

### 5.3. Variedades centrales en sistemas dinámicos parámetro-dependientes

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Supongamos que en  $\alpha = 0$  el sistema tiene un equilibrio no hiperbólico  $x_0 = 0$  con  $n_0$  valores propios en el eje imaginario y  $n_- + n_+ = n - n_0$  valores propios con parte real no nula. Consideremos el sistema extendido

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

donde  $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Notemos que el sistema (5.9) podría ser no lineal, incluso si el sistema original (5.8) fuese lineal.

Sea la matriz jacobiana de (5.9) en  $(x_0, \alpha^*) = (0, 0)$ :

$$J = \begin{pmatrix} D_x f(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $J$  es de tamaño  $(n+1) \times (n+1)$  y posee  $n_0 + 1$  valores propios en el eje imaginario y  $n - n_0$  valores propios con parte real no nula. Luego podemos aplicar el teorema de la variedad central al sistema (5.9). De esta manera:

1. Existe una variedad central  $\mathcal{W}^c \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , con  $\dim \mathcal{W}^c = n_0 + 1$ .
2.  $\mathcal{W}^c$  es tangente en  $(0, 0)$  al espacio propio (generalizado) de  $J$  correspondiente a los  $n_0 + 1$  valores propios con parte real nula.

Dado que  $\dot{\alpha} = 0$ , todos los hiperplanos  $n_0$ -dimensionales

$$\Pi_{\alpha_0} = \{(\alpha, x) : \alpha = \alpha_0\}$$

son invariantes con respecto a (5.9). Por lo tanto, la variedad  $\mathcal{W}^c$  está *foliada* por variedades invariantes  $n_0$ -dimensionales

$$W_\alpha^c = \mathcal{W}^c \cap \Pi_\alpha.$$

Decimos que la colección  $\{W_\alpha^c\}$  es una *foliación* de  $\mathcal{W}^c$  donde cada variedad  $W_\alpha^c$  es una *hoja*, es decir,  $\mathcal{W}^c$  queda “parametrizado” por una familia de variedades invariantes disjuntas.

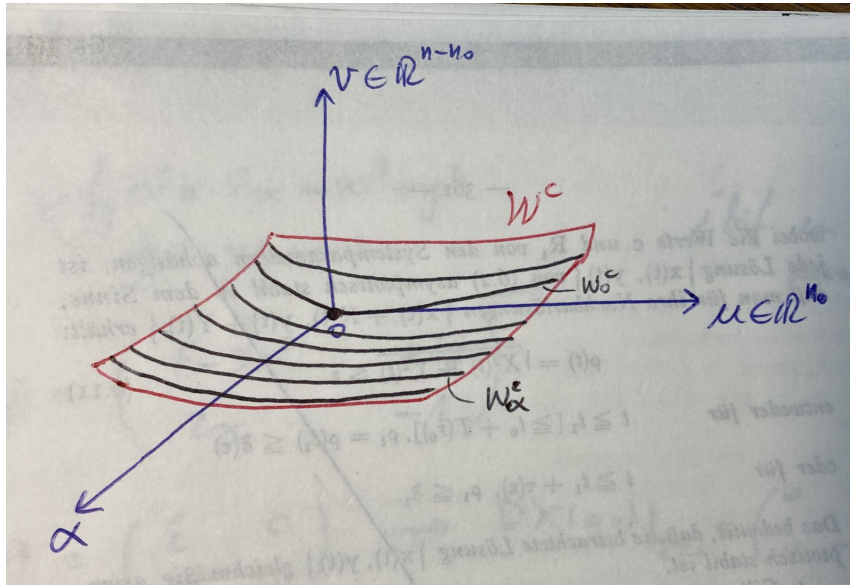


Figura 5.5:

**Lema 6** El sistema (5.8) posee una familia de variedades centrales locales  $W_\alpha^c$  que depende de un parámetro. Si  $n_+ = 0$ , cada una de estas variedades es atrayente.

**Ejemplo 23** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - x^3 + y^2, \\ \dot{y} = -y + x^2, \end{cases} \quad (5.10)$$

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La matriz jacobiana en  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  es

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, el origen es un equilibrio no-hiperbólico si  $\alpha = 0$ . ¿Qué bifurcación está ocurriendo cuando  $\alpha = 0$ ? Consideremos el sistema extendido

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x - x^3 + y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Simplemente para ser consistentes con nuestra presentación de la teoría y para efectos pedagógicos, reescribamos (5.11) en su forma normal estándar (5.6).

(De todas maneras, este ejemplo es lo suficientemente sencillo como para haber proseguido sin este paso intermedio.) De esta manera tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x - x^3 + y^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Podemos aplicar directamente la teoría de la variedad central a (5.12) para examinar la dinámica de (5.10). Por lo tanto existe una variedad estable  $W^s$  1-dimensional tangente al subespacio  $E^s = \{(x, y, \alpha) \mid x = 0, \alpha = 0\}$ , y una variedad central  $W^c$  2-dimensional tangente a  $E^c = \{(x, y, \alpha) \mid y = 0\}$ .

Podemos analizar la dinámica del sistema extendido restringiéndonos a cada una de las variedades centrales  $W_\alpha^c$  para  $\alpha$  suficientemente pequeño. Sea

$$W_\alpha^c = \{(x, y, \alpha) \mid y = \varphi(x, \alpha), x, \alpha \in (-\delta, \delta)\},$$

donde  $\varphi(0, 0) = 0$ ,  $D\varphi(0, 0) = 0$ . Derivando con respecto a  $t$  y ocupando regla de la cadena obtenemos

$$\dot{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\alpha x - x^3 + y^2).$$

Pero  $\dot{y} = -y + x^2$ , luego

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} (\alpha x - x^3 + (\varphi(x, \alpha))^2) = -\varphi(x, \alpha) + x^2.$$

Expandiendo  $\varphi$  en serie de Taylor con respecto a  $(x, \alpha)$  en  $(x_0, \alpha^*) = (0, 0)$  tenemos  $\varphi(x, \alpha) = ax^2 + bx\alpha + c\alpha^2 + \dots$ , luego

$$(2ax + b\alpha + \dots) (\alpha x - x^3 + (\varphi(x, \alpha))^2) = -(ax^2 + bx\alpha + c\alpha^2 + \dots) + x^2.$$

Igualando coeficientes de los polinomios a ambos lados de esta expresión se obtiene  $a = b = c = 0$ . Por lo tanto,  $\varphi(x, \alpha) = O(|(x, \alpha)|^3)$ . Luego, la restricción del sistema a  $W_\alpha^c$  viene dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - x^3 + (\varphi(x, \alpha))^2 = \alpha x - x^3 + O(|(x, \alpha)|^6), \\ \dot{\alpha} = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la dinámica se reduce a

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + O(|(x, \alpha)|^6), \quad x \in \mathbb{R},$$

para cada  $\alpha \in (-\delta, \delta)$  fijo. ¿Qué bifurcación crees que está sucediendo en la restricción a  $\mathcal{W}^c$  a medida que  $\alpha$  pasa por  $\alpha^* = 0$ ?

OBSERVACIONES:

1. Cada hoja  $W_\alpha^c$  también es llamada una variedad central para cada  $\alpha$  fijo.
2.  $W_0^c$  corresponde a una variedad central de (5.9) en  $\alpha = 0$  y coincide con la noción de variedad central usual para (5.8).

**Procedimiento general.** En el ejemplo anterior, la parte lineal del sistema extendido (5.12) se encontraba ya en su forma de Jordan (5.6) por lo que pudimos aplicar directamente la teoría de la variedad central para examinar la dinámica de (5.10). Claramente, esto puede que *no sea* el caso en un sistema general y queremos considerar este asunto en esta parte.

Consideremos el campo de vectores de clase  $C^r$ , (con  $r > 1$  tan grande como sea necesario):

$$\dot{z} = F(z, \alpha), \quad (z, \alpha) \in \mathbb{R}^{n_0+n_-} \times \mathbb{R}^p. \quad (5.13)$$

Supongamos que  $(z, \alpha) = (0, 0)$  es un equilibrio de (5.13) y que la matriz

$$D_z F(0, 0)$$

posee  $n_0$  valores propios con parte real y  $n_-$  valores propios con parte real negativa. Reescribamos (5.13) como expansión en serie de Taylor de (5.13) con respecto a  $(z, \alpha)$ :

$$\dot{z} = D_z F(0, 0)z + D_\alpha F(0, 0)\alpha + G(z, \alpha), \quad (5.14)$$

donde

$$G(z, \alpha) = F(z, \alpha) - D_z F(0, 0)z - D_\alpha F(0, 0)\alpha = O(|(z, \alpha)|^2).$$

Note que aparece el término “ $D_\alpha F(0, 0)\alpha$ ” en (5.14). Denotemos como

$$\begin{aligned} M &= D_z F(0, 0) && \text{matriz } (n_0 + n_-) \times (n_0 + n_-), \\ \Lambda &= D_\alpha F(0, 0) && \text{matriz } (n_0 + n_-) \times p, \end{aligned}$$

de manera que (5.14) queda como

$$\dot{z} = Mz + \Lambda\alpha + G(z, \alpha). \quad (5.15)$$

Sea  $T$  la matriz cambio de base de tamaño  $(n_0 + n_-) \times (n_0 + n_-)$  que coloca a  $M$  en su forma diagonal por bloques de Jordan

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

donde  $C$  es una matriz  $n_0 \times n_0$  con todos sus valores propios con parte real cero y  $S$  es una matriz  $n_- \times n_-$  con todos sus valores propios con parte real negativa. Haciendo entonces la transformación lineal de coordenadas

$$z = Tw, \quad w = (x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-},$$

y aplicándola a (5.15), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \bar{\Lambda}\alpha + \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ g(x, y, \alpha) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} &= T^{-1}\Lambda, \\ \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ g(x, y, \alpha) \end{pmatrix} &= T^{-1}G(T(x, y), \alpha). \end{aligned}$$

Note que  $f(0, 0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0, 0) = 0$ ,  $Df(0, 0, 0) = 0$ , y  $Dg(0, 0, 0) = 0$ . A continuación, escribamos

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_c \\ \bar{\Lambda}_s \end{pmatrix},$$

donde  $\bar{\Lambda}_c$  corresponde a las primeras  $n_0$  filas de  $\bar{\Lambda}$ , y  $\bar{\Lambda}_s$  corresponde a las últimas  $n_-$  filas de  $\bar{\Lambda}$ . Entonces, (5.15) se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \bar{\Lambda}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}_s & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \alpha) \\ 0 \\ g(x, y, \alpha) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Notemos que (5.16) tiene *casi* la forma normal estándar (5.6) para aplicar la teoría de la variedad central. El paso final sería introducir una transformación de coordenadas lineal que diagonalice por bloques la parte lineal de (5.16) en una matriz  $(n_0 + p) \times (n_0 + p)$  con todos sus valores propios con parte real cero (y  $p$  idénticamente cero) y una matriz con todos los valores propios con parte real negativa.

## 5.4. Variedades centrales en bifurcaciones de sistemas $n$ -dimensionales

Consideremos nuevamente el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

Supongamos que en  $\alpha = 0$  el sistema tiene un equilibrio no hiperbólico  $x_0 = 0$  con  $n_0$  valores propios en el eje imaginario y  $n_- + n_+ = n - n_0$  valores propios con parte real no nula. Generalizando lo realizado en la sección anterior, para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño y fijo podemos restringir el sistema (5.17) a la variedad central correspondiente  $W_\alpha^c$ . La restricción de (5.17) a  $W_\alpha^c$  es de la forma

$$\dot{u} = \Phi(u, \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

En  $\alpha = 0$  el sistema (5.18) es equivalente a la restricción de (5.17) a su variedad central  $W_0^c$  y puede ser calculada explícitamente hasta términos de cualquier orden finito para todas las bifurcaciones de codimensión uno.

El siguiente teorema nos dice que todos los *eventos esenciales* cerca de una bifurcación ocurren en la variedad invariante  $W_\alpha^c$  y son capturados por el sistema  $n_0$ -dimensional (5.18) (con  $n_0 < n$ ). Es decir, todos los eventos asociados a la bifurcación *se manifiestan* completamente en la restricción (5.18) de (5.17) a su variedad central.

**Teorema 16** *El sistema (5.17) es localmente topológicamente equivalente al sistema  $n_0$ -dimensional (5.18) acoplado con  $n_-$  direcciones hiperbólicas atrayentes y  $n_+$  direcciones hiperbólicas repulsoras adicionales. Más aún, (5.18) puede reemplazarse por cualquier otro sistema localmente topológicamente equivalente.*

**Corolario 1** *El sistema (5.17) es localmente topológicamente equivalente a la suspensión de (5.18) por la silla estándar*

$$\begin{cases} \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases}$$

donde  $(y, z) \in \mathbb{R}^{n-} \times \mathbb{R}^{n+}$ .

Un teorema similar se puede formular para sistemas dinámicos discretos y para sistemas con más de un parámetro.

**Ejemplo 24** (*Bifurcación silla-nodo genérica en  $\mathbb{R}^2$* ) Supongamos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que para  $\alpha = 0$ , el origen  $x^* = 0$  es un equilibrio con valores propios  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Entonces existe una variedad invariante atractora  $W_\alpha^c$  1-dimensional y suave para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño.

En  $\alpha = 0$  la restricción a  $W_0^c$  tiene la forma

$$\dot{u} = bu^2 + O(u^3).$$

¿Cuál es la restricción a  $W_\alpha^c$  para  $\alpha \neq 0$  pequeño? Si  $b \neq 0$  y si la ecuación restringida depende genéricamente en el parámetro  $\alpha$ , entonces la restricción a  $W_\alpha^c$  es localmente topológicamente equivalente a la forma normal topológica de la bifurcación silla-nodo

$$\dot{u} = \alpha + \sigma u^2,$$

donde  $\sigma = \text{sign}(b) = \pm 1$ . Bajo estas condiciones, el teorema anterior implica que el sistema original es localmente topológicamente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha + \sigma u^2, \\ \dot{v} = -v, \end{cases} \quad (5.19)$$

el cual es un sistema desacoplado con los retratos de fase como los de la figura 5.6. Aquí, en (5.19) podríamos tomar  $W_\alpha^c$  como la recta  $\{v = 0\}$ , es decir, estas variedades invariantes coinciden con el eje horizontal para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño. Sin embargo, podrían considerarse otras variedades centrales.



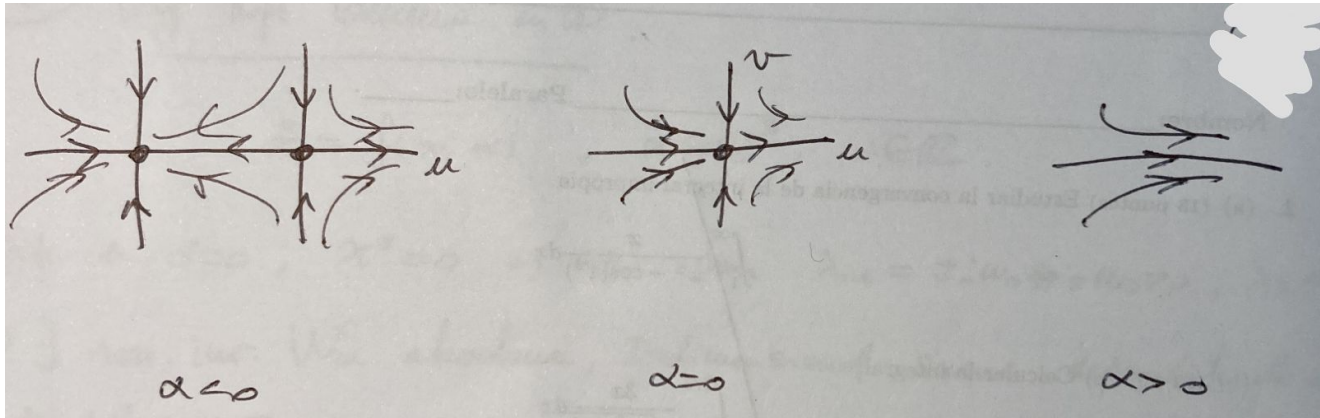


Figura 5.6: Retratos de fase de (5.19) en el caso  $\sigma > 0$ .

Los mismos eventos del sistema (5.19) ocurren en el sistema original en alguna variedad invariante 1-dimensional  $\alpha$ -dependiente, que sea localmente atrayente. Además, todos los puntos de equilibrio que participan en la bifurcación silla-nodo están contenidos en esta variedad; ver figura 5.7.

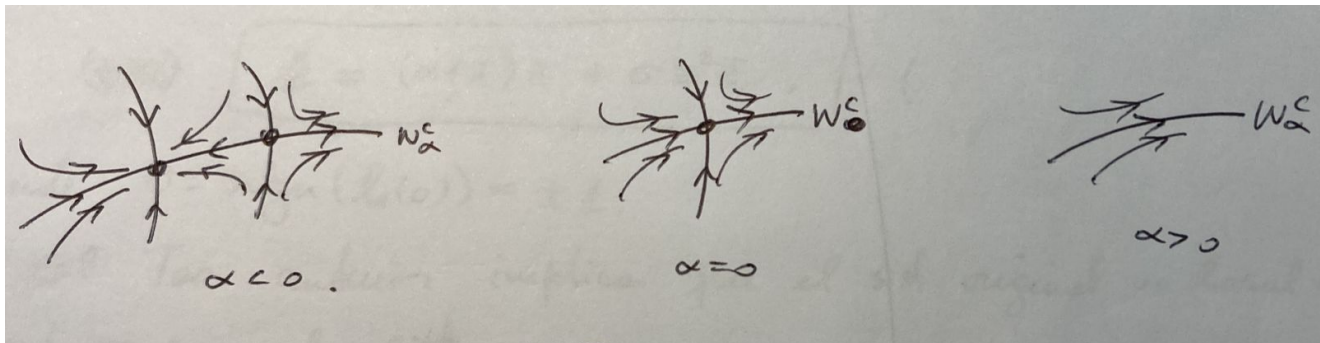


Figura 5.7: Retratos de fase de la bifurcación silla-nodo en el sistema original (5.19).

Estas figuras también explican por qué la bifurcación fold genérica también se conoce como **silla-nodo**. Los casos  $\lambda_2 > 0$  y el caso  $n$ -dimensional se pueden generalizar de manera natural.

**Ejemplo 25** (*Bifurcación de Hopf genérica en  $\mathbb{R}^3$* ) Supongamos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}.$$



Supongamos que para  $\alpha = 0$ , el origen  $x^* = 0$  es un equilibrio con valores propios  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , con  $\omega_0 > 0$ , y  $\lambda_3 < 0$ . Entonces existe una variedad invariante atrayente  $W_\alpha^c$  2-dimensional y suave para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño.

En  $\alpha = 0$  la ecuación restringida a  $W_0^c$  se puede escribir en forma compleja

$$\dot{z} = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si el coeficiente de Lyapunov  $l_1(0)$  de esta ecuación es no nulo y si la ecuación depende genéricamente en el parámetro  $\alpha$ , entonces el sistema restringido a  $W_\alpha^c$  es localmente topológicamente equivalente a la forma normal topológica

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + \sigma z^2 \bar{z},$$

donde  $\sigma = \text{sign}(l_1(0)) = \pm 1$ . Por lo tanto, el teorema anterior implica que el sistema original completo es localmente topológicamente equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = (\alpha + i)z + \sigma z^2 \bar{z}, \\ \dot{v} = -v, \end{cases}$$

con retratos de fase como los de la figura 5.8 (en el caso supercrítico, i.e, para  $\sigma < 0$ ).

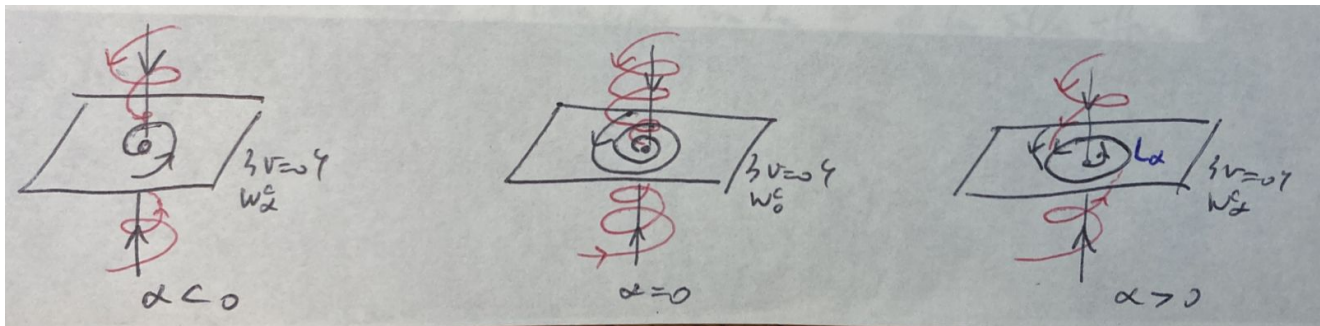


Figura 5.8: Retratos de fase de la forma normal de la bifurcación de Hopf en  $\mathbb{R}^3$  con una dirección estable adicional en el caso supercrítico, i.e, para  $\sigma < 0$ .

La bifurcación de Hopf supercrítica toma lugar en el plano invariante  $v = 0$ , el cual es atrayente. En las coordenadas originales, los mismos eventos ocurren en una variedad atrayente 2-dimensional  $W_\alpha^c$  como en la figura 5.9.

Esta construcción permite una generalización a cualquier dimensión arbitraria.

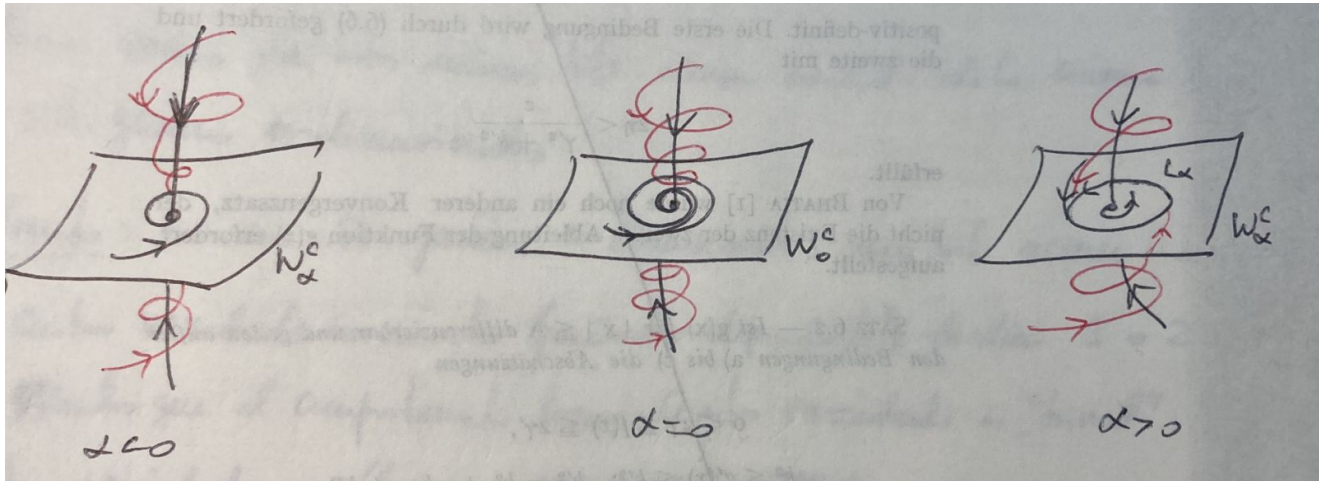


Figura 5.9: Retratos de fase de la bifurcación de Hopf en el sistema original.

COMENTARIOS.

1. En ambos ejemplos anteriores, la familia de variedades  $W_\alpha^c$  no es única. Sin embargo, todos los equilibrios y órbitas periódicas que se bifurcan pertenecen a cualquiera de las posibles variedades centrales. En el caso de la bifurcación fold, la variedad  $W_\alpha^c$  es única cerca del punto silla (siempre que exista) y coincide con su variedad inestable  $W^u$ ; la unicidad se pierde en el nodo estable; ver figura 5.7.

La figura 5.10 ilustra una representación radial del caso de la bifurcación de Hopf supercrítica para  $\alpha > 0$ . La variedad  $W_\alpha^c$  es única y coincide con la variedad inestable  $W^u$  del punto silla-foco hasta el ciclo  $L_\alpha$ , en donde se rompe la unicidad.

2. Definiciones y análisis análogos se pueden tener para bifurcaciones de puntos fijos y puntos periódicos de sistemas dinámicos discretos.

### 5.5. Bifurcaciones de ciclos límite

Las órbitas periódicas también pueden pasar por bifurcaciones. En este caso, podemos aplicar una combinación de la teoría de la variedad central y del

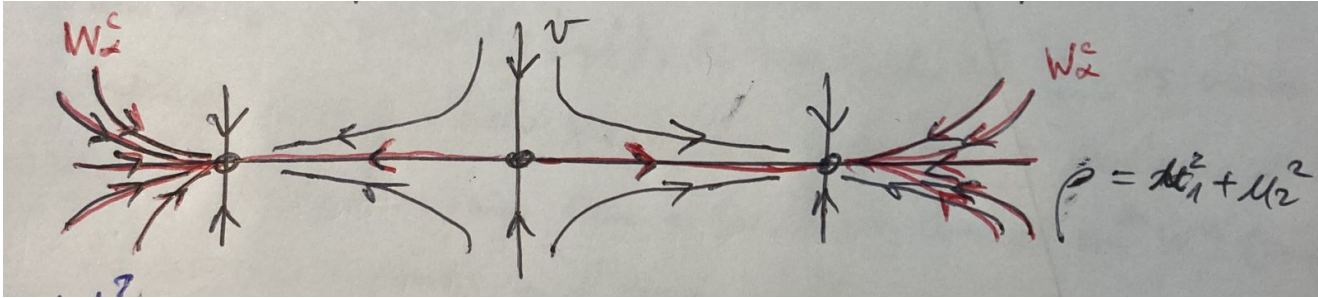


Figura 5.10: Representación radial del caso  $\alpha > 0$  para la bifurcación de Hopf supercrítica. La variedad  $W_\alpha^c$  es única y coincide con la variedad inestable  $W^u$  del punto silla-foco hasta el ciclo  $L_\alpha$ , en donde se rompe la unicidad.

mapeo de Poincaré para estudiar bifurcaciones de ciclos límite en sistemas  $n$ -dimensionales. Sea  $L_0$  una órbita periódica aislada del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

para  $\alpha = 0$ . Sea  $P_\alpha$  la aplicación de retorno de Poincaré para  $|\alpha|$  pequeño:

$$P_\alpha : \Sigma \longrightarrow \Sigma,$$

donde  $\Sigma$  es una sección transversal local a  $L_0$ . Si introducimos coordenadas locales  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$  en  $\Sigma$ , entonces  $\tilde{\xi} = P_\alpha(\xi)$  se define como el punto de la siguiente intersección con  $\Sigma$  de la órbita de  $f$  que tiene punto inicial con coordenadas  $\xi$  en  $\Sigma$ . La intersección de  $\Sigma$  con  $L_0$  nos da un punto fijo  $\xi_0$  para  $P_0$ :  $P_0(\xi_0) = \xi_0$ . Además, se puede probar que el mapeo  $P_\alpha$  es suave y localmente invertible para  $|\alpha|$  pequeño.

Supongamos que el ciclo  $L_0$  es no hiperbólico con  $n_0$  multiplicadores en el círculo unitario. Los teoremas de la variedad central nos dan una variedad invariante parámetro-dependiente  $W_\alpha^c \subset \Sigma$  de  $P_\alpha$  en la cual ocurren los eventos “esenciales”. Por simplicidad, fijemos  $n = 3$  y consideremos las principales bifurcaciones del ciclo  $L_0$ : Estas bifurcaciones vendrán dadas por bifurcaciones de puntos fijos de  $P_\alpha$ .

### 5.5.1. Bifurcación silla-nodo de ciclos

Supongamos que para  $\alpha = 0$ ,  $L_0$  tiene un multiplicador simple  $\mu_1 = 1$ . Por simplicidad, asumamos que  $0 < \mu_2 < 1$ . Entonces, la restricción de  $P_\alpha$  a la

variedad invariante  $W_\alpha^c$  es un mapeo unidimensional, que posee un punto fijo con  $\mu_1 = 1$  en  $\alpha = 0$ . Genéricamente, esto implica la colisión y desaparición de dos puntos fijos de  $P_\alpha$  a medida que  $\alpha$  pasa por cero: Una bifurcación fold en el punto fijo asociado a  $L_0$  en  $\alpha = 0$ . Bajo nuestro supuesto sobre  $\mu_2$ , este evento sucede en una variedad invariante unidimensional atrayente de  $P_\alpha$ . Luego, los puntos fijos involucrados de  $P_\alpha$  son un nodo atractor y un punto silla; ver figura 5.11. Pero cada punto fijo representa una órbita periódica del campo vectorial. Por lo tanto, dos ciclos límite (uno estable y otro silla), colisionan y desaparecen en el sistema a tiempo continuo en esta bifurcación. De esta forma, se tiene el siguiente diagrama de bifurcación de la figura 5.11. Si  $\alpha < 0$ , hay 1 ciclo hiperbólico estable  $L_1$  y un ciclo hiperbólico silla  $L_2$ . Cuando  $\alpha = 0$ , solamente hay 1 ciclo no-hiperbólico  $L_0$ . Y para  $\alpha > 0$ : No hay órbitas periódicas.

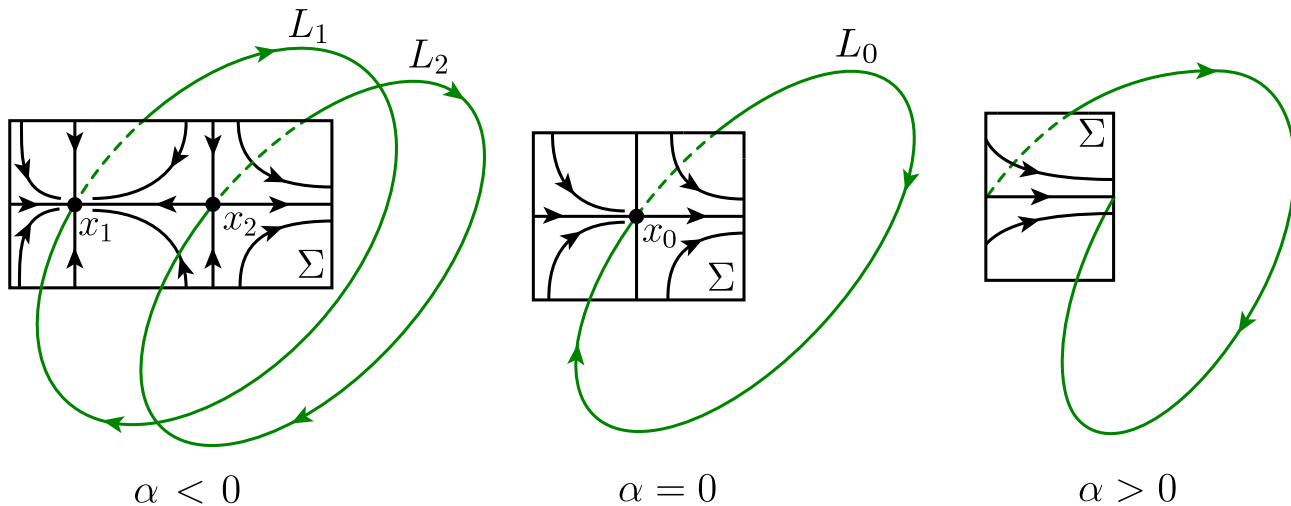


Figura 5.11: Diagrama de bifurcación silla-nodo de ciclos.

### 5.5.2. Bifurcación period-doubling de ciclos

Supongamos que para  $\alpha = 0$ ,  $L_0$  tiene un multiplicador simple  $\mu_1 = -1$ , mientras que  $-1 < \mu_2 < 0$ . Entonces la restricción de  $P_\alpha$  a la variedad invariante exhibirá genéricamente una bifurcación period-doubling (flip): Un ciclo de período 2 aparece para el mapeo, y el punto fijo cambia su estabilidad a

medida que  $\alpha$  pasa por cero; ver figura 5.12. Por ejemplo, dado que la variedad es atrayente, el punto fijo estable de  $P_\alpha$  pierde estabilidad y se transforma en una silla, mientras que aparece un punto periódico estable de período 2. El diagrama de bifurcación que emerge es el de la figura 5.12.

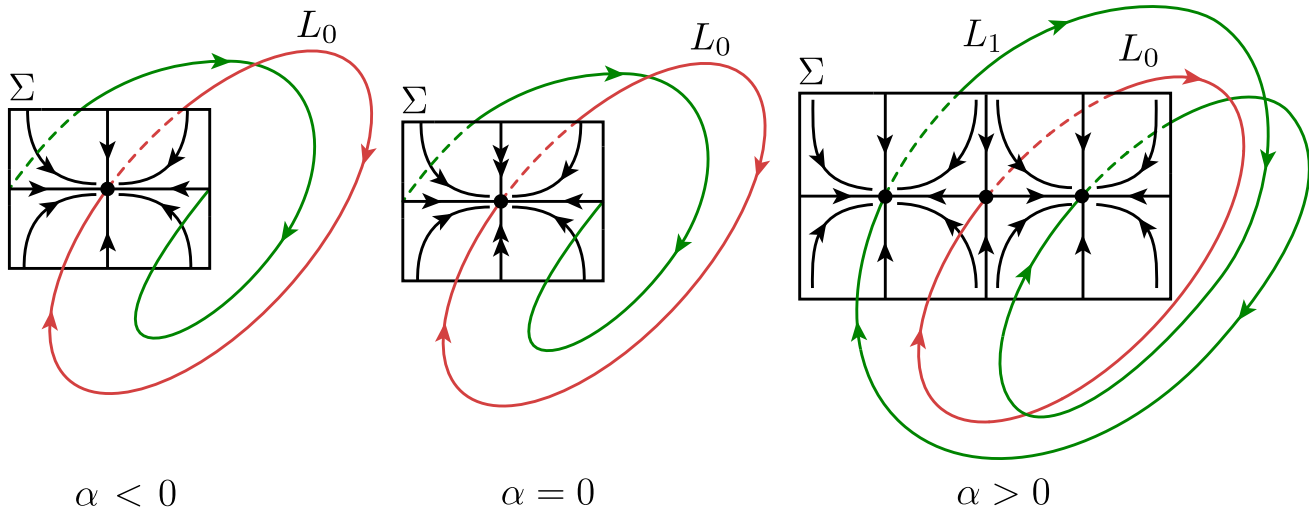


Figura 5.12: Diagrama de bifurcación period-doubling supercrítica de ciclos.

Esta bifurcación flip del mapeo de Poincaré se manifiesta en el campo de vectores de la siguiente manera. Para  $\alpha < 0$  hay 1 ciclo hiperbólico estable  $L_0$  de período  $T$ . Cuando  $\alpha = 0$  este ciclo se vuelve no-hiperbólico. Y cuando  $\alpha > 0$  hay 2 ciclos hiperbólicos:  $L_0$  es un ciclo silla de período  $T$ ; y  $L_1$  es estable con un período  $\approx 2T$ . El escenario de bifurcación exacto (i.e. súper, o subcrítica) queda determinado por los coeficientes de la forma normal de la restricción del mapeo de Poincaré  $P_\alpha$  a la variedad central en  $\alpha = 0$ .

### 5.5.3. Bifurcación Neimark-Sacker de ciclos

Supongamos que para  $\alpha = 0$ , los dos multiplicadores de  $L_0$  son complejos conjugados (y simples) y están sobre el círculo unitario:  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ . Entonces, el mapeo de Poincaré posee una variedad invariante 2-dimensional parámetro-dependiente en la cual, genéricamente, se bifurca una curva cerrada invariante desde el punto fijo; ver figura 5.13. Esta curva cerrada corresponde a un *toro*

*invariante*  $\mathbb{T}^2$  en el sistema a tiempo continuo; por ello, este evento también se conoce como *bifurcación de toro*. La bifurcación (i.e. súper, o subcrítica) está determinada por el coeficiente de la forma normal del mapeo de Poincaré restringido al valor de parámetro crítico. La estructura de órbitas en  $\mathbb{T}^2$  está determinada por la restricción de  $P_\alpha$  a esta curva cerrada invariante. Luego, genéricamente, existen ciclos de períodos largos y de diferentes tipos de estabilidad contenidos en el toro.

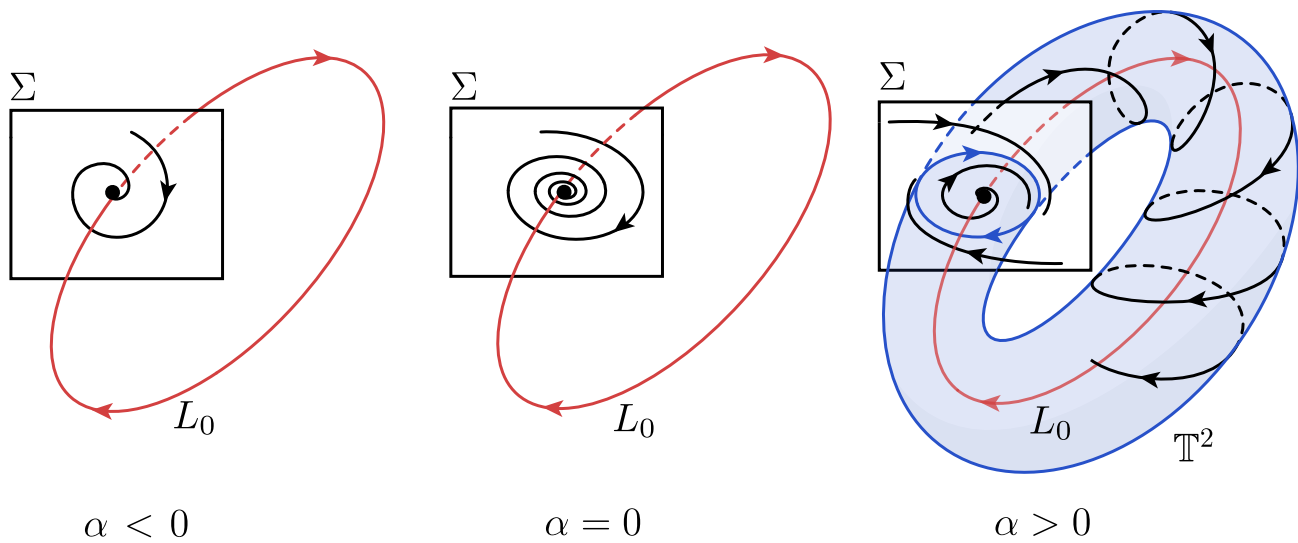


Figura 5.13: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker supercrítica de ciclos.