Capítulo 7

Bifurcaciones globales en campos vectoriales

Las variedades invariantes de mapeos y campos vectoriales juegan un papel clave en la organización de un espacio de fase. Las variedades (in)estables globales pueden sufrir reordenamientos críticos bajo la variación de parámetros dando lugar a bifurcaciones de estas variedades invariantes. Como consecuencia, estas transiciones topológicas y geométricas pueden resultar en cambios drásticos en regiones extensas del espacio de fase. Por esta razón, uno se refiere a estos eventos como **bifurcaciones globales**, en contraste con las bifurcaciones *locales* que se manifiestan solo en vecindades de equilibrios o puntos fijos. Las bifurcaciones globales pueden dar lugar a la formación de órbitas homoclínicas y heteroclínicas, la creación o modificación de cuencas de atracción, e incluso desencadenar el inicio de caos. Esto es de especial interés para comprender la naturaleza de los sistemas cercanos a las bifurcaciones globales en muchas aplicaciones, como en dinámica de láseres, impulsos nerviosos en neuronas, reacciones electroquímicas, sistemas de comunicación basados en caos, umbrales de extinción/supervivencia en modelos poblacionales, etc.

En este capítulo nos concentramos en los cambios topológicos en la dinámica cuando una órbita homoclínica se rompe (o se crea) al mover un parámetro de un sistema. Considere un sistema dinámico a tiempo continuo

$$\dot{x} = f(x, \alpha),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

con f suficientemente suave. Supongamos que x_0, x_1, x_2 son equilibrios del sistema y denotemos por φ^t al flujo asociado.

Definición 21 *Una órbita* Γ_0 *de* (7.1) *se dice* **homoclínica** *al equilibrio* x_0 *si para un cierto valor* $\alpha = \alpha^*$ *se tiene*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi^t(x) = x_0, \quad \textit{para todo } x \in \Gamma_0.$$

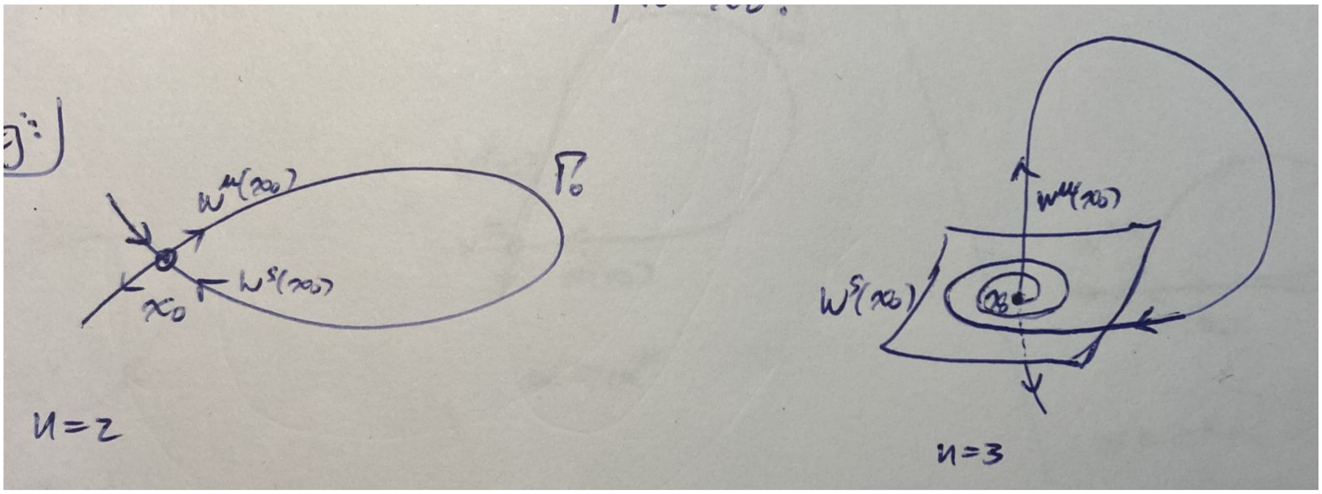

Figura 7.1: Ejemplos de órbitas homoclínicas en dimensión $n = 2$ y $n = 3$.

La figura 7.1 muestra ejemplos de algunas órbitas homoclínicas. Notemos que en cada caso $\Gamma_0 \subset W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$, es decir, la conexión homoclínica viene dada por la intersección de las variedades invariantes globales $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ de x_0.

Definición 22 *Una órbita* Γ_0 *de* (7.1) *se dice* **heteroclínica** *entre los equilibrios* x_1 *y* x_2 *si para un cierto valor* $\alpha = \alpha^*$ *se tiene*

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi^t(x) = x_1, \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi^t(x) = x_2, \quad \textit{para todo } x \in \Gamma_0.$$

En el caso de una conexión heteroclínica, ésta se caracteriza por “conectar” dos equilibrios distintos; ver figura 7.2. Notemos que en cada caso $\Gamma_0 \subset W^u(x_1) \cap W^s(x_2)$.

Notemos que las definiciones anteriores no requieren que los equilibrios sean hiperbólicos. Por ejemplo, la figura 7.3 muestra una órbita homoclínica que conecta un equilibrio x_0 en el momento de una bifurcación silla-nodo. Aquí, la órbita homoclínica $\Gamma_0 \subset W^c(x_0)$ está contenida en una variedad central de x_0.

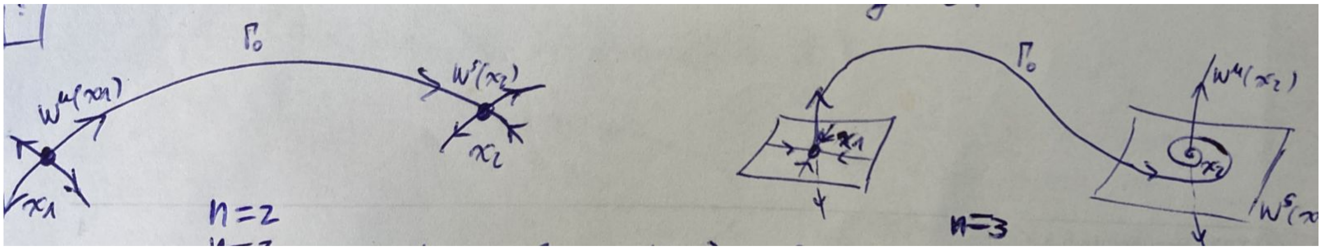

Figura 7.2: Ejemplos de órbitas heteroclínicas en dimensión $n = 2$ y $n = 3$.

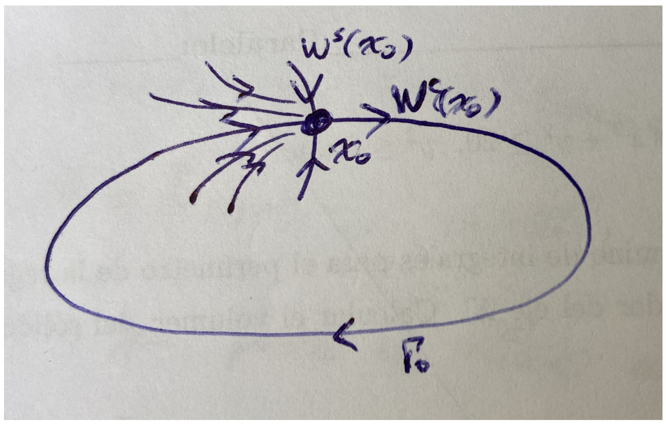

Figura 7.3: Una órbita homoclínica a un equilibrio no-hiperbólico.

7.1. Bifurcaciones globales y transversalidad

El propósito de esta sección es mostrar el siguiente resultado fundamental.

Lema 7 *Una órbita homoclínica a un equilibrio hiperbólico de* (7.1) *es un objeto estructuralmente inestable.*

Esto quiere decir que cualquier pequeña perturbación del sistema rompe la intersección de variedades invariantes obteniendo retratos de fase cualitativamente diferentes a aquel en donde existe la conexión homoclínica; ver figura 7.4. En definitiva la órbita homoclínica desaparece provocando una bifurcación en toda una vecindad de $\Gamma_0 \cup \{x_0\}$. Para probar este lema primero debemos introducir los siguientes conceptos de transversalidad.

Definición 23 *Decimos que dos variedades suaves* $M, N \subset \mathbb{R}^n$ *se* **intersectan**

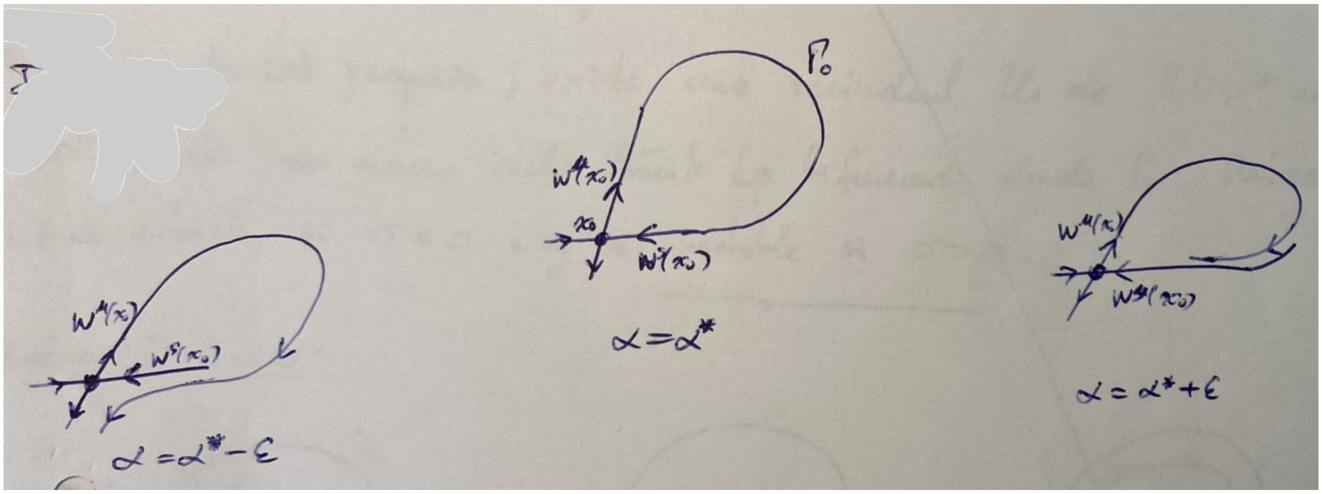

Figura 7.4: Una órbita homoclínica a un equilibrio hiperbólico es estructuralmente inestable.

transversalmente *si existen n vectores linealmente independientes tal que cada uno de ellos sea tangente a (al menos) una de estas variedades en cualquier punto de la intersección* $M \cap N$. *En tal caso, denotamos tal intersección como* $M \pitchfork N$. *Equivalentemente en términos de los espacios tangentes se cumple:* $M \pitchfork N$ *ssi* $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^n$, *para todo* $x \in M \cap N$, *por lo tanto* $\dim(T_xM + T_xN) = n$.

La noción de intersección transversal generaliza la que uno posee con respecto a objetos en el plano o el espacio tridimensional. Por ejemplo, la figura 7.5 muestra una curva suave intersectando una superficie suave S en $\mathbb{R}^3$. El plano tangente a S en el punto de intersección está generado por los vectores T_1 y T_2, mientras que $\hat{T}$ denota un vector tangente a la curva en la intersección. Si el ángulo θ entre $\hat{T}$ y el vector $\hat{n}$ normal a S no es un ángulo recto, i.e., si $\theta \neq \pi/2$, entonces el ángulo de intersección de la curva con el plano es no nulo y la intersección es transversal — efectivamente, en tal caso el conjunto $\{T_1, T_2, \hat{T}\}$ es linealmente independiente.

Observaciones.

1. Notemos que si dos variedades M, N no se intersectan en ningún punto, entonces satisfacen de manera trivial la definición anterior. Por lo tanto, decimos que M y N se intersectan transversalmente, incluso si $M \cap N = \emptyset$.

2. Una intersección transversal *persiste* bajo pequeñas perturbaciones C^1 de

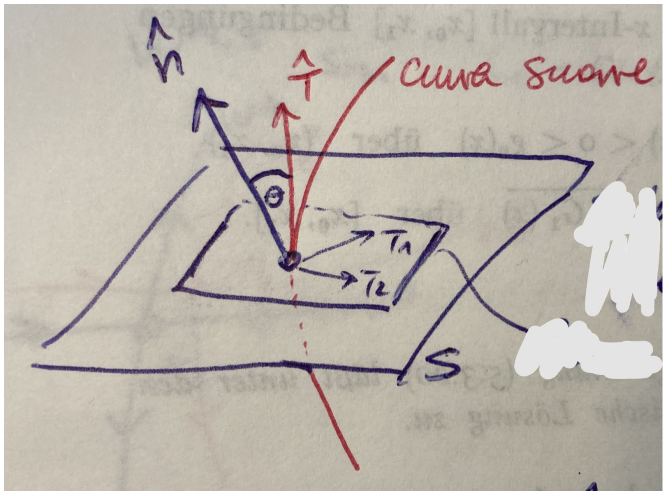

Figura 7.5: Una órbita homoclínica a un equilibrio hiperbólico es estructuralmente inestable.

las variedades. Es decir, si $M_0 \pitchfork N_0$, entonces $M_\epsilon \pitchfork N_\epsilon$ para todo $M_\epsilon \in V(M_0)$ y para todo $N_\epsilon \in V(N_0)$; ver figura 7.6. Por lo tanto, una intersección transversal de dos variedades invariantes de (7.1) es estructuralmente estable.

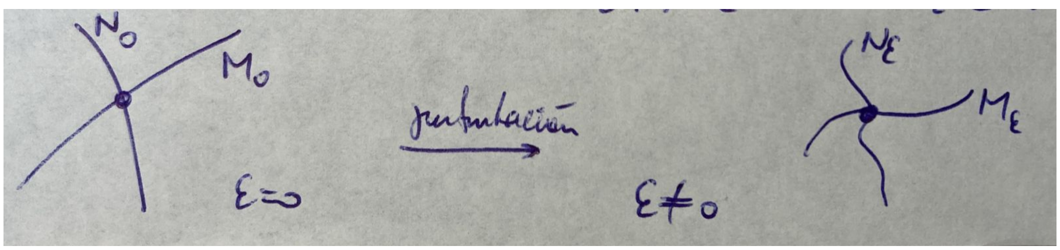

Figura 7.6: Intersecciones transversales persisten bajo pequeñas perturbaciones.

3. Por el contrario, si dos variedades se intersectan no transversalmente, entonces una perturbación genérica rompe la intersección, o bien, la intersección se vuelve transversal; ver figura 7.7. Por lo tanto, una intersección no transversal de dos variedades invariantes de (7.1) es estructuralmente inestable.

4. En esta capítulo consideramos puntos de equilibrio hiperbólicos de tipo silla. El teorema de la variedad estable asegura que sus variedades invariantes W^u y W^s tienen el mismo grado de suavidad que f. Luego, cualquier sistema C^1-

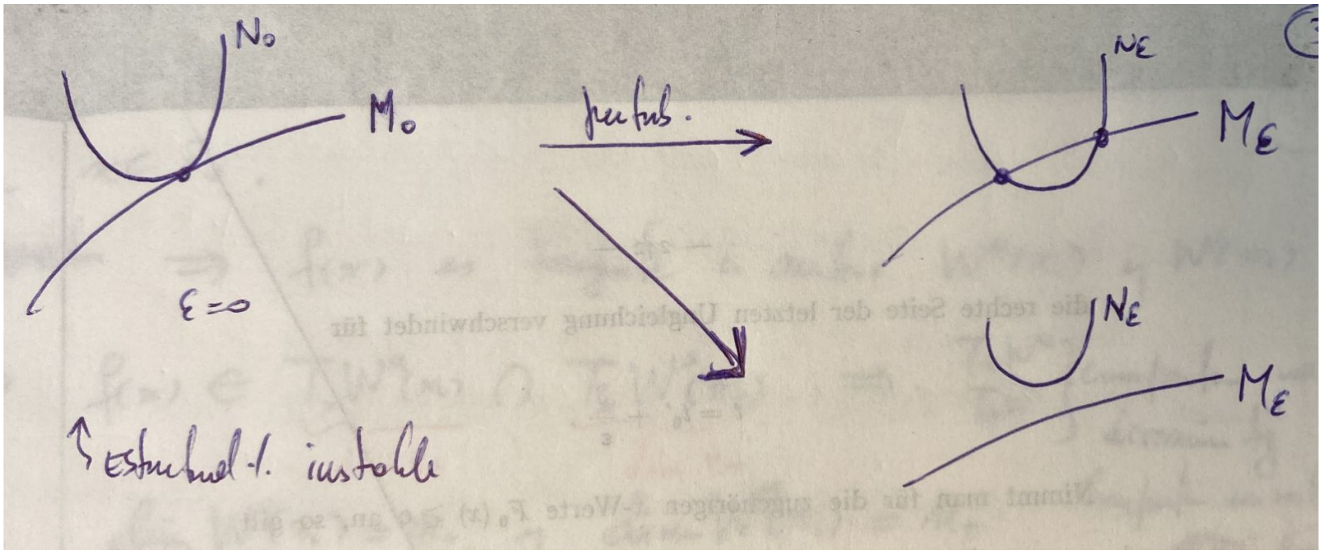

Figura 7.7: Perturbaciones genéricas de intersecciones no transversales rompen la intersección, o bien, provocan que la intersección se vuelva transversal.

cercano posee un punto silla hiperbólico y sus variedades invariantes $W^{u,s}$ son C^1-cercanas a las originales; ver figura 7.8.

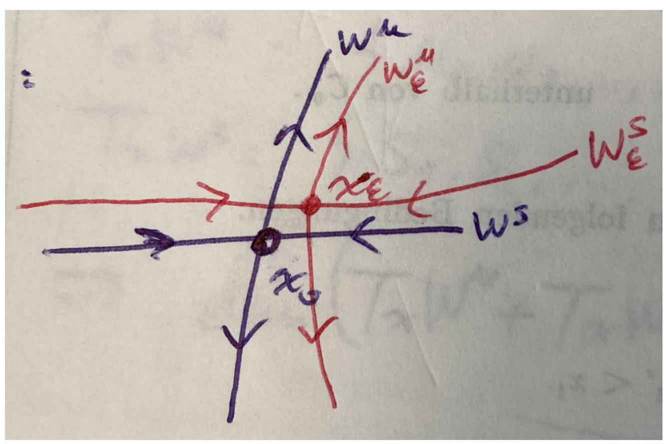

Figura 7.8: Un punto silla hiperbólico y sus variedades invariantes persisten bajo perturbaciones genéricas suficientemente pequeñas.

Demostración Lema 7. Supongamos que el equilibrio hiperbólico x_0 de (7.1) posee n_+ valores propios con parte real positiva y n_- valores propios con parte real negativa, con $n_+ + n_- = n$. Por hipótesis, las variedades $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ se intersectan a lo largo de una órbita homoclínica Γ_0. A la luz de las observaciones anteriores, basta probar que la intersección es no transversal.

Sea $x \in \Gamma_0$. Luego el vector $f(x)$ es tangente a ambas variedades $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ en el punto x. Por tanto,

$$f(x) \in T_x W^s(x_0) \cap T_x W^u(x_0),$$

donde $T_x W^{s,u}(x_0)$ denota el espacio tangente a $W^{s,u}(x_0)$ en x. Además notemos que $\dim(T_x W^s(x_0)) = n_-$ y $\dim(T_x W^u(x_0)) = n_+$. Por lo tanto, existen bases de $T_x W^s(x_0)$ y de $T_x W^u(x_0)$, respectivamente, tal que comparten el mismo vector $f(x)$. Sin pérdida de generalidad, si la base de $T_x W^s(x_0)$ es $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n_- -1}, f(x)\}$ y la base de $T_x W^u(x_0)$ es $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n_+ -1}, f(x)\}$, entonces

$$\dim(T_x W^s(x_0) + T_x W^u(x_0)) \leq n_- + n_+ - 1.$$

Por lo tanto, hay a lo más $n_- + n_+ - 1 = n - 1 \neq n$ vectores linealmente independientes tangentes a estas variedades en x. ■

A la luz del Lema 7, en lo que sigue nuestro objetivo es describir los posibles retratos de fase no equivalentes cerca de un sistema que posea una órbita homoclínica en $\mathbb{R}^2$ (en la sección 7.2) y en $\mathbb{R}^3$ (en la sección 7.3) bajo pequeñas perturbaciones C^1.

Observaciones.

1. El análisis requerido en este capítulo es más complicado que para bifurcaciones locales, pues en general no existen formas normales topológicas globales para sistemas con órbitas homo/heteroclínicas.

2. En ocasiones, es posible hallar algunas condiciones de genericidad tales que todos los sistemas a un parámetro satisfaciéndolas son topológicamente equivalentes.

3. Sin embargo, hay casos complicados en donde *no hay* equivalencia topológica en sistemas vecinos satisfaciendo las mismas condiciones de genericidad. Esto nos impide encontrar diagramas de bifurcación universales. En estos casos,

de todas formas los distintos retratos de fase no equivalentes poseen ciertos elementos en común y revelan información útil sobre la dinámica.

4. Las conexiones heteroclínicas dadas por intersecciones no transversales de variedades invariantes de puntos silla hiperbólicos también son estructuralmente inestables. Sin embargo, el único evento "esencial" es la desaparición de la órbita heteroclínica; ver figura 7.9 con un caso planar.

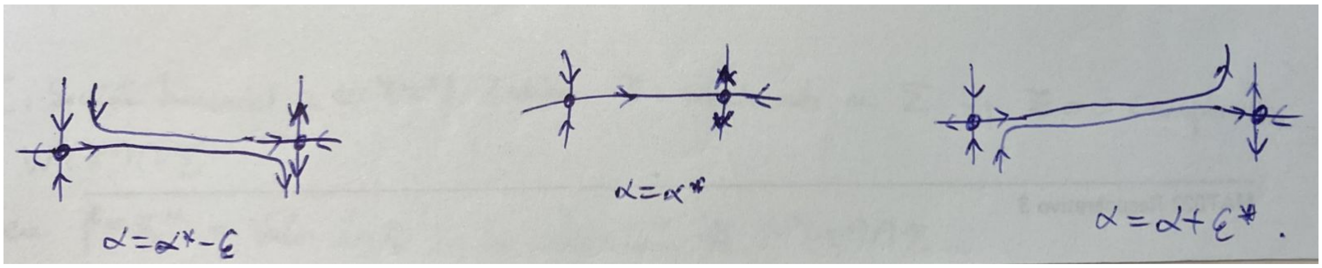

Figura 7.9: Una órbita heteroclínica dada por la interseccióon no transversal de variedades invariantes es estructuralmente inestable.

5. En $\mathbb{R}^3$ es posible construir sistemas con una órbita heteroclínica estructuramente estable conectando dos puntos silla mediante la intersección transversal de variedades estable e inestable dos-dimensionales.

6. Los sistemas *Hamiltonianos* son una clase especial de sistemas dinámicos para los cuales la presencia de una órbita homoclínica no transversal es genérica.