

# Capítulo 6

## Bifurcaciones locales de codimensión dos

En este capítulo presentamos varios ejemplos prominentes de campos vectoriales que dependen de (al menos) dos parámetros. Concretamente, consideramos sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (6.1)$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ , y el campo  $f$  es suficientemente suave en  $(x, \alpha)$ .

Supongamos que en  $\alpha = \alpha^*$  el sistema (6.1) tiene un equilibrio  $x = x^*$  para el cual se satisfacen las condiciones de una bifurcación. Entonces, genéricamente, existe una *curva de bifurcación*  $\mathcal{B}$  en el plano  $(\alpha_1, \alpha_2)$  que pasa por el punto  $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ . Cada punto de  $\mathcal{B}$  especifica un equilibrio de (6.1) exhibiendo la misma bifurcación; ver bosquejo en la figura 6.1. La curva  $\mathcal{B}$  divide al plano  $(\alpha_1, \alpha_2)$  en dos regiones disjuntas I y II dentro de las cuales la dinámica es cualitativamente equivalente. Cada vez que un punto  $(\alpha_1, \alpha_2)$  cruza transversalmente la curva  $\mathcal{B}$  desde la región I hacia la región II (o viceversa) el sistema exhibe dicha bifurcación.

**Ejemplo 26** Supongamos que  $n = 1$  y que en  $\alpha = \alpha^*$  el equilibrio  $x = x^*$  tiene un valor propio  $\lambda_1 = f_x(x^*, \alpha^*) = 0$ . Entonces el sistema algebraico no lineal

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0, \\ f_x(x, \alpha) = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

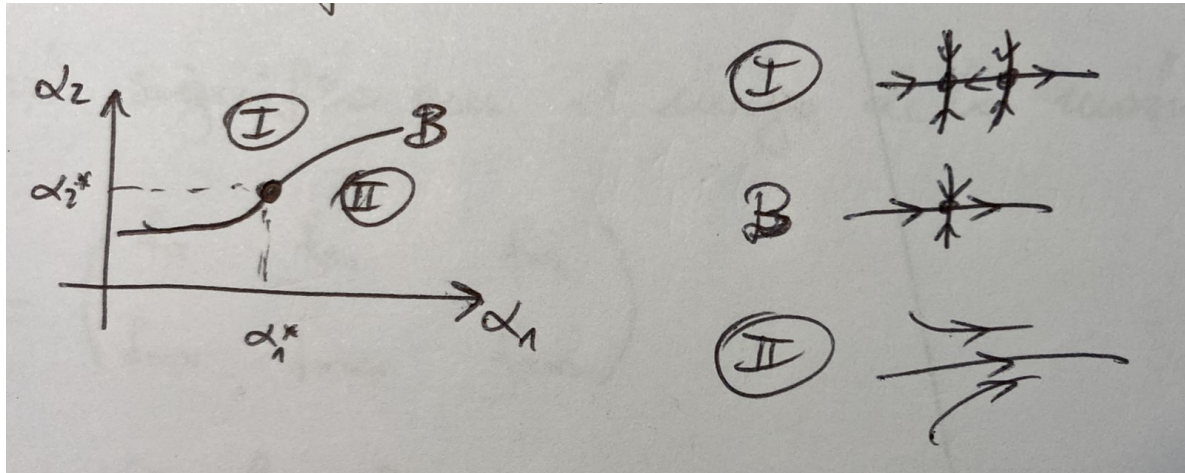


Figura 6.1: Bosquejo esquemático de una curva de bifurcación en el espacio de parámetros  $(\alpha_1, \alpha_2)$  y respectivos retratos de fase.

define, genéricamente, una curva (variedad uno-dimensional)  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  de equilibrios con un valor propio  $\lambda_1 = 0$  y que pasa por el punto  $(x^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)$  como en la figura 6.2. A continuación justificaremos un poco más la existencia y construcción de  $\Gamma$ .

Aquí, *genéricamente* significa que el rango de la matriz jacobiana de (6.2)

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_{\alpha_1} & f_{\alpha_2} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} & f_{x\alpha_2} \end{pmatrix}$$

es maximal, i.e., igual a 2. Por ejemplo, si la bifurcación fold es genérica (i.e., se satisfacen las condiciones de genericidad en  $\alpha^*$ :  $f_{xx}(x^*, \alpha^*) \neq 0$ ,  $f_{\alpha_1}(x^*, \alpha^*) \neq 0$ ), entonces el rango de  $J$  es 2 en  $(x^*, \alpha^*)$  pues

$$\det \begin{pmatrix} f_x & f_{\alpha_1} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\alpha_1} \\ f_{xx} & f_{x\alpha_1} \end{pmatrix} = -f_{xx}f_{\alpha_1} \neq 0.$$

En tal caso, el teorema de la función implícita nos da la existencia local de dos funciones suaves  $x = X(\alpha_2)$ ,  $\alpha_1 = A(\alpha_2)$ , que satisfacen (6.2) y tales que

$$X(\alpha_2^*) = x^*, \quad A(\alpha_2^*) = \alpha_1^*.$$

Estas funciones definen la curva  $\Gamma$  parametrizada por  $\alpha_2$  cerca del punto  $(x^*, \alpha^*)$ . Por continuidad, las condiciones de genericidad de la bifurcación fold se satisfarán

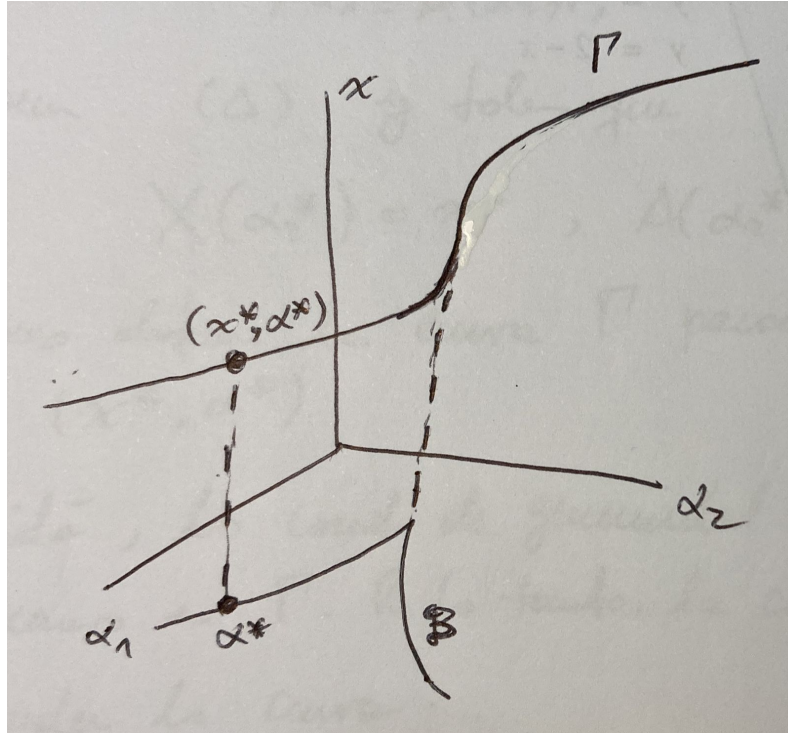


Figura 6.2: Bosquejo esquemático de una curva  $\Gamma$  en el espacio  $(x, \alpha_1, \alpha_2)$  de equilibrios con un valor propio  $\lambda_1 = 0$ . La proyección de esta curva al plano de parámetros define la curva de bifurcación  $\mathcal{B}$ .

en puntos cercanos a  $(x^*, \alpha^*)$ ; por lo tanto, la construcción se puede repetir para extender la curva  $\Gamma$ .

Cada punto  $(x, \alpha) \in \Gamma$  define un punto de equilibrio  $x = x(\alpha)$  de (6.1), con  $n = 1$ , con un valor propio cero en el valor de parámetro  $\alpha$ . La proyección estándar  $\pi : (x, \alpha) \rightarrow \alpha$  mapea  $\Gamma$  a una curva  $\mathcal{B} = \pi(\Gamma)$  en el plano de parámetros. Esta curva  $\mathcal{B}$  es análoga a la de la figura 6.1. El sistema exhibe una bifurcación fold cada vez que un punto  $(\alpha_1, \alpha_2)$  cruza la curva  $\mathcal{B}$ . Sin embargo,  $\mathcal{B}$  podría contener puntos “especiales” o *singularidades* en los cuales la bifurcación deja de ser genérica; éste es el foco de la sección siguiente.

## 6.1. Puntos de codimensión dos

Consideremos de nuevo el sistema  $n$ -dimensional (6.1). Supongamos que variamos los parámetros  $(\alpha_1, \alpha_2)$  simultáneamente para trazar una curva de bifurcación

$\Gamma$  (o  $\mathcal{B}$ ) como en las figuras [6.1](#) y [6.2](#) y monitoreamos las propiedades del equilibrio no hiperbólico definido por esta curva de bifurcación. Entonces, los siguientes eventos podrían sucederle al equilibrio a medida que nos movemos a lo largo de  $\Gamma$  (o  $\mathcal{B}$ ):

1. Valores propios adicionales podrían acercarse y ubicarse en el eje imaginario, aumentando la dimensión de la variedad central  $W^c$ .
2. Algunas de las condiciones de genericidad para la bifurcación de codimensión uno podrían violarse.

**Ejemplo 27** (Singularidades en una bifurcación fold) Supongamos que la curva  $\mathcal{B}$  define una bifurcación silla-nodo. Un punto típico en  $\mathcal{B}$  define un equilibrio con un valor propio nulo simple  $\lambda_1 = 0$  y ningún otro valor propio en el eje imaginario. La restricción de [\(6.1\)](#) a una variedad central tiene la forma

$$\dot{\xi} = b\xi^2 + O(\xi^3).$$

En un punto silla-nodo no degenerado, el coeficiente  $b$  es distinto de cero. A medida que uno traza la curva  $\mathcal{B}$ , uno podría encontrar las siguientes singularidades:

1. Un valor propio real  $\lambda_2$  se acerca al eje imaginario y la variedad central  $W^c$  se vuelve bidimensional, es decir:

$$\lambda_{1,2} = 0.$$

Estas son las condiciones para una **bifurcación Bogdanov-Takens** (o doble cero). Para que ocurra, se necesita que la dimensión del espacio de fase sea  $n \geq 2$ .

2. Dos valores propios complejos adicionales  $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$  cruzan el eje imaginario y  $W^c$  se vuelve tridimensional, esto es:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0.$$

Estas condiciones corresponden a una **bifurcación fold-Hopf**. Obviamente, para que ocurra se requiere que  $n \geq 3$ .

3. El valor propio  $\lambda_1 = 0$  permanece simple y es el único en el eje imaginario (i.e.,  $\dim W^c = 1$ ), pero el coeficiente  $b$  de la forma normal se anula, es decir:

$$\lambda_1 = 0, \quad b = 0.$$

Estas son las condiciones para una **bifurcación cúspide** (del inglés *cusp*), y puede suceder para  $n \geq 1$ . Notemos que esta bifurcación es indetectable con solo analizar los valores propios.

**Ejemplo 28** (Singularidades en una bifurcación de Hopf) Sea  $\mathcal{B}_H$  una curva de bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros. En un punto típico de  $\mathcal{B}_H$  el sistema tiene un equilibrio con

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

y ningún otro valor propio con parte real nula. Entonces la variedad central  $W^c$  posee dimensión dos y existen coordenadas polares  $(\rho, \varphi)$  para las cuales la restricción del sistema a  $W^c$  es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{\rho} = l_1 \rho^3 + O(\rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1 + O(\rho^3), \end{cases}$$

donde  $l_1$  es la primera cantidad de Lyapunov. Por definición  $l_1 \neq 0$  es un punto Hopf no degenerado. Al movernos a lo largo de  $\mathcal{B}_H$  podríamos encontrar los siguientes singularidades:

1. Dos valores propios complejos conjugados extra  $\lambda_{3,4}$  cruzan el eje imaginario y  $W^c$  se vuelve 4-dimensional:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_1, \quad \omega_{0,1} > 0.$$

Estas condiciones corresponden a una **bifurcación Hopf-Hopf**. Obviamente, para que ocurra se requiere que  $n \geq 4$ .

2. El primer coeficiente de Lyapunov se anula mientras que  $\lambda_{1,2}$  permanecen simples y  $\dim W^c = 2$ :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad (\omega_0 > 0), \quad l_1 = 0.$$

Esto se conoce como una **bifurcación de Hopf generalizada** o **bifurcación Bautin**. Puede suceder en sistemas de dimensión  $n \geq 2$ . Al igual que la bifurcación cúspide, esta singularidad no se puede detectar con tan solo monitorear los valores propios.

#### COMENTARIOS.

1. A lo largo de una curva de bifurcación de Hopf también podríamos hallar un punto Bogdanov-Takens a medida que  $\omega_0 = 0$ . En este punto los dos valores propios imaginarios colisionan en el origen y tenemos un valor propio cero doble.
2. Obviamente, también podríamos hallar un punto fold-Hopf al trazar la curva  $\mathcal{B}_H$ .
3. Hemos identificado 5 puntos de bifurcación que uno puede encontrar en sistemas genéricos a dos parámetros al movernos a lo largo de curvas de codimensión uno. Cada una de estas singularidades se caracteriza por dos condiciones independientes y, por lo tanto, es de codimensión dos. *No existen* otras bifurcaciones locales de codimensión dos en sistemas dinámicos continuos genéricos.
4. En este curso estudiaremos los puntos cúspide, Hopf generalizado (Bautin) y Bogdanov-Takens. Las bifurcaciones fold-Hopf y Hopf-Hopf poseen desdoblamientos considerablemente más complicados y con distintos casos de diagramas de bifurcación posibles dependiendo de ciertos coeficientes en las formas normales respectivas.

#### 6.1.1. Bifurcación cúspide

**Teorema 17** *Supongamos un sistema unidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

*con  $f$  suficientemente suave tal que posee en  $\alpha = 0$  el equilibrio  $x = 0$ , y suponemos que se satisfacen las condiciones de la bifurcación cúspide:*

$$\lambda = f_x(0, 0) = 0, \quad b = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) = 0.$$

Asuma que las siguientes condiciones de genericidad se satisfacen:

$$(C1) \quad f_{xxx}(0,0) \neq 0;$$

$$(C2) \quad (f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})|_{(0,0)} \neq 0.$$

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca de  $x = 0$  a una de las formas normales topológicas

$$\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y \pm y^3,$$

para  $(\beta_1, \beta_2) \approx (0, 0)$  suficientemente pequeños.

Consideremos la forma normal  $\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3$ . ¿Cuál es su diagrama de bifurcación? Esta forma normal puede tener hasta tres equilibrios, los cuales son las raíces reales de  $\beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0$ . Derivando la forma normal con respecto a  $y$  e igualando a cero se tiene  $\beta_2 - 3y^2 = 0$ . Por lo tanto, la curva  $\Gamma$  definida por

$$\Gamma : \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0, \\ \beta_2 - 3y^2 = 0, \end{cases}$$

define una bifurcación fold. La proyección de  $\Gamma$  al plano  $(\beta_1, \beta_2)$  nos da una curva  $T$  de bifurcación silla-nodo en el plano de parámetros. Eliminando  $y$  del sistema algebraico anterior obtenemos la proyección buscada:

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_2^3 - 27\beta_1^2 = 0\}.$$

La curva  $T$  tiene dos ramas  $T_1$  y  $T_2$  que se encuentran tangencialmente en el punto cúspide  $(0, 0)$ ; ver figura [6.3](#). La curva  $T$  divide al plano  $(\beta_1, \beta_2)$  en dos regiones abiertas denotadas **1** y **2**, respectivamente. En la región **1**, el sistema tiene tres equilibrios, dos estables y uno inestable; mientras que en **2** solo hay un equilibrio estable. A lo largo de  $T_1$  o  $T_2$  ocurre una bifurcación silla-nodo con respecto a  $\beta_1$ . En el origen  $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$  existe un colapso de tres equilibrios en una raíz triple de  $\beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0$ . Además, notemos que a lo largo del eje  $\beta_1 = 0$  ocurre una bifurcación pitchfork con respecto a  $\beta_2$  al obtener  $\dot{y} = \beta_2 y - y^3$ .

La figura [6.4](#) muestra la variedad de equilibrios

$$M = \{(y, \beta_1, \beta_2) : \beta_1 + \beta_2 y - y^3 = 0\}$$

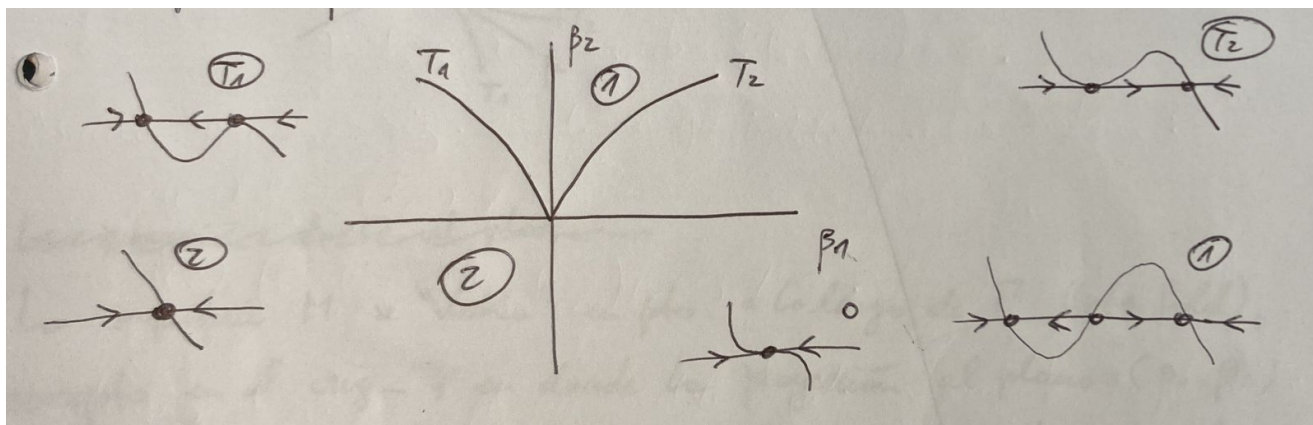


Figura 6.3: Diagrama de bifurcación de la forma normal  $\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3$  de la bifurcación cúspide.

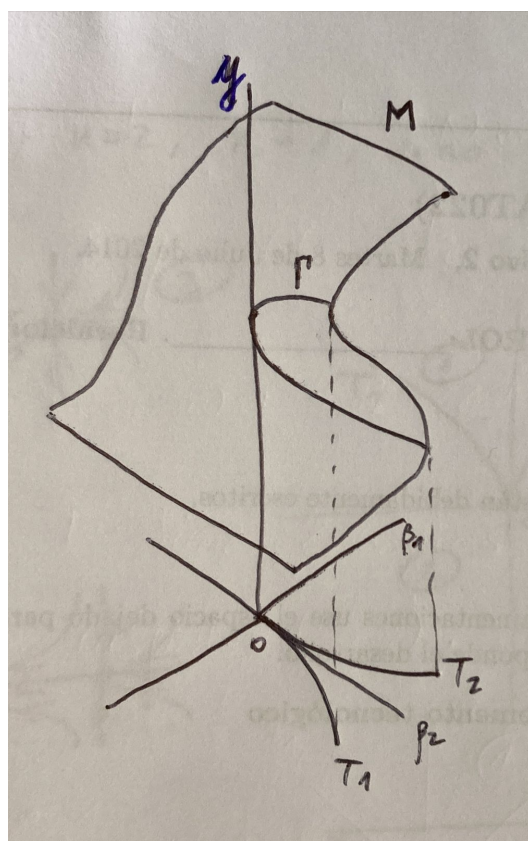


Figura 6.4: Variedad de equilibrios  $M$  de la forma normal topológica  $\dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3$  de la bifurcación cúspide.



en el espacio tridimensional  $(y, \beta_1, \beta_2)$ . La superficie se “dobla” en los puntos a lo largo de  $\Gamma$  —puntos fold—, excepto en el origen, en donde la proyección al plano  $(\beta_1, \beta_2)$  tiene una singularidad cúspide. (Note que  $\Gamma$  es suave en todos los puntos, pero su proyección  $T$  pierde diferenciabilidad en el origen.)

### Bifurcación cúspide en sistemas $n$ -dimensionales

En un sistema  $n$ -dimensional,  $n \geq 2$ , con una bifurcación cúspide, el teorema anterior debe ser aplicado a la restricción del campo de vectores a la variedad central respectiva y así obtenemos la forma normal topológica:

$$\begin{cases} \dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y \pm y^3, \\ \dot{\xi}_1 = -\xi_1, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_2, \end{cases}$$

donde  $y \in \mathbb{R}$  define un sistema de coordenadas en  $W^c$ ,  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_-}$ ,  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n_+}$ , y  $n_-, n_+$  son el número de valores propios con parte real negativa y positiva, respectivamente. Por ejemplo, la figura [6.5](#) muestra el caso  $n = 2$ ,  $n_- = 1$ ,  $n_+ = 0$  para el sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = \beta_1 + \beta_2 y - y^3, \\ \dot{\xi}_1 = -\xi_1. \end{cases}$$

El diagrama de bifurcación es exactamente el mismo que en el caso  $n = 1$ , excepto por la componente hiperbólica (adicional) del campo que contrae todas las órbitas hacia la variedad central  $W^c$  ubicada en el eje  $\xi_1 = 0$ .

### 6.1.2. Bifurcación de Hopf generalizada o Bautin

**Teorema 18** *Supongamos un sistema planar*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

con  $f$  suficientemente suave tal que posee un equilibrio  $x = 0$  con valores propios

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

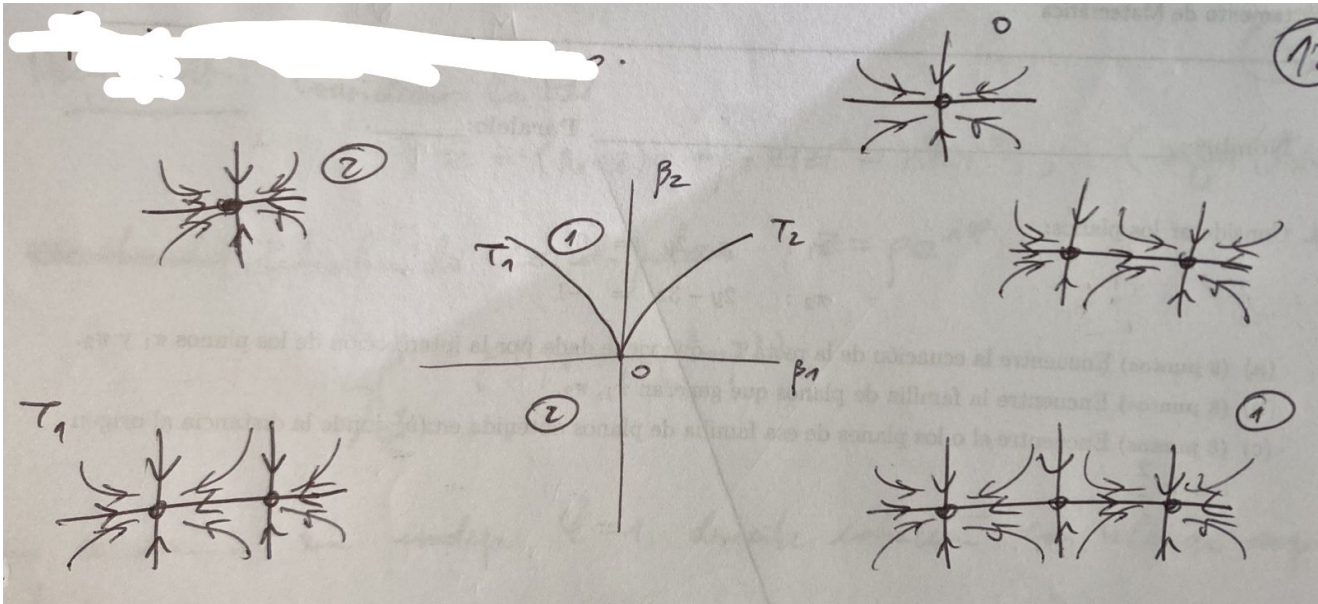


Figura 6.5: Diagrama de bifurcación de una forma normal de la bifurcación cúspide en  $n = 2$ .

para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño. Supongamos que para  $\alpha = 0$  se tiene

$$\mu(0) = 0, \quad l_1(0) = 0,$$

donde  $l_1(\alpha)$  es la primera cantidad de Lyapunov. Asumamos que se satisfacen las siguientes condiciones de genericidad:

(B1)  $l_2(0) \neq 0$ , donde  $l_2$  es la **segunda cantidad de Lyapunov**;

(B2) El mapeo  $\alpha \mapsto (\mu(\alpha), l_1(\alpha))^t$  es regular en  $\alpha = 0$ .

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca de  $x = 0$  a una de las formas normales complejas:

$$\dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 \pm z|z|^4,$$

para  $(\beta_1, \beta_2) \approx (0, 0)$  suficientemente pequeños, y donde el signo  $\pm$  corresponde a  $\text{sign}(l_2(0))$ .

Describamos el diagrama de bifurcación de la forma normal topológica

$$\dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 - z|z|^4,$$

es decir, con  $\text{sign}(l_2(0)) < 0$ . Introduciendo coordenadas polares  $z = \rho e^{i\varphi}$ , obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Notemos que estas ecuaciones son independientes; en particular,  $\dot{\varphi} = 1$  describe una rotación con velocidad angular unitaria (constante). En  $\rho = 0$  existe un equilibrio trivial correspondiente a  $z = 0$ . Los equilibrios no triviales (cuando existan) son raíces positivas de

$$\beta_1 + \beta_2\rho^2 - \rho^4 = 0,$$

y corresponden a órbitas periódicas circulares. Estas soluciones se ramifican desde la solución trivial a lo largo de la recta

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$$

y colisionan y desaparecen en la semiparábola

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2^2 + 4\beta_1 = 0, \beta_2 > 0\}.$$

La figura [6.6](#) muestra el diagrama de bifurcación resultante. La curva  $H$  es una curva de bifurcación de Hopf dividida en dos segmentos  $H_+$  y  $H_-$  ubicadas en el semieje  $\beta_2 > 0$  y  $\beta_2 < 0$ , respectivamente. El signo de  $\beta_2$  determina el signo de la primera cantidad de Lyapunov  $l_1(\beta)$  (compare con la forma normal de la sección [3.2.1](#)). En efecto, a lo largo de  $H_+$ , se tiene  $l_1(\beta) > 0$  y la bifurcación de Hopf es subcrítica; mientras que a lo largo de  $H_-$ , se tiene  $l_1(\beta) < 0$  y la bifurcación de Hopf es supercrítica.

La bifurcación de Hopf es de codimensión uno a lo largo de toda la curva  $H$  excepto en el origen  $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$  en donde ocurre el cambio de criticalidad. Más aún, el equilibrio  $z = 0$  es estable para  $\beta_1 < 0$  e inestable para  $\beta_1 > 0$ . Luego, un único ciclo límite *estable* se bifurca cuando el punto  $(\beta_1, \beta_2)$  cruza  $H_-$  desde la región **1** hacia la **2**. Este ciclo límite estable es hiperbólico y persiste en toda la región **2**. Análogamente, un único ciclo límite *inestable* se bifurca cuando el punto  $(\beta_1, \beta_2)$  cruza  $H_+$  desde la región **2** hacia la **3**. Sin embargo, esta bifurcación no afecta al ciclo límite creado en  $H_-$ . Por lo tanto, si  $(\beta_1, \beta_2)$  está en la

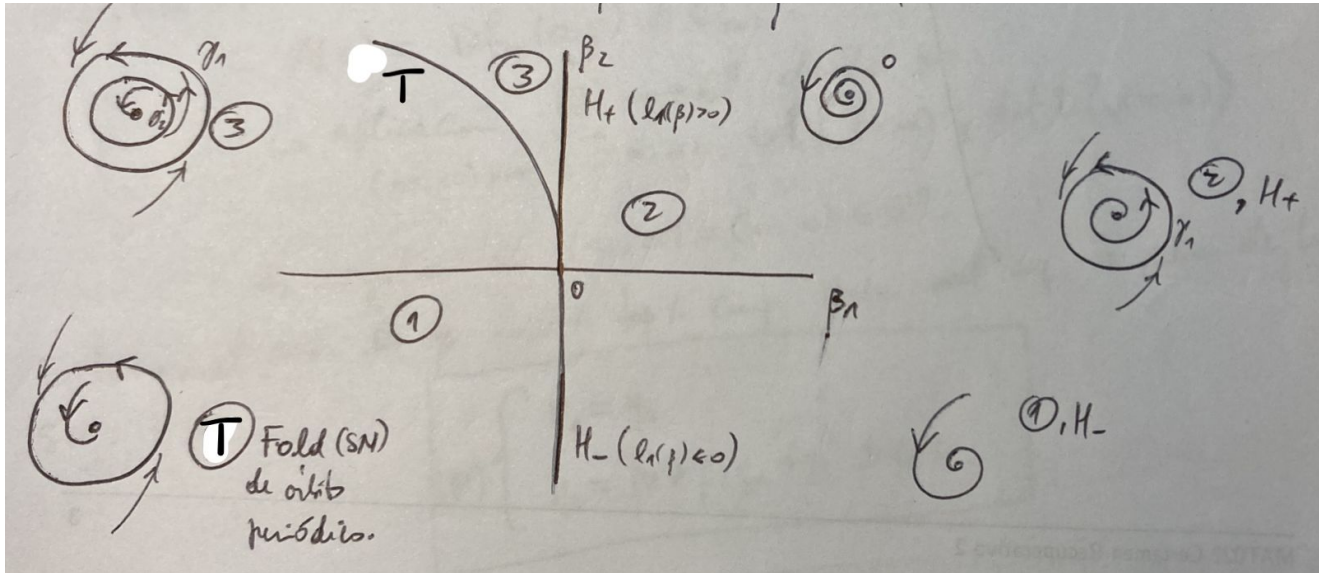


Figura 6.6: Diagrama de bifurcación de la forma normal  $\dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 - z|z|^4$  de la bifurcación de Hopf generalizada.

región **3**, el origen está rodeado de dos ciclos, uno estable (de mayor amplitud) y uno inestable (infinitesimal). La transición entre las regiones **1** y **3** ocurre en la curva  $T$ , la que corresponde a una bifurcación fold de ciclos —a lo largo de  $T$ , el sistema tiene un solo ciclo con multiplicador  $\mu = 1$ .

### COMENTARIOS.

1. El teorema anterior significa que la forma normal descrita captura la topología de cualquier sistema bidimensional que tenga una bifurcación Bautin y que satisfaga las condiciones de genericidad.
2. Bajo las hipótesis del teorema, aunque los ciclos límite en el sistema original no sean círculos perfectos, podemos esperar la existencia de dos de ellos para valores de parámetros cercanos. Más aún, los ciclos colisionan y desaparecen a lo largo de la curva  $T$  que emana desde el punto de codimensión dos.
3. La bifurcación Bautin es el primer ejemplo de la aparición de una bifurcación de ciclos límite cerca de una bifurcación de codimensión dos de equilibrios. En este caso, con tan solo análisis local podemos probar la existencia de una

bifurcación fold de ciclos para valores cercanos de los parámetros.

4. El caso  $l_2(0) > 0$  se puede tratar en forma similar al hacer la transformación  $(z, \beta, t) \mapsto (\bar{z}, -\beta, -t)$ .
5. El cálculo del coeficiente  $l_2(0)$  es, en general, demasiado complicado y extenso —Pueden buscarse los detalles en la literatura. Afortunadamente, existen paquetes computacionales con rutinas que determinan su signo.
6. El caso  $n$ -dimensional,  $n \geq 3$ , puede tratarse de manera completamente análoga considerando la reducción de la variedad central al caso planar ya estudiado. El diagrama de bifurcación es exactamente el mismo que en el caso planar, con la adición de las  $n-2$  componentes hiperbólicas complementarias. Por ejemplo, una forma normal topológica para la bifurcación Bautin en  $\mathbb{R}^n$  es:

$$\begin{cases} \dot{z} = (\beta_1 + i)z + \beta_2 z|z|^2 + sz|z|^4, \\ \dot{\xi}_- = -\xi_-, \\ \dot{\xi}_+ = \xi_+, \end{cases}$$

donde  $s = \text{sign}(l_2(0)) = \pm 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\xi_{\pm} \in \mathbb{R}^{n_{\pm}}$ , y  $n_+$  y  $n_-$  son el número de valores propios del equilibrio crítico con  $\text{Re}\lambda > 0$  y  $\text{Re}\lambda < 0$ , respectivamente, tal que  $n_- + n_+ + 2 = n$ .