

7.3.2. Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3 — Caso silla-foco

Teorema 23 (Silla-foco, $\sigma < 0$) *Considere un sistema dinámico tridimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.9)$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla-foco $x_0 = 0$ con valores propios satisfaciendo $\lambda_1(0) > 0 > \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(0))$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(0)) < 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.9) posee una única órbita periódica L_β en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Además, el ciclo L_β es estable.

La figura 7.30 ilustra este teorema. Si $\beta \leq 0$ el sistema no posee órbitas periódicas en la vecindad U_0 . En cambio, si $\beta > 0$ la rama superior de $W^u(x_0)$ tiende al ciclo límite estable L_β para $t \rightarrow \infty$. Además, el período de L_β tiende a ∞ a medida que $\beta \rightarrow 0^+$. Por lo tanto, en lo que respecta a la existencia, unicidad y estabilidad de L_β , la bifurcación homoclínica silla-foco con $\sigma < 0$ es también análoga al caso planar. Sin embargo, no todos los sistemas de la forma (7.9) satisfaciendo las condiciones de genericidad del teorema son topológicamente equivalentes entre sí. En general, no son equivalentes pues el número

$$\nu_0 = -\frac{\lambda_1(0)}{\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(0))} \quad (7.10)$$

es un invariante topológico para sistemas con una órbita homoclínica a un silla-foco.

Teorema 24 (Silla-foco, $\sigma > 0$) *Considere un sistema dinámico tridimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.11)$$

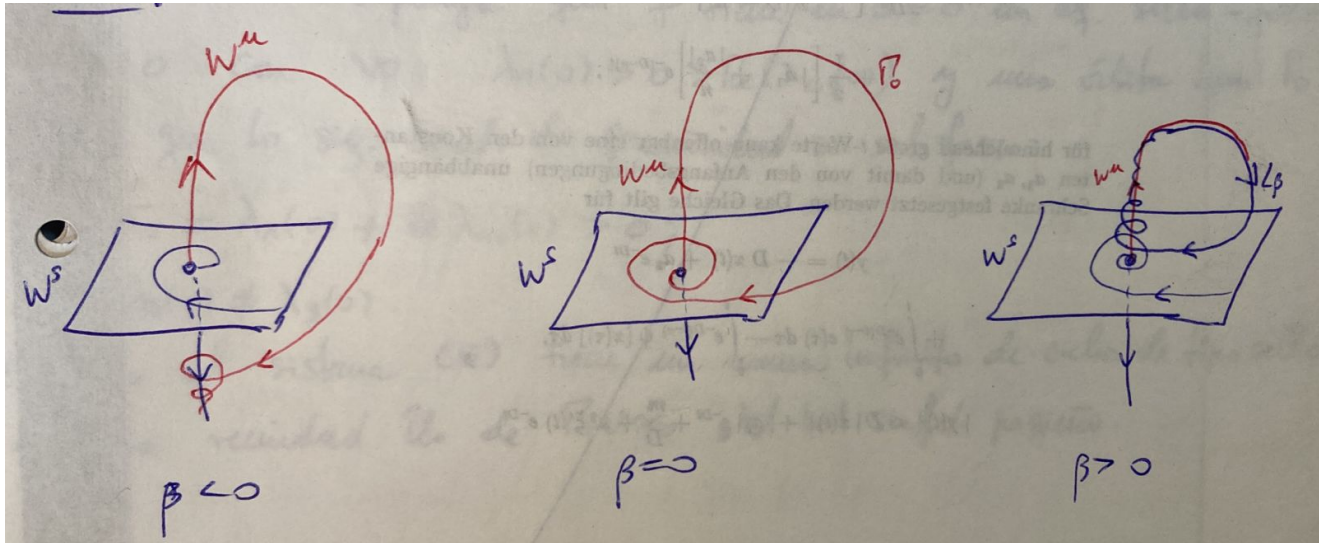


Figura 7.30: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso $\sigma > 0$.

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla-foco $x_0 = 0$ con valores propios satisfaciendo $\lambda_1(0) > 0 > \text{Re}(\lambda_{2,3}(0))$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \text{Re}(\lambda_{2,3}(0)) > 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.11) tiene un número infinito de ciclos de tipo silla en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

IDEA DE LAS DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS 23 Y 24. El primer paso es seleccionar un sistema de coordenadas tal que $W^s(x_0)$ corresponda localmente al plano $x_1 = 0$ (i.e., el plano (x_2, x_3)) y $W^u(x_0)$ sea localmente la recta $x_2 = x_3 = 0$ (i.e., el eje x_1) como en la figura 7.31. Similarmente a las demostraciones anteriores, definamos dos secciones transversales Σ y Π en una vecindad de x_0 . Concretamente, consideremos $\Sigma \subset \{x_2 = \epsilon_2\}$ y $\Pi \subset \{x_1 = \epsilon_1\}$, para $\epsilon_{1,2} > 0$ pequeños. Supongamos que la órbita homoclínica Γ_0 intersecta ambas secciones Σ y Π .

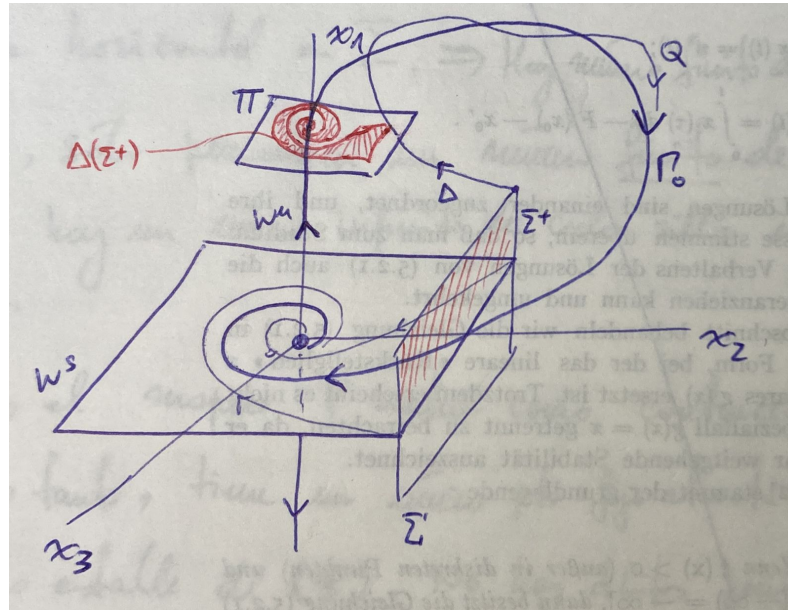


Figura 7.31: Análisis de la composición $P = Q \circ \Delta$.

Similarmente al caso planar, definimos una aplicación de retorno de Poincaré $P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$ a lo largo de órbitas de (7.11) como la composición $P = Q \circ \Delta$, donde $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$ es un mapeo local y $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ es una aplicación a lo largo de la parte global de Γ_0 . Al igual que en el caso silla, el mapeo local queda determinado esencialmente por la parte lineal de (7.8) cerca de la silla. Notemos que la imagen $\Delta(\Sigma^+) \subset \Pi$ por Δ del rectángulo Σ^+ tiene la forma de una “serpiente sólida” —también llamada *serpiente de Shilnikov*— cuyo extremo central se ubica en el eje x_1 (de hecho, ese punto puede considerarse como la imagen de todo el segmento $\Sigma^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y coincide con la intersección $W^u(x_0) \cap \Pi$).

Consideremos el caso $\beta = 0$, es decir, en el momento en que existe la órbita homoclínica Γ_0 . Miremos con atención el conjunto $P(\Sigma^+) \subset \Sigma$. El origen de la “serpiente” es mapeado por Q en la intersección de Γ_0 con Σ ubicada en el plano $x_1 = 0$. Dependiendo del signo de σ se tienen los bosquejos de la figura 7.32. Notemos que la intersección de Σ con $W^s(x_0)$ divide a la serpiente en un número infinito de segmentos superiores e inferiores, i.e., ubicados en el semiespacio $x_1 > 0$, o bien, $x_1 < 0$, respectivamente. Consideremos los segmentos semi-espaciales superiores y sus preimágenes bajo P , y denotémoslos por $P(\Sigma_1), P(\Sigma_2), \dots$ y

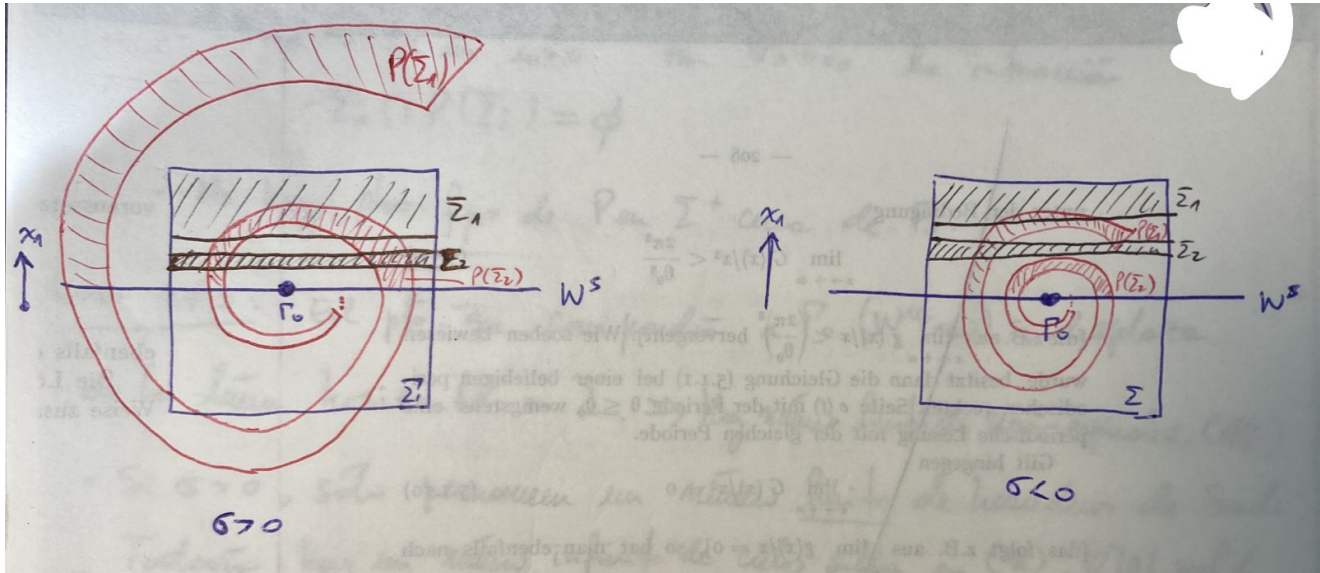


Figura 7.32: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso silla-foco.

$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, respectivamente. Notemos que las preimágenes $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots$ son bandas horizontales en Σ^+ intercaladas con bandas que son las preimágenes de las semi-espirales inferiores. Todas estas bandas se acumulan en $W^s \cap \Sigma$.

Caso $\sigma > 0$. Debido a la expansión a lo largo del eje x_1 , las intersecciones $\Sigma_i \cap P(\Sigma_i)$ son no vacías a partir de cierto $i \geq i_0$, donde i_0 es algún natural ($i_0 = 2$ en la figura 7.32). Cada conjunto $\Sigma_i \cap P(\Sigma_i)$ consiste de dos componentes y forma una herradura de Smale. Luego, cada herradura implica un número infinito de puntos fijos de tipo silla para P . Estos puntos fijos corresponden a ciclos de tipo silla del sistema continuo (7.11) en una vecindad de $\Gamma_0 \cap x_0$.

Caso $\sigma < 0$. En este caso, debido a la contracción en el eje x_1 , existe un número natural i_0 tal que para todo $i \geq i_0$ la intersección $\Sigma_i \cap P(\Sigma_i)$ es vacía ($i_0 = 2$ en la figura 7.32). Por lo tanto, no hay puntos fijos de P en Σ^+ cerca de Γ_0 .

Por último, consideremos el caso $\beta \neq 0$. El punto que correspondería a la órbita homoclínica Γ_0 (i.e., $W^u(x_0)$) se desplaza de la línea horizontal en Σ . Luego, ahora solo hay un número finito de segmentos semi-espirales; ver figura 7.33 en el caso $\beta > 0$. Por tanto, si $\sigma > 0$ solo permanecen un número finito de herraduras de Smale. De todas maneras, esto implica que todavía existe un número infinito de ciclos de tipo silla en (7.11) para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño. Por el

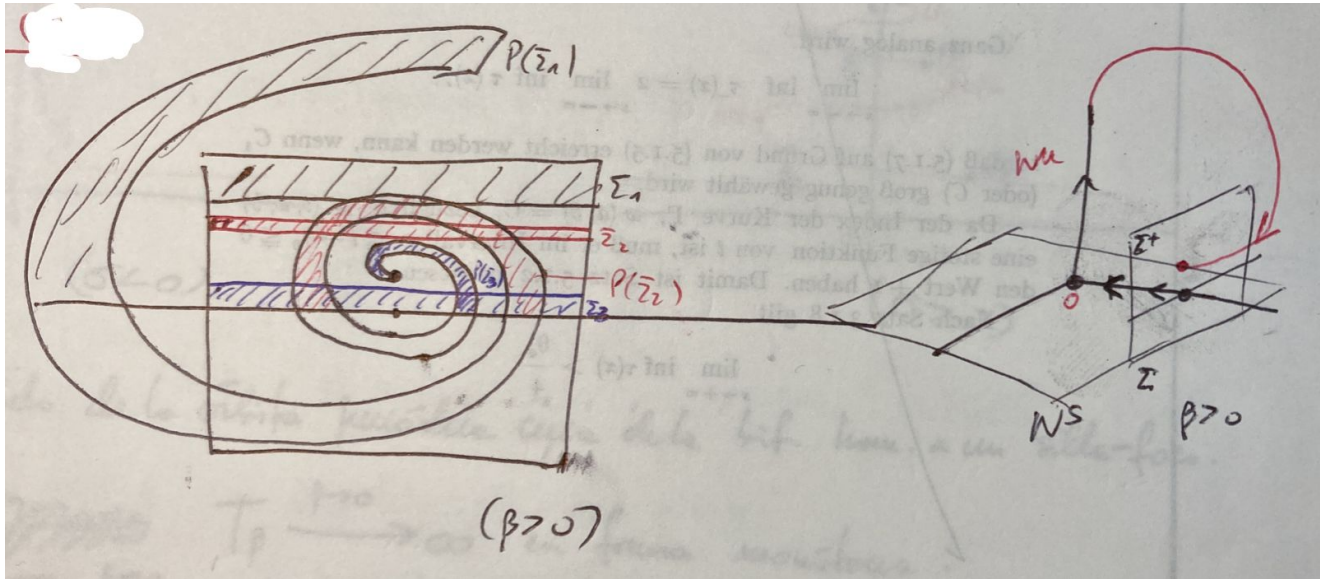


Figura 7.33: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso silla-foco cuando $\beta > 0$.

contrario, si $\sigma < 0$, el mapeo P actúa como contracción en Σ^+ para $\beta > 0$ y, por lo tanto, tiene un único punto fijo atractor que corresponde a un ciclo estable de (7.11). Por otro lado, no hay órbitas periódicas cerca de Γ_0 si $\beta < 0$. ■

COMENTARIOS.

1. Al igual que en el caso silla-foco con $\sigma < 0$, no es posible decir que los diagramas de bifurcación de todos los sistemas (7.11) que satisfagan (H1)-(H3) son topológicamente equivalentes. La razón es la misma: la invarianza topológica de ν_0 dado por (7.10).

De hecho, la estructura topológica completa del retrato de fase cerca de la órbita homoclínica no se conoce, aunque se puede decir bastante. Sea $\Omega(\nu)$ el conjunto de todas las secuencias bi-infinitas no equivalentes

$$\omega = \{ \dots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots \},$$

donde ω_i son enteros no negativos tales que

$$\omega_{i+1} < \nu \omega_i$$

para todo $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y para algún número real $\nu > 0$. Si $\nu \leq \nu_0$, entonces en $\beta = 0$ existe un subconjunto de órbitas de (7.11) ubicadas en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cap x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$; este conjunto de órbitas está en correspondencia 1-1 con $\Omega(\nu)$. El número ω_i se puede interpretar como el número de “pequeñas” rotaciones hechas por la órbita cerca de x_0 después de la i -ésima vuelta “global”.

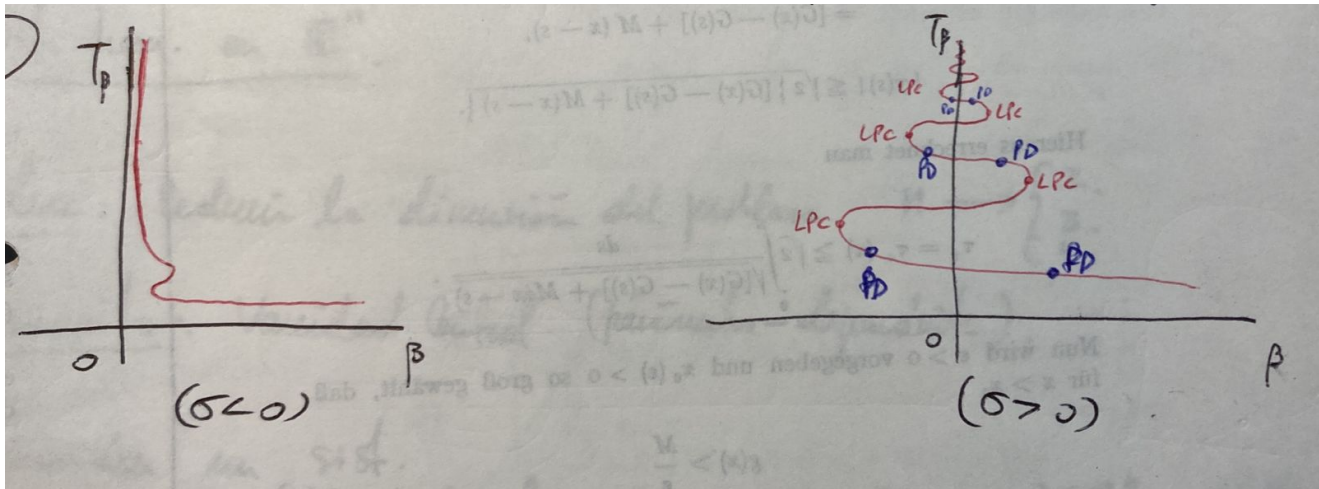


Figura 7.34: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso silla-foco cuando $\beta > 0$.

2. A medida que β se aproxima a cero tomando valores positivos o negativos, ocurre un número infinito de bifurcaciones. Algunas de estas bifurcaciones se relacionan con un ciclo límite “primario”, el cual realiza una vuelta global a lo largo de la órbita homoclínica. La figura 7.34 muestra el diagrama del período T_β de este ciclo con respecto a β . Si $\sigma < 0$, el período $T_\beta \rightarrow \infty$ en forma monótona a medida que $\beta \rightarrow 0^+$, pues el ciclo existe exclusivamente cuando $\beta > 0$. En cambio, si $\sigma > 0$, $T_\beta \rightarrow \infty$ en forma “serpenteante” (no monótona) a medida que $\beta \rightarrow 0$; notemos que β va tomando valores positivos y negativos en el proceso. La presencia de estos giros y contoneos significa que el ciclo desaparece y aparece via bifurcaciones fold infinitas veces (denotados como LPC en la figura 7.34). Note que para cualquier $|\beta| \neq 0$ suficientemente pequeño existe solo un número finito de estos ciclos primarios —difieren en el número de rotaciones “pequeñas” cerca del silla-foco; mientras más alto

el período, más rotaciones posee el ciclo.

Más aún, el ciclo también exhibe bifurcaciones period-doubling marcadas como PD en la figura [7.34](#)). Cada uno de los ciclos “secundarios” de período doble también se bifurca a medida que $\beta \rightarrow 0$. Cada uno de estos ciclos (primarios y secundarios) son de tipo silla para $|\beta|$ suficientemente pequeño.

Por si eso fuera poco, existe otro tipo de bifurcaciones cerca de $\beta = 0$ asociadas a órbitas n -homoclínicas, las cuales se caracterizan por realizar $n - 1$ vuelos globales antes de cerrarse y formar la conexión en x_0 . Además, para cada una de estas órbitas n -homoclínicas secundarias el sistema exhibe dinámica de herraduras de Smale y caos al igual que en el escenario homoclínico original.

Por lo tanto, el cuadro completo del diagrama de bifurcación es extremadamente complejo!

3. En el caso estudiado aquí consideramos $n_- = \dim W^s = 2$, $n_+ = \dim W^u = 1$. Para el caso opuesto, basta invertir la dirección del tiempo y considerar las sustituciones $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$, $\sigma \rightarrow -\sigma$, estable \rightarrow repulsor.
4. Para estudiar bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, se puede construir una llamada **variedad central homoclínica** (parámetro-dependiente) cerca de una órbita homoclínica. Luego, el estudio de bifurcaciones homoclínicas en dimensiones altas se puede reducir apropiadamente al caso de sistemas en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^4 , etc.