6.1.3. Bifurcación Bogdanov-Takens

Supongamos un sistema planar

$$\dot{x} = f(x,\alpha),\ x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{6.3}$$

con f suficientemente suave tal que posee en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con un valor propio cero doble $\lambda_{1,2}(0) = 0$. Podemos escribir el sistema en $\alpha = 0$ en la forma

$$\dot{x} = A_0 x + F(x), \tag{6.4}$$

donde $A_0 = Df_x(0,0)$ es la matriz jacobiana de f con respecto a x en $(x,\alpha) = (0,0)$, y $F(x) = f(x,0) - A_0 x$ es una función suave, con $F(x) = O(\|x\|^2)$. Las condiciones de bifurcación implican que

$$\det A_0 = 0,\ \mathrm{tr} A_0 = 0.$$

Asumamos que $A_0 \neq 0$, es decir, A_0 tiene al menos una entrada no nula. Entonces existen dos vectores reales linealmente independientes $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^2$, tales que

$$A_0 q_0 = 0,\ A_0 q_1 = q_0. \tag{6.5}$$

El vector q_0 es el vector propio de A_0 correspondiente al valor propio 0, mientras que q_1 es el vector propio *generalizado* de A_0 correspondiente a este valor propio. Más aún, existen vectores propios *adjuntos* $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ de la matriz traspuesta A_0^T:

$$A_0^T p_1 = 0,\ A_0^T p_0 = p_1. \tag{6.6}$$

Los vectores q_1 y p_0 no son únicos incluso si q_0 y p_1 están fijos. No obstante, siempre podemos seleccionar cuatro vectores que satisfagan (6.5) y (6.6) tales que

$$\begin{aligned} \langle q_0, p_0 \rangle = \langle q_1, p_1 \rangle = 1, \\ \langle q_1, p_0 \rangle = \langle q_0, p_1 \rangle = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^2$: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Si seleccionamos q_0 y q_1 como base de $\mathbb{R}^2$, entonces cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ se puede representar de manera única como

$$x = y_1 q_0 + y_2 q_1,$$

para ciertos $y_{1,2} \in \mathbb{R}$. Tomando en cuenta (6.7) obtenemos que estas nuevas coordenadas (y_1, y_2) vienen dadas por

$$\begin{cases} y_1 = \langle p_0, x \rangle, \\ y_2 = \langle p_1, x \rangle. \end{cases} \tag{6.8}$$

En las coordenadas (y_1, y_2), el sistema (6.4) toma la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle p_0, F(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \\ \langle p_1, F(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Note la forma particular de la matriz jacobiana, la cual corresponde al bloque de Jordan de orden 2 con ceros en la diagonal.

Ocupemos las coordenadas (y_1, y_2) para todo α con $\|\alpha\|$ pequeño. En estas coordenadas, el sistema original (6.3) queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle p_0, f(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \\ \langle p_1, f(y_1 q_0 + y_2 q_1) \rangle \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

el que se reduce a (6.9) para $\alpha = 0$. Expandiendo el lado derecho de (6.10) como serie de Taylor con respecto a y en $y = 0$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &=& y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha) y_1 + a_{01}(\alpha) y_2 \\ && +\frac{1}{2} a_{20}(\alpha) y_1^2 + a_{11}(\alpha) y_1 y_2 + \frac{1}{2} a_{02}(\alpha) y_2^2 + P_1(y, \alpha), \\ \dot{y}_2 &=& b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha) y_1 + b_{01}(\alpha) y_2 \\ && +\frac{1}{2} b_{20}(\alpha) y_1^2 + b_{11}(\alpha) y_1 y_2 + \frac{1}{2} b_{02}(\alpha) y_2^2 + P_2(y, \alpha), \end{cases} \tag{6.11}$$

donde los coeficientes $a_{kl}(\alpha), b_{kl}(\alpha)$ y $P_{1,2}(y, \alpha) = O(\|y\|^3)$ son funciones suaves en sus argumentos. A partir de (6.9) tenemos

$$a_{00}(0) = a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{00}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0.$$

Las funciones $a_{kl}(\alpha)$ y $b_{kl}(\alpha)$ se pueden expresar en términos del lado derecho

$f(x,\alpha)$ de (6.3) y de los vectores $q_{0,1}, p_{01}$. Por ejemplo,

$$\begin{cases} a_{20}(\alpha) = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2}\langle p_0, f(y_1q_0 + y_2q_1)\rangle\Big|_{y=0}, \\ b_{20}(\alpha) = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2}\langle p_1, f(y_1q_0 + y_2q_1)\rangle\Big|_{y=0}, \\ b_{11}(\alpha) = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}\langle p_1, f(y_1q_0 + y_2q_1)\rangle\Big|_{y=0}. \end{cases}$$

A partir de transformaciones de coordenadas suaves (que dependen suavemente de los parámetros), reparametrizaciones del tiempo y cambios de parámetros obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 19 *Supongamos un sistema planar*

$$\dot{x} = f(x,\alpha),\ x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

con f suficientemente suave tal que posee en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con un valor propio cero doble $\lambda_{1,2}(0) = 0$.

Asuma que las siguientes condiciones de genericidad se satisfacen:

(BT1) La matriz jacobiana $A_0 = Df_x(0,0) \neq 0$;

(BT2) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$;

(BT3) $b_{20}(0) \neq 0$;

(BT4) La aplicación

$$(x,\alpha) \mapsto (f(x,\alpha), \operatorname{tr}(Df_x(x,\alpha)), \det(Df_x(x,\alpha)))$$

es regular en el punto $(x,\alpha) = (0,0)$.

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &=& y_2, \\ \dot{y}_2 &=& \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2, \end{cases} \tag{6.12}$$

donde $s = \operatorname{sign}\big((a_{20}(0) + b_{11}(0))b_{20}(0)\big) = \pm 1$.

Existen varias formas normales (equivalentes) para la bifurcación Bogdanov-Takens. La forma normal (6.12) fue introducida por Bogdanov, mientras que Takens derivó (de manera simultánea e independiente) la forma normal

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 + \beta_2 y_1 + y_1^2, \\ \dot{y}_2 &= \beta_1 + s y_1^2, \end{cases}$$

donde $s = \pm 1$.

Diagrama de bifurcación de la forma normal

Escojamos $s = -1$ en el sistema (6.12):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 - y_1 y_2. \end{cases} \tag{6.13}$$

La figura 6.7 muestra el diagrama de bifurcación. Todos los equilibroos están ubicados en el eje horizontal $y_2 = 0$ y satisfacen la ecuación

$$\beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 = 0.$$

Esta ecuación puede tener entre cero y dos raíces reales. La parábola

$$F = \{(\beta_2, \beta_2) : \ 4\beta_1 - \beta_2^2 = 0\}$$

determina el signo del discriminante asociado y corresponde a una bifurcación fold: A lo largo de esta curva el sistema (6.13) posee un equilibrio con un valor propio cero. Si $\beta_2 \neq 0$, entonces la bifurcación fold es no degenerada y cruzar F de derecha a izquierda implica la aparición de dos equilibrios. Denotemos al izquierdo por E_1 y al derecho por E_2:

$$E_{1,2} = (y_{1,2}^0, 0) = \left(\frac{-\beta_2 \mp \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}}{2}, 0 \right).$$

El punto $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$ separa dos ramas F_- y F_+ de la curva fold correspondientes a $\beta_2 < 0$ y $\beta_2 > 0$, respectivamente: Pasar por F_- implica el colapso de un nodo estable E_1 con un punto silla E_2, mientras que pasar por F_+ genera un nodo inestable E_1 y una silla E_2.

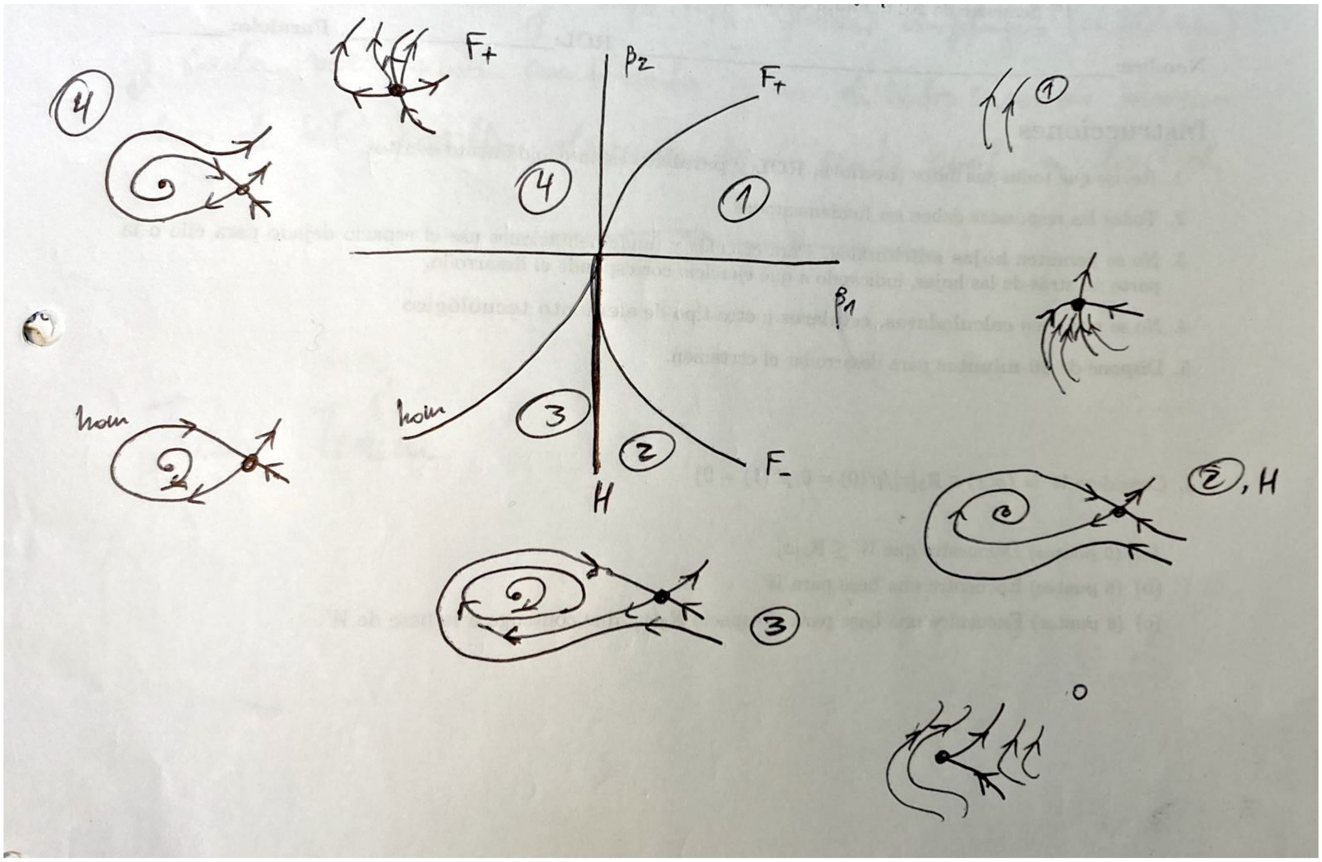

Figura 6.7: Diagrama de bifurcación de la forma normal (6.12) con $s = -1$ de la bifurcación Bogdanov-Takens.

El semieje vertical

$$H = \{(\beta_2, \beta_2) : \ \beta_1 = 0, \ \beta_2 < 0\}$$

corresponde a una bifurcación de Hopf no degenerada donde el equilibrio E_1 tiene un par de valores propios con parte real nula ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$). La bifurcación de Hopf da lugar a un ciclo límite estable pues $l_1 < 0$. El ciclo existe cerca de H para $\beta_1 < 0$. El equilibrio E_2 permanece como silla para todos los valores de parámetros a la izquierda de la curva F y no pasa por bifurcaciones. No existen otras bifurcaciones locales en la dinámica de (6.13).

Realicemos un circuito alrededor de $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$ para (β_2, β_2) suficientemente pequeños, partiendo desde la región **1** donde no hay equilibrios (y luego no pueden haber ciclos límite). Entrando desde la región **1** a la región **2** a través de T_- aparecen dos equilibrios: una silla y un nodo estable. Luego, el nodo se transforma en foco y pierde estabilidad a medida que cruzamos la curva H: Aparece un ciclo límite estable para valores de parámetros cercanos a H en la región **3**. Si continuamos el circuito en sentido horario y volvemos a la región **1** no debe permanecer ningún ciclo límite. ¿Cómo desaparece el ciclo límite estable creado en la bifurcación de Hopf? No puede ser a través de otra bifurcación de Hopf, pues la estabilidad del equilibrio E_1 volvería a cambiar. Tampoco puede ser por una bifurcación silla-nodo de ciclos, pues no hay un segundo ciclo cerca de $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$. Por lo tanto, deben haber bifurcaciones globales "destruyendo" el ciclo en algún lugar entre H y F_+. La respuesta es la existencia de una curva de bifurcación homoclínica

$$hom = \left\{ (\beta_2, \beta_2) : \ \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2), \ \beta_2 < 0 \right\}$$

que se origina en $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$ y separa las regiones **3** y **4**. A lo largo de *hom* el sistema (6.13) tiene una órbita homoclínica a la silla E_2. A medida que trazamos la homoclínica a lo largo de *hom* hacia el punto Bogdanov-Takens $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$, el loop se va encogiendo y (en el límite) desaparece. De esta manera, existe un único ciclo hiperbólico (estable) para parámetros dentro de la región **3** acotada por la curva H y por la curva *hom*, y no existen ciclos fuera de esta región. El ciclo que nace en H "crece" y se acerca al punto silla E_2; finalmente "muere" al transformarse en la órbita homoclínica en *hom*.

Para completar el circuito, notemos que no existen ciclos en la región **4** ubicada entre la curva *hom* y la rama F_+. Un nodo inestable y una silla —que existen para valores de parámetros en **4**— colisionan y desaparecen en la curva fold F_+. Señalemos también que en $(\beta_2, \beta_2) = (0, 0)$ el equilibrio crítico con un valor propio cero doble tiene exactamente dos órbitas asintóticas (una que tiende al equilibrio para $t \to +\infty$ y una que se acerca para $t \to -\infty$). Estas órbitas forman una punta con forma de cúspide.

Comentarios.

1. El caso $s = +1$ se puede tratar de manera similar. Dado que se puede reducir al caso ya presentado mediante la sustitución $t \mapsto -t$, $y_2 \mapsto -y_2$, los retratos

paramétricos permanecen pero el ciclo se vuelve inestable cerca del punto Bogdanov-Takens.

2. El teorema anterior nos entrega una manera analítica —al verificar las condiciones de bifurcación y las condiciones de genericidad (BT1)-(BT4)— de probar la existencia de una bifurcación homoclínica. Este es uno de los pocos métodos regulares para detectar bifurcaciones homoclínicas analíticamente.

3. El caso multidimensional de la bifurcación Bogdanov-Takens no trae nada nuevo pues se puede reducir al caso planar usando el teorema de la variedad central. Por ejemplo, una forma normal topológica para la bifurcación Bogdanov-Takens en $\mathbb{R}^n$ es:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2, \\ \dot{\xi}_- = -\xi_-, \\ \dot{\xi}_+ = \xi_+, \end{cases}$$

donde $s = \pm 1$, $\xi_\pm \in \mathbb{R}^{n_\pm}$, y n_+ y n_- son el número de valores propios del equilibrio crítico con $\mathrm{Re}\lambda > 0$ y $\mathrm{Re}\lambda < 0$, respectivamente, tal que $n_- + n_+ + 2 = n$.