UTFSM - Primer semestre 2021
MAT–449 - Sistemas Dinámicos y Caos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

TAREA 2

Instrucciones:

- La tarea debe ser desarrollada y respondida en forma individual.
- Fecha límite de entrega: Miércoles 28 de abril, 18:00 hrs.
- Formatos admitidos para entrega de tareas: LaTeX (preferente) o algún editor equivalente, tareas hechas a mano escaneadas o fotografiadas. En este último caso, cada estudiante es responsable del orden y legibilidad del documento.
- Ya sea escrita en LaTeX o a mano, **debe hacer llegar un solo archivo con sus desarrollos**.
- El nombre del archivo con sus desarrollos debe tener el siguiente formato: **Tarea2_SD_Nombre_Apellido**.
- Modo de entrega: El archivo de su tarea debe subirse a la plataforma AULA. **Importante: No envíe su tarea por email, excepto...** si no posee acceso a AULA, en cuyo caso sí puede enviar su tarea via email **con copia a nicolas.gonzalezmu at sansano.usm.cl.**
- Las tareas que no cumplan estas instrucciones no serán revisadas.
- Si encontrara cualquier inconveniente para cumplir con alguna de estas instrucciones, se debe dar aviso de antemano al profesor para coordinar una solución apropiada.
- **Redacte sus respuestas de la forma más clara y completa posible. Recuerde que la persona que corrija solo puede evaluar lo que está escrito explícitamente.**

Preguntas:

1. Considere el sistema en $\mathbb{R}^3$:
$$x_1' = -x_1,$$
$$x_2' = -x_2 + x_1^2,$$
$$x_3' = x_3 + x_2^2,$$
Determine la estabilidad del equilibrio en el origen y muestre que sus variedades estable e inestable globales son:
$$W^s(0): \quad x_3 = -\frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{6}x_1^2 x_2 - \frac{1}{30}x_1^4,$$
y $W^u(0) = \{x_1 = x_2 = 0\}$.

2. Considere el mapeo *tent* (en inglés, "carpa" o "tienda"):
$$x \mapsto T(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$
Para las siguientes preguntas considere $\mu = 2$:
   (a) Haga bosquejos de la gráfica de $T(x)$ y de la segunda iteración $T^2(x)$. Incluya la diagonal en sus bosquejos.
   (b) Encuentre los puntos fijos y los puntos de período 2 y determine su estabilidad.
   (c) Dibuje el diagrama de "telaraña" para la condición inicial $x_0 = \frac{1}{20}$ para ambos mapeos $T(x)$ y $T^2(x)$.
   (d) Escriba las órbitas para las condiciones iniciales $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{7}$, $x_0 = \frac{1}{9}$, $x_0 = \frac{1}{11}$. En cada caso, determine si ha encontrado o no un punto periódico, y si es así, cuál es su período.

3. Considere la aplicación unidimensional
$$x \mapsto F_c(x) = x(1-x) + c,$$
donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro.
   (a) Encuentre los puntos fijos de $F_c(x)$ y demuestre que $F_c(x)$ sólo posee un punto fijo atractor para $c \in (0, 1)$.
   (b) Encuentre un polinomio de la forma $P_c(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (con coeficientes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ por determinar) tal que
$$P_c(x)(F_c(x) - x) = F_c(F_c(x)) - x,$$
   para todo x.
   (c) Encuentre una órbita $\{p_1, p_2\}$ de período 2 y demuestre que es atractora para $c \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

4. Considere el espacio $\mathrm{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^r, invertibles, y con f^{-1} de clase C^r (es decir, f es un C^r-difeomorfismo), con $r \geq 1$. Sea el sistema dinámico discreto

$$x \mapsto f(x)$$

definido por $f \in \mathrm{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ con un punto fijo x^*.

Suponga que para toda vecindad $V \subset \mathrm{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ de f suficientemente pequeña se cumple que el sistema dinámico

$$y \mapsto g(y)$$

generado por **cualquier** $g \in V$ es **localmente topológicamente conjugado** a f. Es decir, el retrato de fase de f cerca de x^* es cualitativamente equivalente al retrato de fase de g cerca de su punto fijo y^*, **para todo** $g \in V$.

Demuestre que x^* es un punto fijo hiperbólico.

Justifique sus respuestas y razonamientos.