: Miércoles 12 de mayo, 18:00 hrs.
- Formatos admitidos para entrega de tareas: LaTeX (preferente) o algún editor equivalente, tareas hechas a mano escaneadas o fotografiadas. En este último caso, cada estudiante es responsable del orden y legibilidad del documento.
- Ya sea escrita en LaTeX o a mano, **debe hacer llegar un solo archivo con sus desarrollos**.
- El nombre del archivo con sus desarrollos debe tener el siguiente formato: **Tarea2_SD_Nombre_Apellido**.
- Modo de entrega: El archivo de su tarea debe subirse a la plataforma AULA. **Importante: No envíe su tarea por email, excepto...** si no posee acceso a AULA, en cuyo caso sí puede enviar su tarea via email **con copia a nicolas.gonzalezmu at sansano.usm.cl.**
- Las tareas que no cumplan estas instrucciones no serán revisadas.
- Si encontrara cualquier inconveniente para cumplir con alguna de estas instrucciones, se debe dar aviso de antemano al profesor para coordinar una solución apropiada.
- **Redacte sus respuestas de la forma más clara y completa posible. Recuerde que la persona que corrija solo puede evaluar lo que está escrito explícitamente.**

Preguntas:

1. Determine la estabilidad de **todos las órbitas periódicas** del siguiente sistema en coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$:
$$\begin{cases} \dot{r} &= r(r-1)^2(r-2), \\ \dot{\theta} &= -1. \end{cases}$$
Además, haga un bosquejo del retrato de fase en el plano cartesiano (x, y).
Sugerencia: Construya la aplicación de retorno de Poincaré, o bien, analice el flujo linealizado del sistema en una vecindad de cada órbita periódica.

2. Considere un **sistema planar**, el cual escrito en coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ posee ecuación angular que satisface $\dot{\theta} > 0$. Sea P la aplicación de retorno de Poincaré definida sobre $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y = 0\}$. Suponga además que existe $x^* > 0$ tal que :
$$P(x^*) = x^*; \quad \frac{dP}{dx}(x^*) = 1; \quad \frac{d^2P}{dx^2}(x^*) = 0; \quad \frac{d^3P}{dx^3}(x^*) = \epsilon \neq 0.$$
   (a) Dibuje un diagrama que ilustre la forma cualitativa de la iteración $x_{n+1} = P(x_n)$ a partir de una condición inicial $x_0 > 0$ suficientemente cerca de x^*, para los dos casos $\epsilon > 0$ y $\epsilon < 0$. *Sugerencia:* Considere una expansión de Taylor de P cerca de x^*.
   (b) Haga un bosquejo de los retratos de fase correspondientes para el sistema planar a tiempo continuo en una vecindad anular suficientemente pequeña de $x = x^*$.

3. Encuentre una bifurcación flip (duplicación de período) para los siguientes mapeos en $\mathbb{R}$:
   (a) $x \mapsto \lambda \sin x$.
   (b) $x \mapsto -x(\lambda + x)$. En este caso, ¿Para qué valor del parámetro λ la órbita de período 2 pasa ella misma por una duplicación de período?

Justifique sus respuestas y razonamientos.