UTFSM - Primer semestre 2021
MAT–449 - Sistemas Dinámicos y Caos
Profesor: Pablo Aguirre

TAREA 1

Instrucciones:

- La tarea debe ser desarrollada y respondida en forma individual.
- Fecha límite de entrega: Miércoles 14 de abril, 18:00 hrs.
- Formatos admitidos para entrega de tareas: LaTeX (preferente) o algún editor equivalente, tareas hechas a mano escaneadas o fotografiadas. En este último caso, cada estudiante es responsable del orden y legibilidad del documento.
- Ya sea escrita en LaTeX o a mano, **debe hacer llegar un solo archivo con sus desarrollos**.
- El nombre del archivo con sus desarrollos debe tener el siguiente formato:
  Tarea1_SD_Nombre_Apellido.
- Modo de entrega: El archivo de su tarea debe subirse a la plataforma AULA.
  Importante: No envíe su tarea por email, excepto... si no posee acceso a AULA, en cuyo caso sí puede enviar su tarea via email.
- Las tareas que no cumplan estas instrucciones no serán revisadas.
- Si encontrara cualquier inconveniente para cumplir con alguna de estas instrucciones, se debe dar aviso de antemano al profesor para coordinar una solución apropiada.
- **Redacte sus respuestas de la forma más clara y completa posible. Recuerde que la persona que corrija solo puede evaluar lo que está escrito explícitamente.**

Preguntas:

1. Suponga que x^* es un punto periódico del mapeo $x \mapsto f(x)$ con período 2. ¿Es x^* un punto periódico con período 3? ¿Es x^* un punto periódico con período 4? ¿Por qué? Justifique sus respuestas.

2. Considere el mapeo $x \mapsto f(x) = x^2 - 2$.
   (a) Encuentre los puntos fijos de f.
   (b) Demuestre que $f^2(x) - x = (f(x) - x)\, Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio cuadrático.
   (c) Encuentre los puntos periódicos de período 2 de f.

3. Considere el sistema en $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} \dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y. \end{cases}$$
   Encuentre el conjunto no-errante. Demuestre que el intervalo cerrado $[-1, 1]$ **en el eje** x es un conjunto atrayente, aunque la mayoría de los puntos son errantes. ¿Adónde van a converger la mayoría de las órbitas para $t \to \infty$?

4. Construya un homeomorfismo de la recta real y un reescalamiento del tiempo $t \mapsto \tau(t)$ que sirva para establecer una equivalencia topológica entre las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = 2x$ e $y' = y + 2$.

5. Considere dos mapeos escalares lineales en $\mathbb{R}$:
$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x, \quad \text{y} \quad g : y \mapsto \frac{1}{3}y.$$
   Verifique que la transformación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula
$$h(x) = \begin{cases} x^\nu, & x \geq 0, \\ -|x|^\nu, & x < 0, \end{cases}$$
   define una conjugación topológica entre f y g para algún ν apropiado.

Justifique sus respuestas y razonamientos.