

7.3. Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3

En sistemas tridimensionales se tienen dos tipos de puntos silla hiperbólicos:

1. Silla: Corresponde al caso de tres valores propios reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
2. Silla-foco: Corresponde al caso de dos valores propios complejos y uno real $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Esta distinción es esencial pues la naturaleza de la bifurcación homoclínica en tres dimensiones dependerá fuertemente de si estamos en el caso de una silla o de un punto silla-foco. En esta exposición asumiremos que el punto silla posee una variedad estable W^s de dimensión dos y una variedad inestable W^u de dimensión uno. La figura 7.22 muestra los retratos de fase respectivos. Note que los casos opuestos —i.e., $\dim W^s = 1, \dim W^u = 2$ — pueden tratarse de manera análoga invirtiendo el sentido del tiempo.

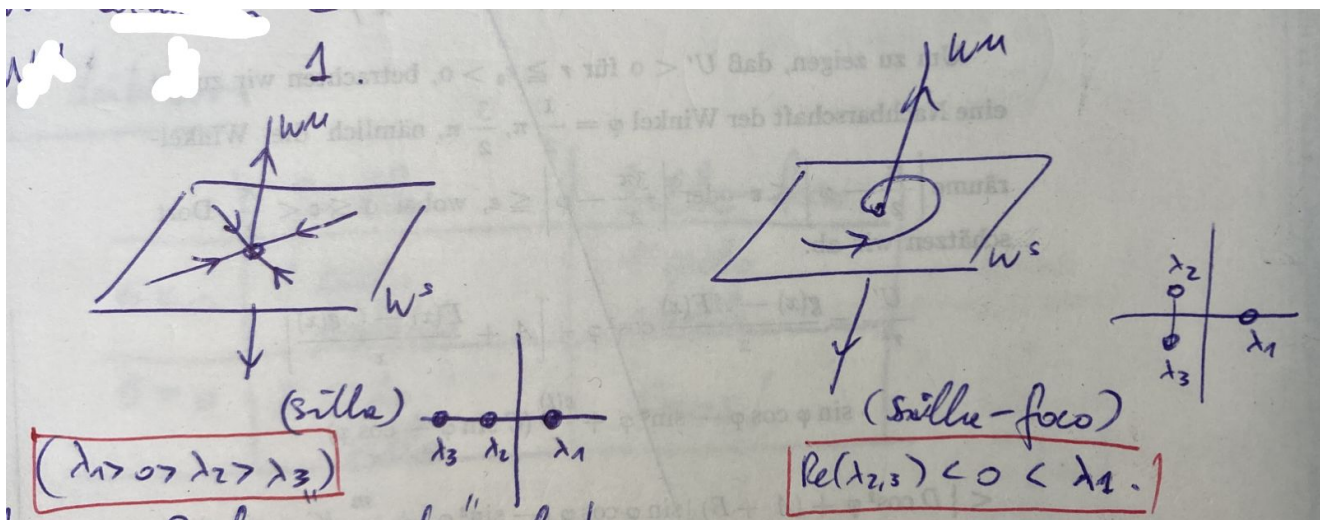


Figura 7.22: Retratos de fase cerca de un punto silla y un silla-foco con variedad estable bidimensional y variedad inestable unidimensional.

Definición 26 Los valores propios con parte real más cercana al eje imaginario se llaman **valores propios principales**. El correspondiente espacio propio se dice **espacio propio principal**.

En nuestros casos a considerar, en la figura [7.22](#) el valor propio estable principal del punto silla es λ_2 ; luego, la teoría de equilibrios hiperbólicos nos asegura que casi todas las órbitas en W^s (i.e., todas las órbitas genéricas en W^s) se aproximan al equilibrio tangentes al espacio propio principal (unidimensional) asociado a λ_2 ; la excepción son solo dos órbitas las cuales convergen a x_0 tangentes al espacio propio asociado a λ_3 . Por otro lado, en el caso silla-foco los valores propios principales son λ_2 y $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ y el espacio propio principal es bidimensional.

Definición 27 *Definimos la cantidad silla σ como la suma del valor propio positivo y la parte real de un valor propio principal. Concretamente tenemos:*

1. *Silla:* $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$.
2. *Silla-foco:* $\sigma = \lambda_1 + \text{Re}(\lambda_{2,3})$.

El cuadro [7.1](#) muestra los principales eventos u objetos que da lugar una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 —estos pueden ser dramáticamente distintos dependiendo de la naturaleza del punto de equilibrio y del signo de la cantidad silla. Probaremos estos resultados —descubiertos por L. P. Shilnikov (1934–2011)—, a continuación.

	silla	silla-foco
$\sigma < 0$	1 ciclo estable	1 ciclo estable
$\sigma > 0$	1 ciclo silla	caos!

Cuadro 7.1: Los teoremas de Shilnikov — Una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 puede tener consecuencias muy distintas dependiendo del punto de equilibrio y del signo de la cantidad silla σ .

7.3.1. Bifurcaciones homoclínicas en \mathbb{R}^3 — Caso silla

Teorema 21 *(Silla, $\sigma < 0$) Considere un sistema dinámico tridimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.7}$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla $x_0 = 0$ con valores propios $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) \geq \lambda_3(0)$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) < 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) Γ_0 regresa a x_0 (para $t \rightarrow \infty$) tangente al espacio propio principal.

(H4) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.7) posee un único ciclo límite L_β en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Además, el ciclo L_β es estable. Más aún, todos estos sistemas son localmente topológicamente equivalentes cerca de $\Gamma_0 \cup x_0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Bajo las condiciones del teorema anterior, una bifurcación homoclínica a un punto silla en \mathbb{R}^3 con $\sigma < 0$ es completamente análoga al caso planar; ver figura 7.23 y compare con la figura 7.11.

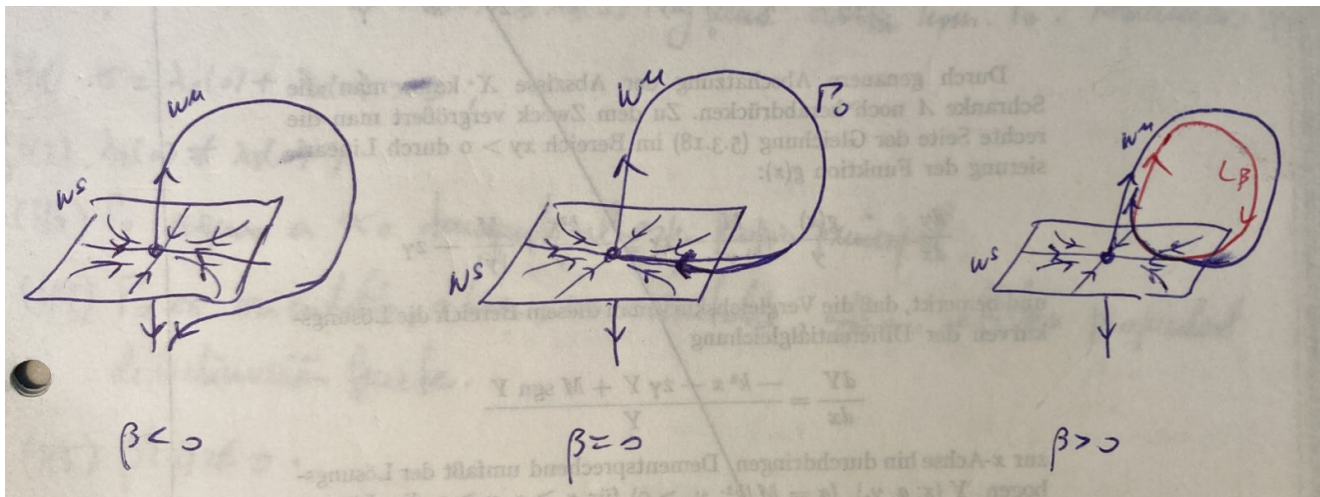


Figura 7.23: Caso $\sigma < 0$ cuando el equilibrio es una silla con valores propios reales — Al romperse la órbita homoclínica Γ_0 se bifurca un único ciclo límite L_β el cual es estable y existe estrictamente para $\beta > 0$.

Sin embargo, las similitudes terminan ahí. Efectivamente, si $\sigma > 0$ debemos distinguir dos casos topológicamente no equivalentes, los cuales dependen de la topología de $W^s(x_0)$ cerca de Γ_0 . Fijemos una vecindad pequeña U_0 de $\Gamma_0 \cap x_0$. La órbita homoclínica Γ_0 está enteramente contenida en la variedad estable $W^s(x_0)$. Por lo tanto, la variedad $W^s(x_0)$ se puede extender “hacia atrás en el tiempo” a

lo largo de Γ_0 dentro de esta vecindad fija. En cada punto $\varphi^t(x) \in \Gamma_0$ es posible definir un plano tangente a esta variedad. Para $t \rightarrow \infty$ este plano coincide con E^s . Por otro lado, para $t \rightarrow -\infty$, genéricamente, $W^s(x_0)$ se acerca al plano generado por el vector propio inestable v_1 y el vector propio no principal v_3 . Luego, genéricamente, la variedad $W^s(x_0)$ se intersecta a sí misma —más bien, su clausura se intersecta— cerca del punto silla a lo largo de la **variedad estable fuerte** $W^{ss}(x_0)$, la cual es una subvariedad de dimensión 1 asociada al valor propio estable no principal λ_3 ; ver figura 7.24.

Por lo tanto, la parte de $W^s(x_0)$ en U_0 a la cual pertenece Γ_0 es (genéricamente) una subvariedad bidimensional no suave \mathcal{M} . La figura 7.24 muestra los dos casos posibles: En el primero, \mathcal{M} forma una superficie orientable (i.e., equivalente a un cilindro topológico) y uno habla de una bifurcación homoclínica **orientable**; en cambio, en el segundo caso, \mathcal{M} es topológicamente equivalente a una cinta de Möbius y uno dice que ocurre una bifurcación homoclínica **no orientable**.

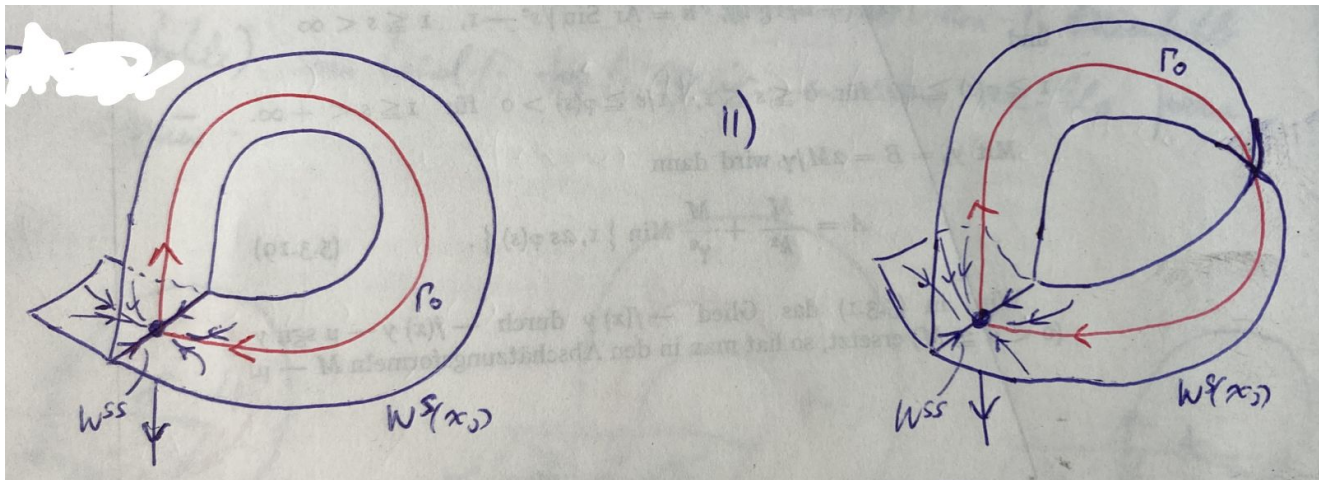


Figura 7.24: La variedad estable $W^s(x_0)$ puede “cerrarse” formando localmente una superficie orientable o no orientable.

Teorema 22 (Silla, $\sigma > 0$) *Considere un sistema dinámico tridimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.8}$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un equilibrio silla $x_0 = 0$ con valores propios $\lambda_1(0) > 0 > \lambda_2(0) \geq \lambda_3(0)$, y una una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) > 0$.

(H2) $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$.

(H3) Γ_0 regresa a x_0 (para $t \rightarrow \infty$) tangente al espacio propio principal.

(H4) Γ_0 es orientable, o bien, no orientable.

(H5) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces, para todo $|\alpha| \neq 0$ suficientemente pequeño existe una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$ en la cual se bifurca (a lo más) un único ciclo límite L_β desde Γ_0 , y que además es un ciclo de tipo silla. El ciclo existe para $\beta < 0$ si Γ_0 es orientable, y para $\beta > 0$ si Γ_0 es no orientable. Más aún, todos los sistemas (7.8) con Γ_0 orientable (resp. no orientable) son localmente topológicamente equivalentes en una vecindad U_0 para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

La figura 7.25 muestra este resultado en el caso orientable mientras que el caso no orientable aparece en la figura 7.26.

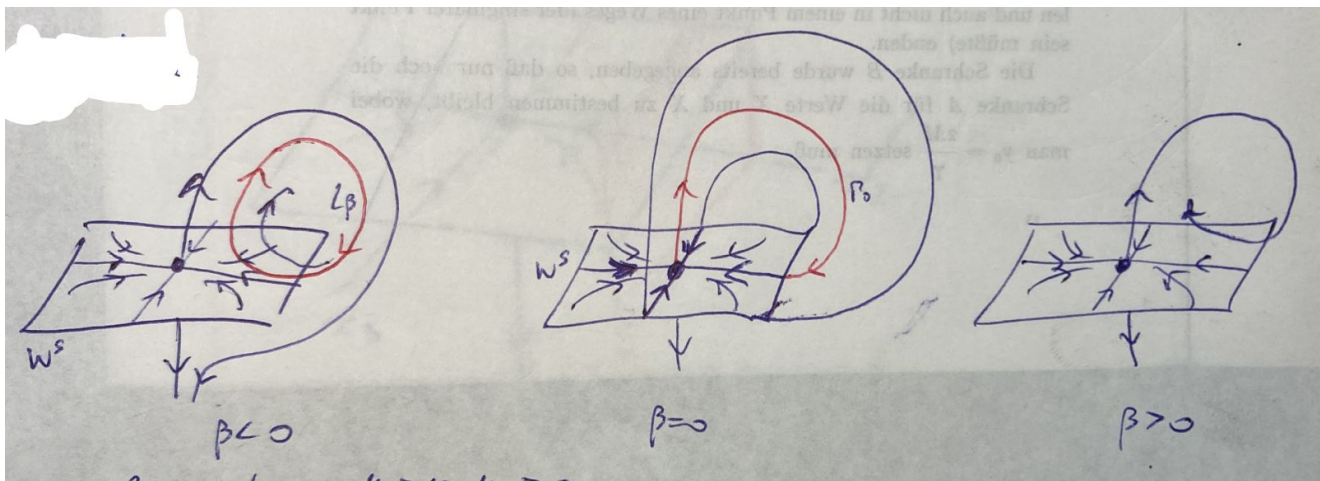


Figura 7.25: Bifurcación homoclínica orientable en \mathbb{R}^3 con $\sigma > 0$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 21 Y 22. Sin pérdida de generalidad supongamos que el equilibrio silla está en el origen $x_0 = 0$. Tomemos coordenadas en \mathbb{R}^3 tal que la variedad estable $W_{loc}^s(x_0)$ esté localmente contenida

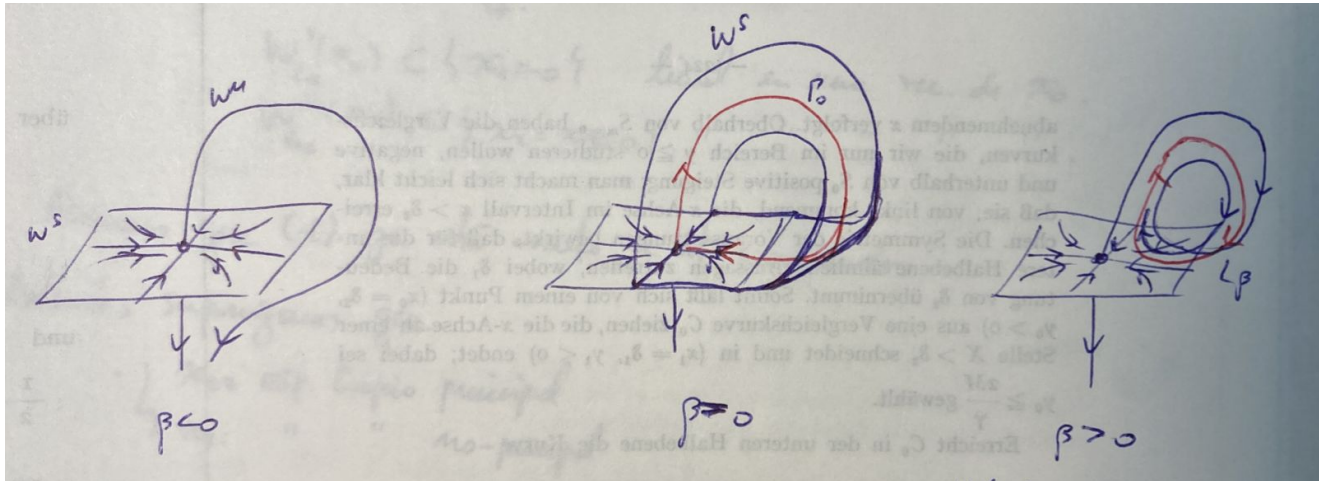


Figura 7.26: Bifurcación homoclínica no orientable en \mathbb{R}^3 con $\sigma > 0$.

en el plano $x_1 = 0$ y $W_{loc}^u(x_0)$ esté localmente contenida en el eje $x_2 = x_3 = 0$ como en la figura 7.27. Podemos asumir que el campo (7.8) ya está escrito en estas coordenadas. Además, supongamos que en $W_{loc}^s(x_0)$, el eje x_2 corresponde al espacio propio principal y el eje x_3 es el espacio propio no principal. Sean las secciones transversales $\Sigma \subset \{x_2 = \epsilon_2\}$ y $\Pi \subset \{x_1 = \epsilon_1\}$, para $\epsilon_{1,2} > 0$ pequeños. Supongamos que la órbita homoclínica Γ_0 intersecta ambas secciones Σ y Π .

Similarmente al caso planar, definimos una aplicación de retorno de Poincaré $P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$ a lo largo de órbitas de (7.8) como la composición $P = Q \circ \Delta$, donde $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$ es un mapeo local cerca de la silla y $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ es una aplicación a lo largo de la parte global de Γ_0 . El mapeo local queda determinado esencialmente por la parte lineal de (7.8) cerca de la silla. Notemos que la imagen $\Delta(\Sigma^+) \subset \Pi$ por Δ del rectángulo Σ^+ tiene la forma de un “cuerno” cuya punta se ubica en el eje x_1 (de hecho, la punta puede considerarse como la imagen de todo el segmento $\Sigma^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y coincide con la intersección $W^u(x_0) \cap \Pi$). Este cuerno es luego mapeado por Q de regreso a Σ ; la manera en que queda definida esta imagen $P(\Sigma^+)$ en Σ depende de la orientabilidad de la bifurcación como en la figura 7.28 para el caso $\sigma < 0$ y en la figura 7.29 para el caso $\sigma > 0$. Para $\beta = 0$, si Γ_0 es orientable, $P(\Sigma^+)$ se intersecta no trivialmente con Σ^+ ; de lo contrario, si Γ_0 es no-orientable, la intersección con $\Sigma^- \equiv \Sigma \setminus \Sigma^+$ es no trivial; ver figura 7.27. En las figuras 7.28 y 7.29, la punta del cuerno $P(\Sigma^+)$ corresponde a

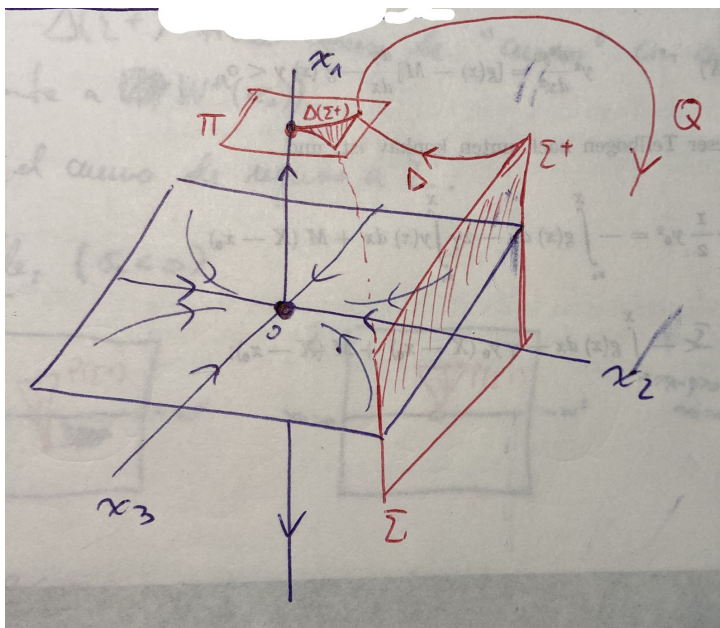


Figura 7.27: Análisis de la composición $P = Q \circ \Delta$.

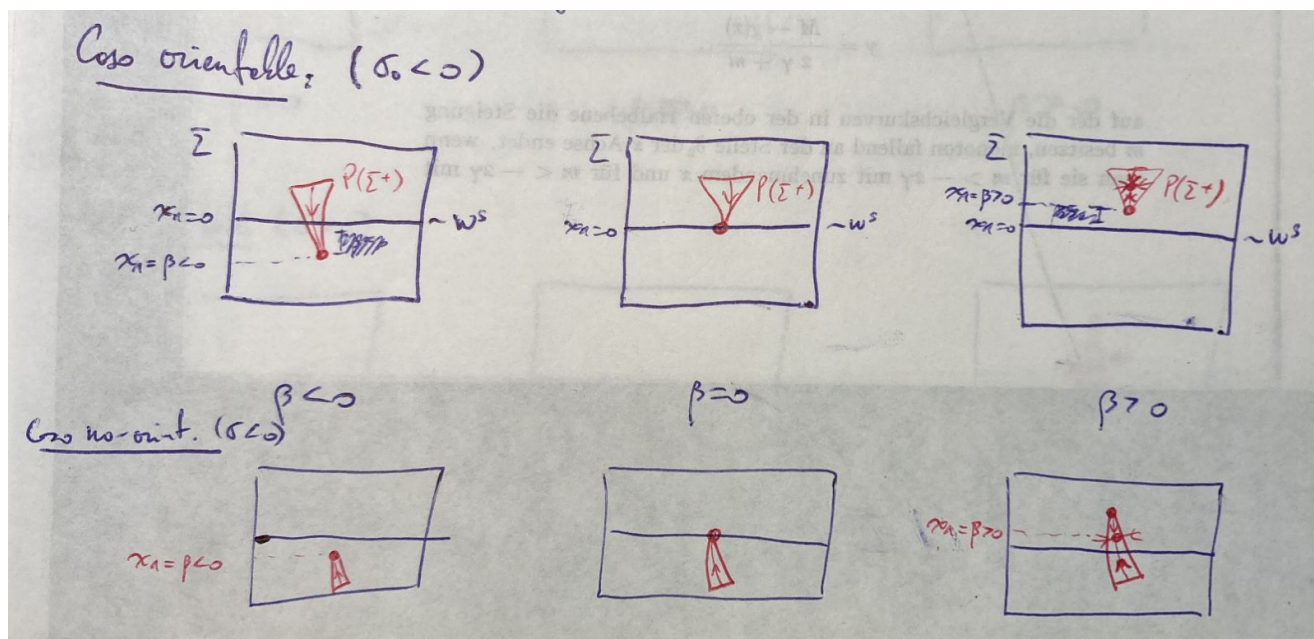


Figura 7.28: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso $\sigma < 0$.

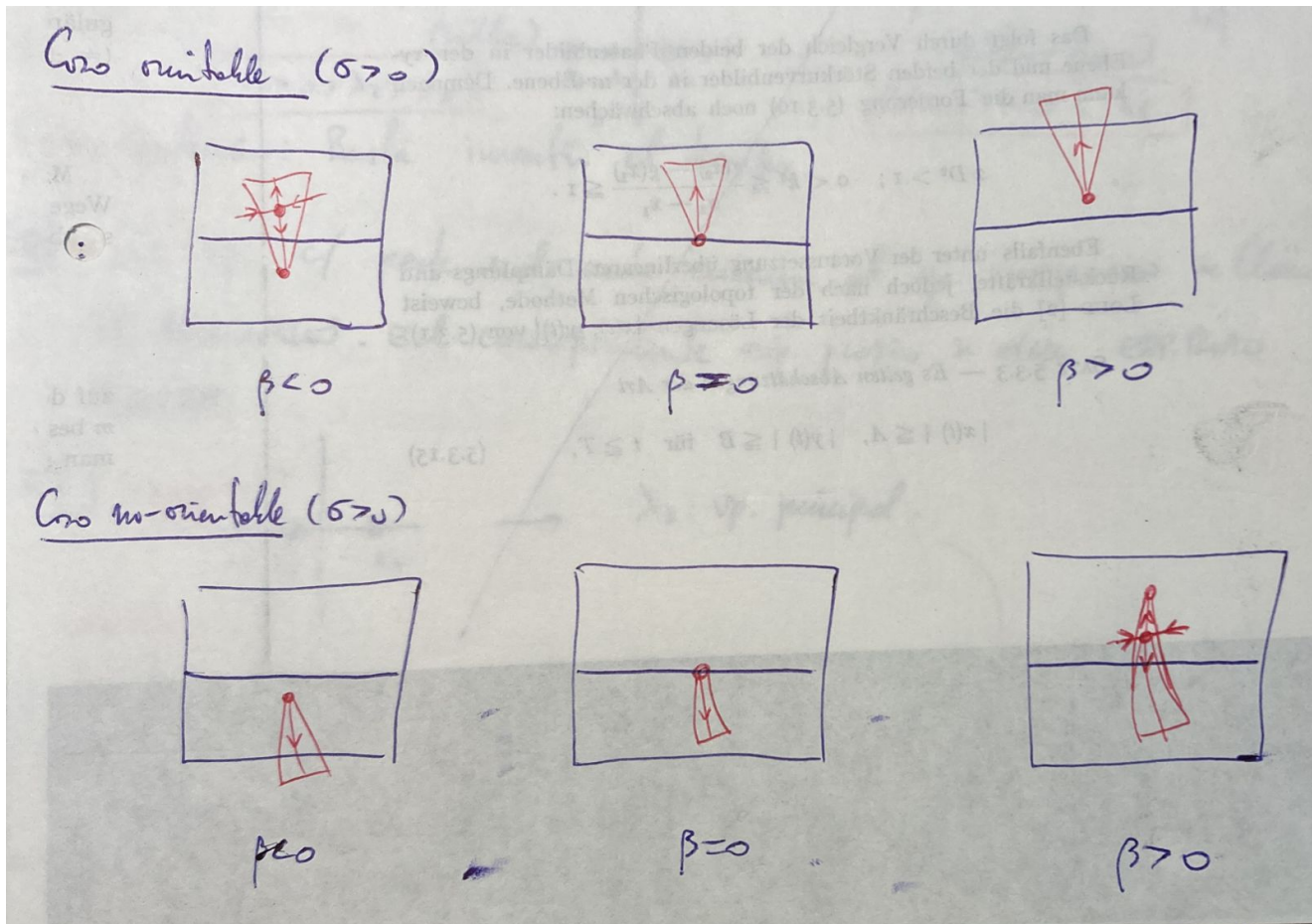


Figura 7.29: Representación de la imagen $P(\Sigma^+)$ en una bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^3 en el caso $\sigma > 0$.

la imagen de $W^u(x_0)$ bajo Q . Luego, por definición de la función de separación β , esta punta debe ubicarse en Σ^+ si $\beta > 0$, y en Σ^- si $\beta < 0$. Por otro lado, debido a la orientabilidad (resp. no orientabilidad) de \mathcal{M} , $P(\Sigma^+)$ se intersecta transversalmente con $W^s(x_0) \cap \Sigma$ —i.e, con el eje $x_1 = 0$ — para $\beta < 0$ (resp. $\beta > 0$).

Notemos que P siempre actúa como una contracción a lo largo del eje x_3 . Luego, el análisis de puntos fijos de P se puede reducir a un mapeo unidimensional de la forma

$$x_1 \mapsto \beta + Ax_1^{-\lambda_1/\lambda_2} + \dots,$$

donde $A > 0$ en el caso orientable y $A < 0$ en el caso no orientable. Por lo tanto, si

$\sigma < 0$, P actúa como una contracción en Σ^+ para $\beta > 0$ y, luego, posee un único punto fijo que es estable en $P(\Sigma^+)$ y que corresponde a un ciclo en el sistema completo (7.8); ver figura 7.28

Análogamente, si $\sigma > 0$, P contrae a lo largo del eje x_3 y expande en la dirección longitudinal al cuerno. Por lo tanto, existe un punto fijo silla en Σ^+ para $\beta < 0$ o $\beta > 0$ dependiendo de la orientabilidad; ver figura 7.29 ■