

7.2. Bifurcaciones homoclínicas planares

Considere un sistema dinámico planar

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

con f suficientemente suave. Sea x_0 un punto silla hiperbólico y supongamos que para $\alpha = 0$ existe una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 .

Sea Σ una sección transversal unidimensional a la variedad estable local $W^s(x_0)$ en una vecindad de x_0 como en la figura 7.10. Definamos coordenadas locales en Σ —denotadas por $\xi \in \mathbb{R}$ — tal que $\xi = 0$ corresponde al punto de intersección $\Sigma \cap W^s(x_0)$. Esta construcción se puede repetir para todo campo $f(x, \alpha)$ con α suficientemente pequeño. Sin embargo, notemos que para $\alpha \neq 0$, genéricamente, la variedad inestable $W^u(x_0)$ no retorna a x_0 . Hay dos posibilidades: $W^u(x_0)$ y $W^s(x_0)$ se separan “hacia arriba” o bien “hacia abajo”.

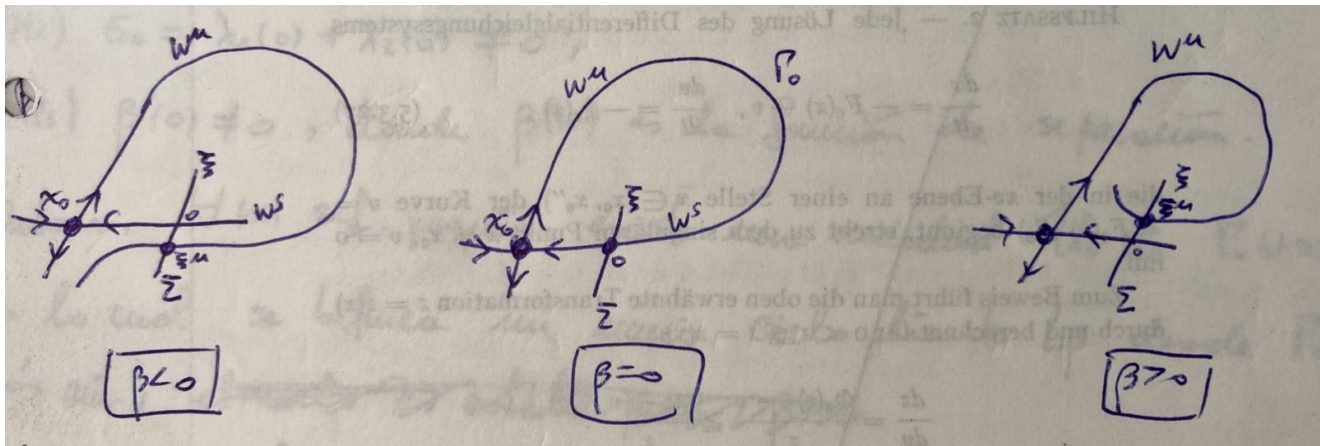


Figura 7.10: Introduciendo una sección transversal Σ a $W^s(x_0)$ se aprecia cómo las variedades invariantes se reorganizan al mover el parámetro α para formar la órbita homoclínica.

Sea ξ^u el valor de la coordenada ξ en la intersección $\Sigma \cap W^u(x_0)$. Notemos que la conexión homoclínica existe ssi $\xi^u = 0$.

Definición 24 El escalar $\beta = \xi^u$ se llama **función de separación**.

La condición $\beta = 0$ es una condición de bifurcación para la bifurcación homoclínica en \mathbb{R}^2 . Luego, en estas condiciones, la bifurcación homoclínica tiene codimensión uno; ver de nuevo la figura 7.10.

Teorema 20 (Andronov & Leontovich, 1939) *Considere un sistema dinámico planar*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.3)$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un punto silla hiperbólico $x_0 = 0$ con valores propios $\lambda_1(0) < 0$ y $\lambda_2(0) > 0$, y una órbita homoclínica Γ_0 conectando x_0 . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(H1) $\sigma = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0$.

(H2) $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\alpha)$ es la función de separación.

Entonces el sistema (7.3) posee (a lo más) un único ciclo límite L_β en una vecindad U_0 de $\Gamma_0 \cup x_0$. Si $\sigma < 0$ el ciclo es estable y existe para $\beta > 0$, y si $\sigma > 0$ el ciclo es inestable y existe para $\beta < 0$.

Definición 25 El número $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$ se conoce como **cantidad silla**.

La figura 7.11 ilustra el caso $\sigma < 0$. Para $\beta = 0$ la órbita homoclínica Γ_0 es internamente estable, es decir, atrae a las órbitas vecinas que comienzan en la región encerrada por Γ_0 . Además, el ciclo límite L_β es estable y existe estrictamente para $\beta > 0$. Por el contrario, si $\sigma > 0$, Γ_0 es internamente inestable y el ciclo límite L_β es inestable y existe estrictamente para $\beta < 0$ como se muestra en la figura 7.12.

OBSERVACIONES.

1. Según la condición (H2), la función de separación $\beta = \beta(\alpha)$ puede considerarse como un nuevo parámetro.
2. A medida que $|\beta| \rightarrow 0$, el ciclo L_β pasa cada vez más cerca del punto silla x_0 y le toma cada vez más tiempo “escapar” de la vecindad de x_0 . Como consecuencia, el período T_β de L_β tiende a infinito cuando $|\beta| \rightarrow 0$; ver figura 7.13.

DEMOSTRACIÓN. Introducimos dos secciones transversales cerca del punto silla: Sea Σ una sección transversal a W^s , y sea Π una sección transversal a W^u .

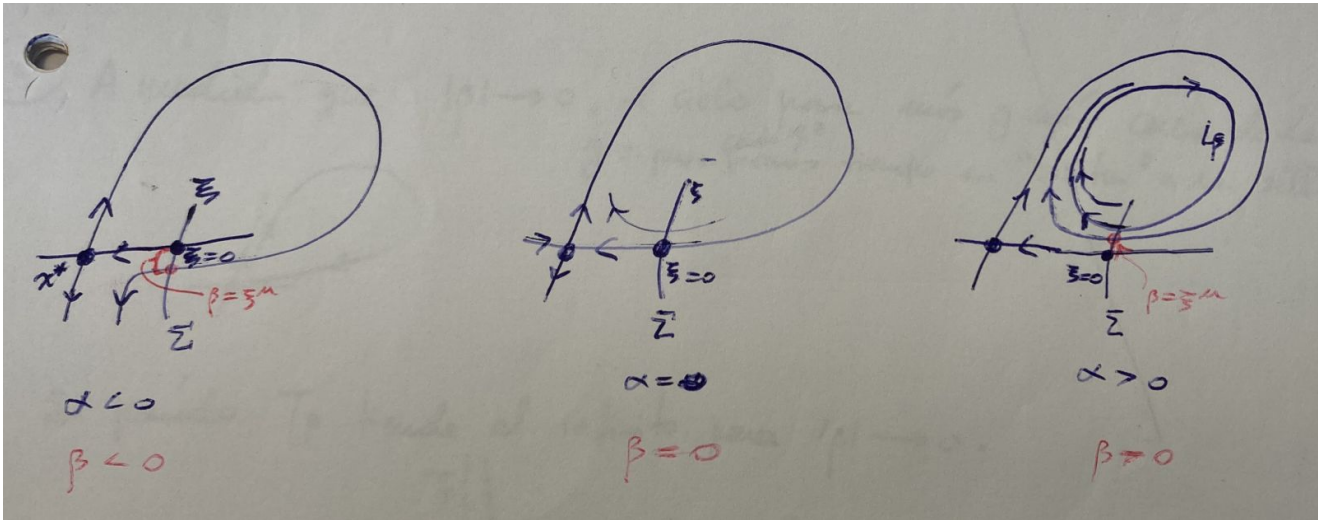


Figura 7.11: Caso $\sigma < 0$. La órbita homoclínica Γ_0 es internamente estable, y el ciclo límite L_β es estable y existe estrictamente para $\beta > 0$.

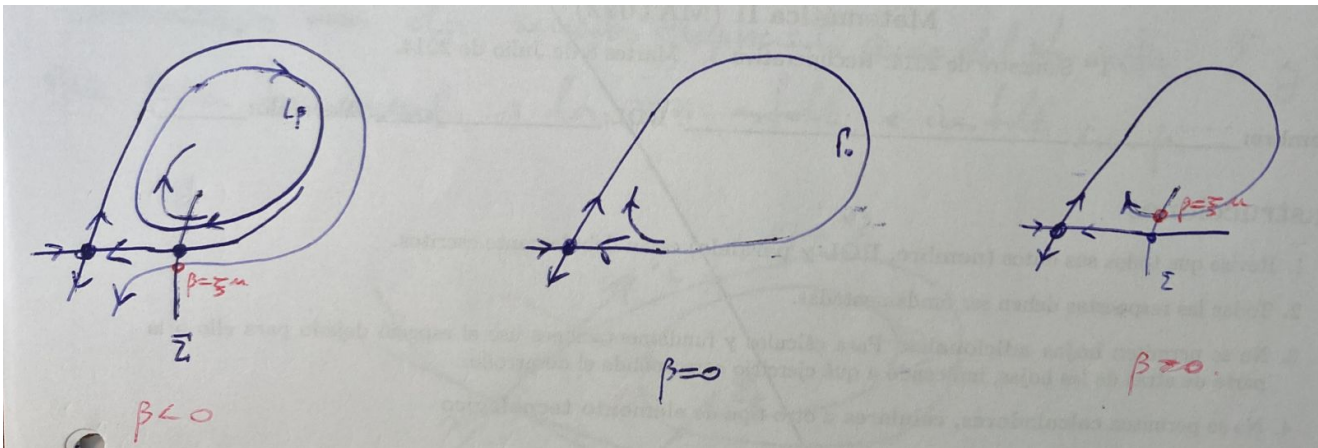


Figura 7.12: Caso $\sigma > 0$. La órbita homoclínica Γ_0 es internamente inestable, el ciclo límite L_β es inestable y existe estrictamente para $\beta < 0$.

Y sean v_1, v_2 vectores propios asociados respectivamente a λ_1 y λ_2 como en la figura [7.14](#). Definimos una aplicación de retorno de Poincaré P en la semi-sección $\Sigma^+ \subset \Sigma$ de la forma

$$P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$$

$$P = Q \circ \Delta,$$

donde $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$ es un mapeo “local” en una vecindad de x_0 , y $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ es

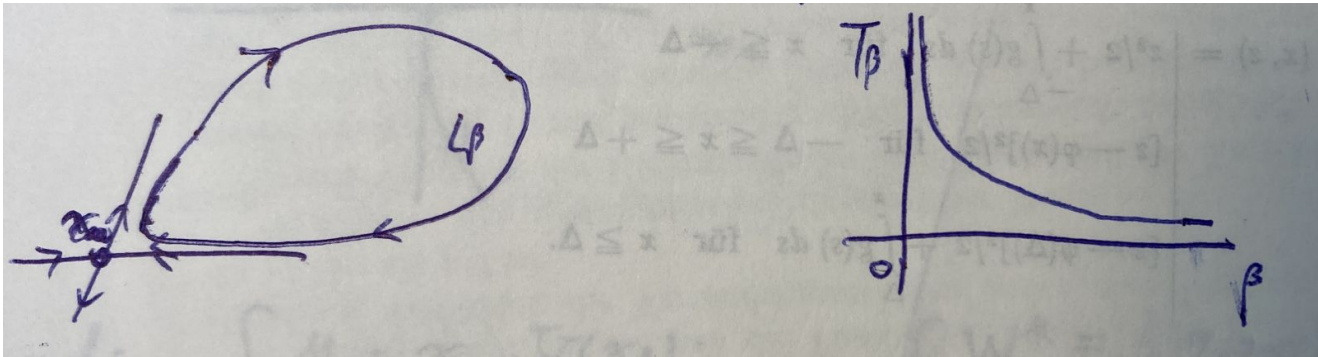


Figura 7.13: El período T_β de L_β tiende a infinito cuando $|\beta| \rightarrow 0$ (Caso $\sigma < 0$).

un mapeo “global”.

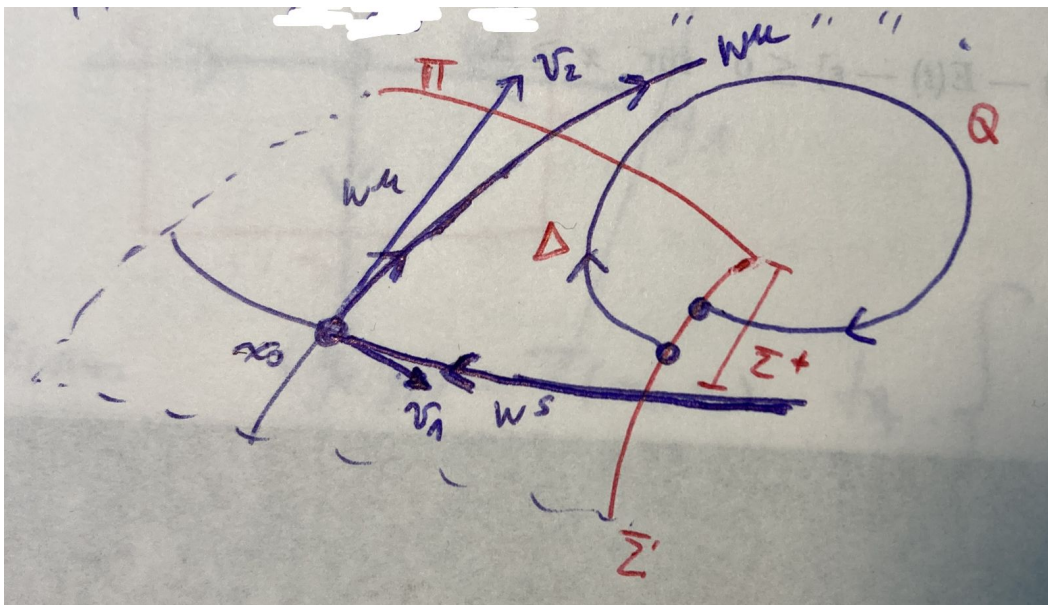


Figura 7.14: Construcción de una aplicación de retorno de Poincaré P cerca de x_0 .

Paso 1: Introducción de coordenadas canónicas. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que $x_0 = 0$; de no ser así, siempre podemos llevar el equilibrio al origen mediante una traslación. Dado que x_0 es una silla hiperbólica, existe un

cambio de coordenadas lineal e invertible que permite escribir (7.3) en la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + g_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

donde (x_1, x_2) son nuevas coordenadas y g_1, g_2 son funciones suaves de orden $O(\|x\|^2)$. Aquí el eje x_1 coincide con E^s y el eje x_2 corresponde a E^u .

Paso 2: Linealización local de las variedades invariantes. Por el teorema de la variedad estable, los conjuntos $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ existen y poseen representaciones locales dadas por:

$$\begin{aligned} W_{\text{loc}}^s(x_0) &= \{x_2 = S(x_1), S(0) = S'(0) = 0\}, \\ W_{\text{loc}}^u(x_0) &= \{x_1 = U(x_2), U(0) = U'(0) = 0\}, \end{aligned}$$

donde las funciones S, U son tan suaves como el campo f ; ver figura 7.15.

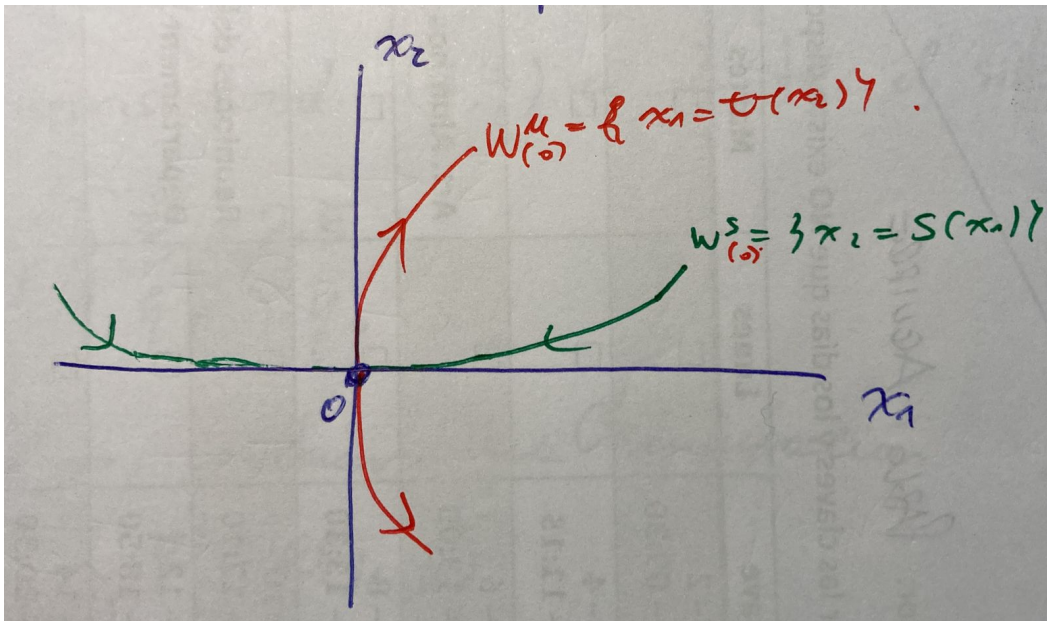


Figura 7.15: Variedades invariantes de x_0 en las coordenadas canónicas.

Definimos el nuevo sistema de coordenadas

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - U(x_2), \\ y_2 = x_2 - S(x_1), \end{cases} \quad (7.4)$$

en una vecindad de $x_0 = 0$. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} W_{\text{loc}}^s(x_0) &= \{y_1 = 0\}, \\ W_{\text{loc}}^u(x_0) &= \{y_2 = 0\}, \end{aligned}$$

cerca de $(0, 0)$ como en la figura [7.16](#).

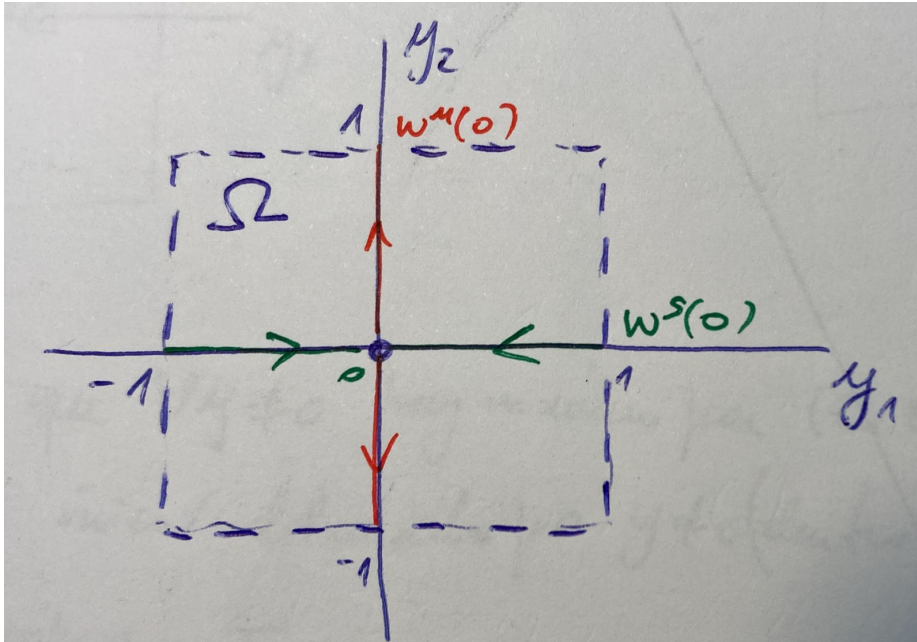


Figura 7.16: Variedades invariantes locales cerca del origen.

COMENTARIO: Más técnicamente, en el cambio de coordenadas anterior consideramos una transformación global $(y_1, y_2) = T(x_1, x_2)$ tal que: i) T se defina como [\(7.4\)](#) en una vecindad de $(0, 0)$; ii) T se defina como la identidad fuera de la vecindad del origen; iii) T sea suave.

En la figura [7.16](#) podemos asumir que $\Omega = \{(y_1, y_2) : -1 < y_{1,2} < 1\}$, o bien simplemente hacer un rescalamiento apropiado en los ejes.

De esta manera, el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_1 h_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + y_2 h_2(y_1, y_2), \end{cases} \quad (7.5)$$

donde $h_{1,2} = O(\|y\|)$. Aquí, (7.5) es un sistema no lineal suave con un punto silla en el origen cuyas variedades invariantes *locales* son lineales y coinciden con los ejes coordenados en Ω .

Paso 3: Linealización local C^1 del sistema. Introducimos nuevas coordenadas (ξ, η) en Ω tal que el sistema (7.5) se vuelva lineal:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta. \end{cases} \quad (7.6)$$

En otras palabras, construimos una C^1 -conjugación

$$\Phi : \begin{cases} \xi = \varphi(y_1, y_2), \\ \eta = \psi(y_1, y_2), \end{cases}$$

de la siguiente forma: Sea $y \in \Omega$ y consideremos su órbita bajo (7.5) como en la figura 7.17. Sean τ_1, τ_2 los valores absolutos de los tiempos requeridos para que esta órbita llegue a la frontera $\partial\Omega$ desde el punto inicial y . Se puede probar que el par (τ_1, τ_2) queda únicamente determinado para todo $y \neq 0$ en cada cuadrante de Ω y viceversa —Tarea: compruébelo! (Para puntos en los ejes $y_1 = 0$ o $y_2 = 0$ debemos definir $\tau_{1,2} = \infty$).

A continuación definimos la imagen $(\xi_0, \eta_0) = \Phi(y)$ del punto inicial y como aquel punto en Ω con los mismos tiempos de “salida” τ_1, τ_2 bajo (7.6). Luego, basta tomar la órbita correspondiente que pasa por $\Phi(y)$ bajo el flujo lineal de (7.6) dado por:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \\ \eta(t) = \eta_0 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Por ejemplo, sea un punto $(\xi_1, \eta_1) \in \Sigma$ de la forma $\xi_1 = 1, 0 < \eta_1 \leq 1$. El “tiempo de vuelo” T necesario para que la órbita que parte en $(1, \eta_1)$ llegue a Π bajo (7.6) satisface $1 = \eta_1 e^{\lambda_2 T}$ y luego, $T = \frac{1}{\lambda_2} \log\left(\frac{1}{\eta_1}\right)$. Si especificamos $T = \tau_1 + \tau_2$, entonces $\eta_1 = e^{-\lambda_2(\tau_1 + \tau_2)}$ y la órbita de (7.6) que parte en $(1, e^{-\lambda_2(\tau_1 + \tau_2)}) \in \Sigma$ llega al punto $(e^{\lambda_1(\tau_1 + \tau_2)}, 1) \in \Pi$ después de un tiempo $\tau_1 + \tau_2$. Luego, basta escoger $\Phi(y)$ como aquel punto de esta órbita que la separa en tramos de tiempo τ_1 y τ_2 , respectivamente.

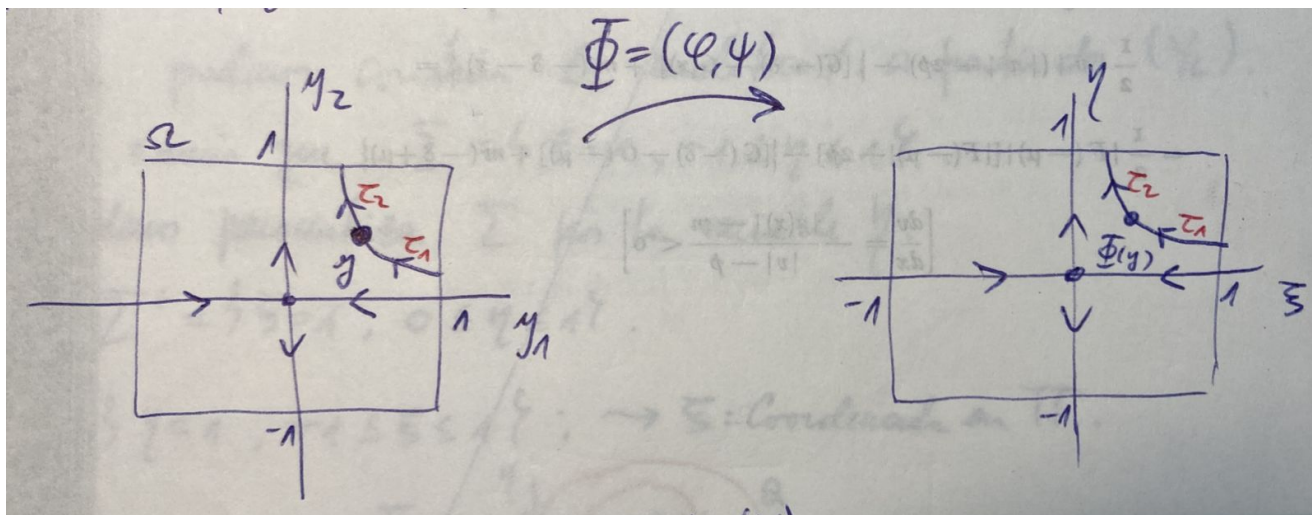


Figura 7.17: Construcción de la transformación $(\xi, \eta) = \Phi(y_1, y_2)$ en Ω .

El mapeo $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ es un C^1 -difeomorfismo que lleva órbitas de (7.5) en órbitas del sistema lineal (7.6), preservando la parametrización del tiempo; además, Φ transforma cada componente de $\partial\Omega$ en sí misma de manera homeomorfa. Φ queda definida como la identidad sobre los ejes coordenados y , en particular para $y = 0$ tomamos $\xi = 0, \eta = 0$.

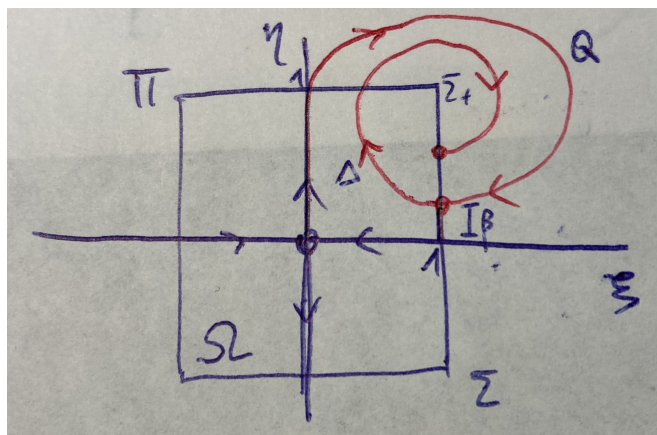


Figura 7.18: Análisis de la composición $P = Q \circ \Delta$.

Paso 4: Análisis de la composición $P = Q \circ \Delta$. Ahora podemos construir Δ

analíticamente a partir de (7.6). Podemos asumir que

$$\Sigma = \{\xi = 1, -1 \leq \eta \leq 1\},$$

de manera que podemos parametrizar Σ por la variable η . Luego, Σ^+ queda definido mediante

$$\Sigma^+ = \{\xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1\},$$

como en la figura 7.18. Similarmente,

$$\Pi = \{\eta = 1, -1 \leq \xi \leq 1\},$$

y la variable ξ actúa como coordenada en Π .

Integrando el sistema lineal (7.6) en Ω obtenemos:

$$\Delta : \Sigma_+ \rightarrow \Pi, \quad \eta \mapsto \xi = \eta^{-\lambda_1/\lambda_2}.$$

Notemos que Δ es no lineal a pesar que (7.6) sea lineal. Además, por continuidad asumimos que $\xi = 0$ para $\eta = 0$. Además, en rigor, $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(\beta)$, donde β es la función de separación.

Por otro lado, el mapeo global $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$ expresado en términos de (ξ, η) es de clase C^1 e invertible, y tiene la forma

$$\xi \mapsto \eta = \beta + a\xi + O(\xi^2),$$

donde $a = a(\beta) > 0$ pues las órbitas no se pueden intersectar; ver figura 7.18 nuevamente.

Con todo esto, ya podemos calcular $P = Q \circ \Delta$ quedando de la forma:

$$P : \Sigma_+ \rightarrow \Sigma, \quad \eta \mapsto \beta + a\eta^{-\lambda_1/\lambda_2} + \dots .$$

Analizamos los puntos fijos de P con $|\eta|$ pequeño y para $|\beta|$ pequeño, es decir, buscamos órbitas periódicas cerca del punto silla, candidatas a bifurcarse en la órbita homoclínica. Notemos que $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ssi $-\lambda_1/\lambda_2 > 1$. Observando los posibles gráficos de P en la figura 7.19, podemos concluir lo siguiente: En el caso $\sigma < 0$, P posee un único punto fijo no trivial —i.e., ciclo límite en el sistema original— el cual existe para $\beta > 0$; en cambio, si $\sigma > 0$, hay un único punto fijo no trivial el cual existe para $\beta < 0$. La estabilidad del ciclo sigue de analizar el mapeo P en cada caso. ■

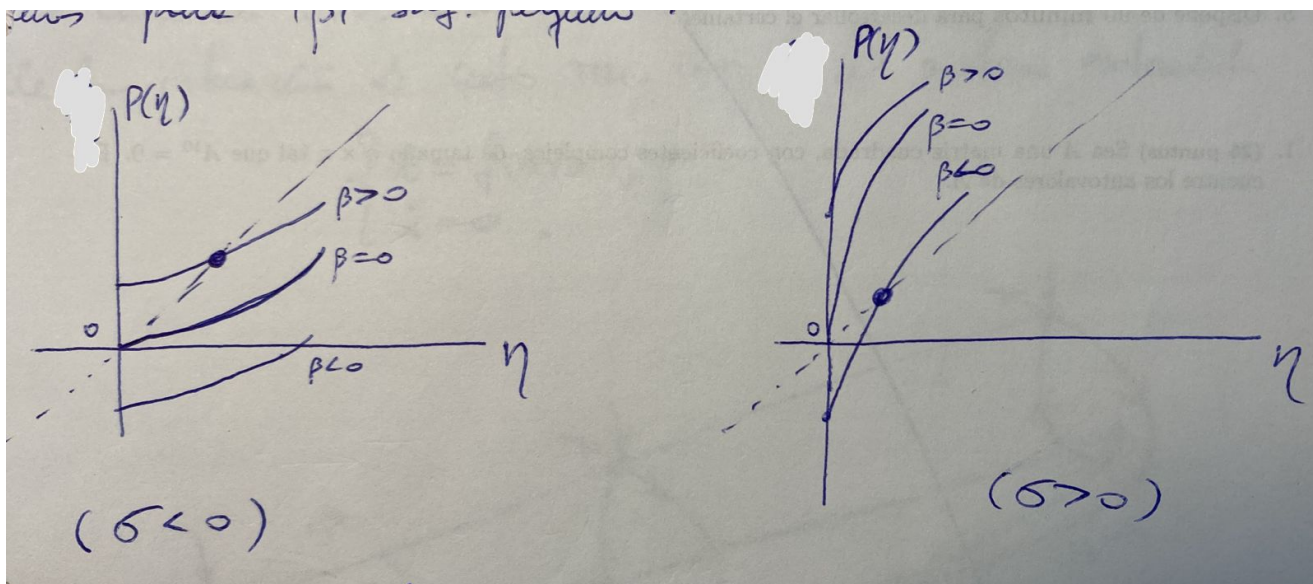


Figura 7.19: Análisis de los puntos fijos de P en los casos $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ (izquierda) y $\sigma > 0$ (derecha).

COMENTARIOS.

1. También es posible considerar órbitas homoclínicas “grandes” como la de la figura [7.20](#). En estos casos, el teorema anterior también sigue siendo válido.

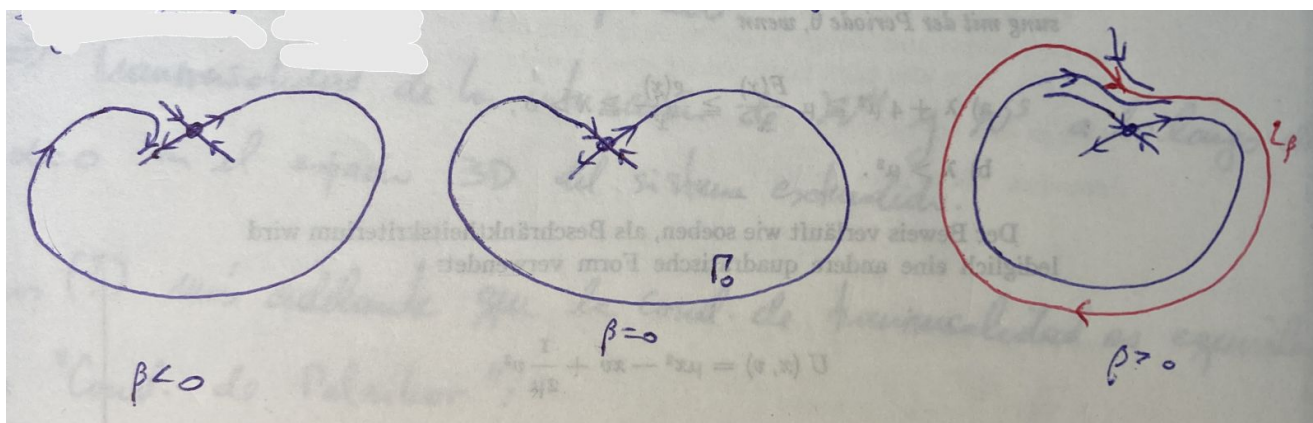


Figura 7.20: Aplicación del teorema anterior para la bifurcación de una órbita homoclínica de gran amplitud en el caso $\sigma < 0$.

2. La condición (H2) del teorema ($\beta'(0) \neq 0$) es equivalente a la transversalidad

de la intersección de ciertas variedades invariantes del sistema extendido

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0. \end{cases}$$

En efecto, sea $x_0(\alpha)$ la familia de puntos silla para $|\alpha|$ pequeño. Esta familia define una variedad de equilibrios en el espacio extendido (α, x) . Esta familia posee variedades estable e inestable bidimensionales \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u foliadas por $W^s(x_0(\alpha))$ y $W^u(x_0(\alpha))$, respectivamente. Es decir, cada sección transversal $\alpha = \text{cte}$ coincide con las variedades unidimensionales $W^s(x_0(\alpha))$ y $W^u(x_0(\alpha))$, respectivamente; ver figura 7.21. La condición (H2) significa que \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u se separan con velocidad no nula a medida que α pasa por $\alpha^* = 0$. Esto es, las variedades \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u se intersectan transversalmente a lo largo de Γ_0 en $\alpha = 0$ en el espacio tridimensional del sistema extendido.

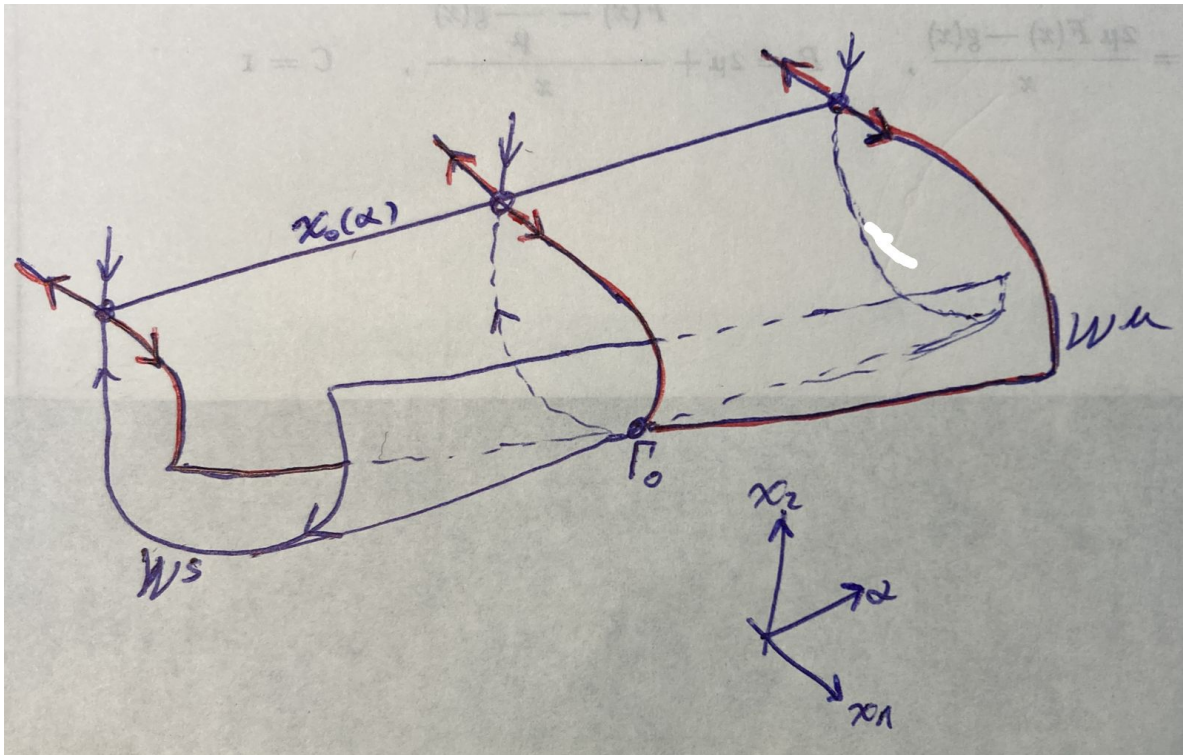


Figura 7.21: La condición (H2) significa que las variedades \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u se intersectan transversalmente a lo largo de Γ_0 en $\alpha = 0$ en el espacio extendido (α, x_1, x_2) .

Es posible probar que esta condición de transversalidad es equivalente a la llamada *condición de Melnikov*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \right) \exp \left\{ - \int_0^t \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) d\tau \right\} dt \neq 0,$$

donde el campo $f = (f_1, f_2)^t$ está evaluado en $\alpha = 0$ a lo largo de una solución $x^0(\cdot)$ de (7.3) que corresponda a la órbita homoclínica Γ_0 .