

Capítulo 5

Bifurcaciones de equilibrios y órbitas periódicas en sistemas n -dimensionales

Hasta ahora hemos estudiado bifurcaciones en sistemas genéricos a un parámetro que ocurren en espacios de fase de la *menor dimensión posible*. Ahora veremos que estas mismas bifurcaciones ocurren esencialmente de la misma manera en sistemas genéricos n -dimensionales: todos los “eventos” asociados a una bifurcación ocurren en ciertas variedades invariantes (parámetro-dependientes) de dimensión 1 o 2, mientras que el comportamiento fuera de estas variedades es “trivial”, i.e., la dinámica es contractiva, o bien, expansiva. En otras palabras, esto nos permite reducir la dimensión de un sistema dado cerca de una bifurcación local al restringir el análisis a una variedad invariante apropiada. Estas variedades invariantes que capturan la esencia de las bifurcaciones en dimensiones mayores se llaman *variedades centrales* y son el primer tema de estudio en este capítulo.

5.1. Variedades centrales en sistemas a tiempo continuo

Comencemos con el *caso crítico*, i.e., al momento de una bifurcación local. Asumimos que los parámetros del sistema están fijos en sus valores de bifurcación, los cuales son aquellos valores para los cuales existe un equilibrio (o punto fijo) no hiperbólico. Aunque en este curso nos enfocaremos en el caso de sistemas a tiempo continuo, es posible obtener de manera similar los mismos conceptos y resultados para el caso discreto.

Considere un sistema dinámico a tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

donde X es un campo de vectores de clase C^r , $r \geq 2$, y $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Asumamos que los valores propios de $A = DX(\mathbf{0})$ son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y supongamos que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es un equilibrio no hiperbólico. Sean las siguientes cantidades:

- n_+ = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.
- n_0 = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.
- n_- = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Sea E^c el espacio propio (generalizado) de A asociado a los n_0 valores propios ubicados en el eje imaginario. Los valores propios con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ a veces se dicen *críticos*, al igual que el espacio propio E^c . Por último denotemos por φ^t al flujo asociado a (5.1). Bajo estas hipótesis tenemos el siguiente teorema.

Teorema 12 (*Teorema de la variedad central*) *Existe una variedad invariante, denotada por $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$, suave, n_0 -dimensional, definida localmente cerca de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, y tangente a E^c en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Más aún, existe una vecindad U de u_0 tal que si $\varphi^t(\mathbf{x}) \in U$ para todo $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$), entonces*

$$\varphi^t(\mathbf{x}) \rightarrow W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) \quad \text{para } t \rightarrow \infty \quad (\text{resp. } t \rightarrow -\infty).$$

Definición 19 *La variedad $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ del teorema anterior se llama **variedad central del equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$** .*

OBSERVACIONES.

1. $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ se puede extender globalmente al resto del espacio de fase al dejar evolucionar los puntos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ bajo el flujo. La variedad central global resultante se denota por $W^c(\mathbf{0})$.

2. La segunda afirmación del teorema dice que una órbita que se queda cerca del equilibrio para $t \geq 0$ (o $t \leq 0$) tiende hacia $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ en la correspondiente dirección del tiempo. Si por ejemplo $n_+ = 0$ y todas las órbitas en U permanecen en U para siempre, entonces $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es *atrayente*. Es decir, la variedad central *captura* toda la dinámica del sistema completo en una vecindad de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. En particular, si cerca de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ hay...

- otros equilibrios,
- órbitas periódicas,
- conexiones homo/heteroclínicas,

entonces todos estos elementos deben estar contenidos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

Por ejemplo, la figura 5.1 muestra la variedad central de un equilibrio no hiperbólico en el caso de una bifurcación fold en \mathbb{R}^2 y una bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3 . Todos los equilibrios y órbitas periódicas que se bifurquen al perturbar genéricamente estos sistemas estarán contenidos en una respectiva variedad central.

Exploremos con más detalle los resultados mencionados en las observaciones anteriores sobre el caso particular en que $n_+ = 0$. Supongamos que el campo de vectores (5.1) viene escrito en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

donde F representa los términos no lineales, i.e., $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $DF(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. La matriz P de vectores propios generalizados de A transforma A a su forma diagonal por bloques $J = P^{-1}AP$, donde

$$J = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Aquí, la matriz C tiene tamaño $n_0 \times n_0$ y todos sus valores propios tienen parte real nula; y la matriz S tiene tamaño $n_- \times n_-$ y todos sus valores propios tienen parte real negativa. Además, si A es diagonalizable, J es una matriz diagonal. Entonces definamos las nuevas coordenadas $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$ de manera que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= P^{-1}A\mathbf{x} + P^{-1}F(\mathbf{x}) = P^{-1}AP\mathbf{u} + P^{-1}F(P\mathbf{u}) \\ &= J\mathbf{u} + P^{-1}F(P\mathbf{u}). \end{aligned}$$

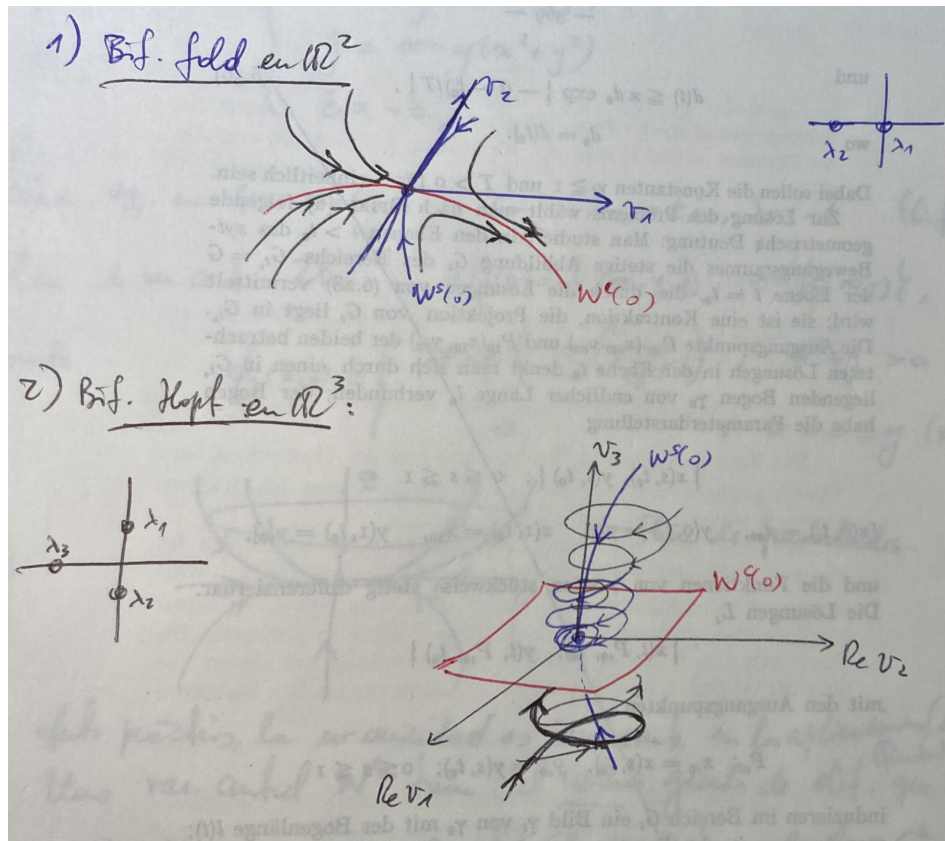


Figura 5.1:

Ahora definamos $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-}$. En términos de estos dos subconjuntos de variables, la EDO ahora toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, y), \\ \dot{y} = Sy + g(x, y), \end{cases} \quad (5.3)$$

donde $(f, g)^t = P^{-1} \circ F \circ P$. Las funciones f y g son de clase C^r , $r \geq 2$, y satisfacen $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) = 0$ y $Dg(0, 0) = 0$. En este marco, el espacio propio E^c corresponde al hiperplano $E^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} : y = 0\}$, mientras que $E^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} : x = 0\}$.

Según el teorema 12, una variedad invariante de (5.3) será una variedad central si puede ser representada localmente como sigue:

$$W_{loc}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que las condiciones $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ implican que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es tangente a E^c en $(0, 0)$. Más aún, dado que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante, la dinámica de (5.3) restringida a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ está dada por el campo n_0 -dimensional

$$\dot{u} = Cu + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}. \quad (5.4)$$

Este es un campo definido sobre la gráfica de la función $y = h(x)$ y corresponde a la restricción de (5.3) a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

El siguiente teorema implica que la dinámica de (5.4) cerca de $u = 0$ determina la dinámica de (5.3) cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 13 (*Estabilidad*)

- i) Supongamos que $u = 0$ en el sistema (5.4) es estable (o asintóticamente estable) (resp. inestable). Entonces el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ es también estable (o asintóticamente estable) (resp. inestable).*
- ii) Supongamos que $u = 0$ en el sistema (5.4) es estable. Si $(x(t), y(t))$ es una solución de (5.3) con $(x(0), y(0))$ suficientemente cerca de $(0, 0)$, entonces existe una solución $u(t)$ de (5.4) tal que cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene:*

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + O(e^{-\gamma t}), \\ y(t) = h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}), \end{cases}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

La parte ii) del teorema anterior es equivalente a lo que se enuncia en el teorema 12: Para condiciones iniciales del sistema completo (5.3) suficientemente cerca del origen, las órbitas se acercan asintóticamente a una órbita de la variedad central. En este caso la variedad es “atrayente”. Como consecuencia, si existen otros puntos de equilibrio suficientemente cerca de $(0, 0)$ u órbitas periódicas cerca de $(0, 0)$, éstos deben estar contenidos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

¿Cómo obtenemos una representación de $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ (i.e., de la función h) para poder beneficiarnos de estos teoremas? Como $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante bajo (5.4),

vamos a derivar una EDP que la función h debe satisfacer. Derivando la ecuación $y = h(x)$ con respecto a t obtenemos:

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}.$$

Sustituyendo $y = h(x)$ en (5.3):

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h(x)), \\ \dot{y} = Sh(x) + g(x, h(x)), \end{cases}$$

o bien,

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h(x)), \\ Dh(x)\dot{x} = Sh(x) + g(x, h(x)). \end{cases}$$

De aquí obtenemos:

$$Dh(x)(Cx + f(x, h(x))) = Sh(x) + g(x, h(x)).$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{N}(h(x)) := Dh(x)(Cx + f(x, h(x))) - Sh(x) - g(x, h(x)) = 0. \quad (5.5)$$

Esta es una EDP que $h(x)$ debe satisfacer para que su gráfica sea una variedad central. Sin embargo, probablemente es más difícil resolver esta EDP que nuestro problema original. Afortunadamente, el siguiente teorema nos da un método para calcular una solución aproximada de la EDP.

Teorema 14 (*Aproximación*) Sea $\phi : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-}$ una función C^1 con $\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = 0$, tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = O(|x|^q)$, cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces,

$$|h(x) - \phi(x)| = O(|x|^q),$$

cuando $x \rightarrow 0$.

Este teorema nos permite calcular la variedad central hasta cualquier grado deseado de precisión al resolver la ecuación (5.5) en una expansión polinomial hasta el mismo grado de precisión deseado.

Ejemplo 18 Considere el campo de vectores

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y - x^5, \\ \dot{y} = -y + x^2, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El origen es un equilibrio cuya matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. Luego, $(0, 0)$ es no hiperbólico. En particular, no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman para determinar la dinámica en una vecindad del origen.

Notemos que el sistema ya tiene la forma (5.3). Sabemos que existe la variedad central $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$, la cual puede ser aproximada localmente como sigue:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que $E^c = \langle(1, 0)\rangle$. Supongamos que $h(x)$ tiene la forma

$$y = h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4),$$

donde a, b son coeficientes por determinar. Luego,

$$Dh(x) = h'(x) = 2ax + 3bx^2 + O(x^3).$$

Por otro lado, el sistema tiene la forma general

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Luego, al restringir esta ecuación a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = \frac{Q(x, h(x))}{P(x, h(x))},$$

si $P(x, y) \neq 0$. Luego, la ecuación (5.5) queda expresada como

$$\mathcal{N}(h(x)) = h'(x)P(x, h(x)) - Q(x, h(x)) = 0,$$

o equivalentemente,

$$(2ax + 3bx^2 + O(x^3))(ax^4 + bx^5 - x^5 + O(x^6)) + ax^2 + bx^3 - x^2 + O(x^4) = 0.$$

Se desprende que los coeficientes de cada potencia de x deben todos anularse. Así,

- Para x^2 : $a - 1 = 0$. Luego, $a = 1$.
- Para x^3 : $b = 0$.
- etc.

Por lo tanto,

$$h(x) = x^2 + O(x^4).$$

La restricción del campo de vectores a $W^c(\mathbf{0})$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u^2 h(u) - u^5 \\ &= u^2 (u^2 + O(u^4)) - u^5. \end{aligned}$$

Luego, la dinámica unidimensional sobre $W^c(\mathbf{0})$ está definida por:

$$\dot{u} = u^4 + O(u^5).$$

Para u suficientemente pequeño y $u \neq 0$, se tiene $\dot{u} > 0$. Luego, en \mathbb{R}^2 el retrato de fase en una vecindad del origen es como en la figura 5.2. El origen posee un sector atractor ($x < 0$) y dos sectores hiperbólicos ($x > 0$). Además, $(0, 0)$ es inestable en sentido Lyapunov.

OBSERVACIONES.

1. El teorema 13 de estabilidad implica que las órbitas que convergen a $(0, 0)$ lo hacen tangentes a $W^c(\mathbf{0})$ tal como se ilustra en la figura 5.2.
2. En general, no es posible aproximar $W^c(\mathbf{0})$ mediante su linealización E^c . En el ejemplo anterior, supongamos que asumimos $h(x) \equiv 0$, i.e., $W^c(\mathbf{0}) = E^c$. Luego, la restricción del campo a $E^c = \{y = 0\}$ es $\dot{u} = -u^5$. Para este campo unidimensional, el origen es asintóticamente estable; luego, el sistema completo 2D también tendría en $(0, 0)$ un equilibrio atractor, lo cual es una conclusión errónea a la luz de los resultados del ejemplo.

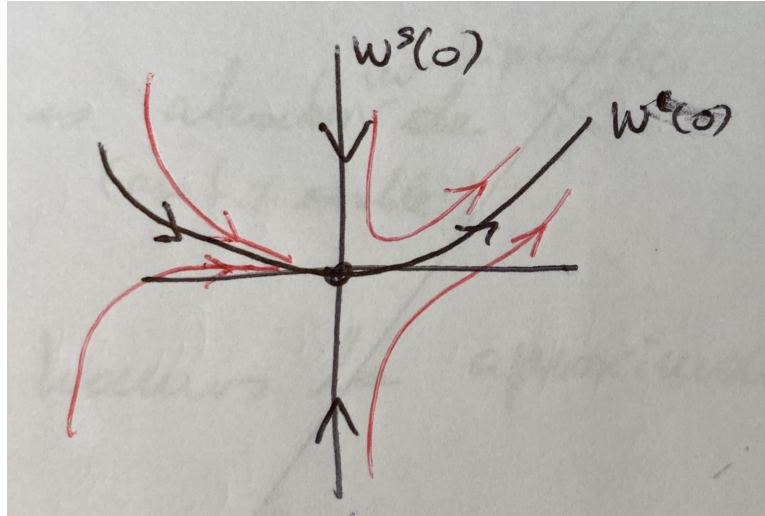


Figura 5.2:

3. $W^c(\mathbf{0})$ podría no ser única. El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

tiene un equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ con $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. El sistema posee una familia de variedades centrales —mostradas en la Figura 5.3:

$$W_\beta^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) : y = \psi_\beta(x)\},$$

donde

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} \beta \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{para } x < 0, \\ 0 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

4. Una variedad central W^c tiene el mismo grado de suavidad *finita* que el campo (5.1) (si $X \in C^k$ con k finito, W^c es también una C^k -variedad) en alguna vecindad U del equilibrio. Sin embargo, a medida que $k \rightarrow \infty$ la vecindad U puede achicarse, resultando en la no existencia de una variedad W^c de clase C^∞ para algunos sistemas C^∞ .
5. El método de aproximación de $W^c(\mathbf{0})$ mediante series de potencias también se puede ocupar para hallar aproximaciones locales de las variedades estable

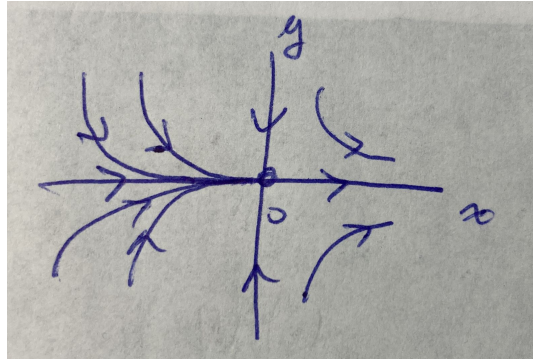


Figura 5.3:

W^s e inestable W^u de un equilibrio. Por ejemplo, para el sistema (5.3), la variedad estable local del origen queda expresada como:

$$W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : x = h(y), |y| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Es decir, $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0})$ es localmente la gráfica de una función sobre E^s . De esta manera, podemos buscar h de la forma: $h(y) = ay^2 + by^3 + cy^4 + O(y^5)$, donde los coeficientes a, b, c son tales que: $\dot{x} = Dh(y)\dot{y}$, es decir,

$$Dh(y) (Sy + g(h(y), y)) = Ch(y) + g(h(y), y).$$

Ejemplo 19 Consideremos el sistema general

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que el origen es un equilibrio no hiperbólico cuya matriz jacobiana posee los valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ con vectores propios asociados $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 0)$. Luego, existe una variedad central tangente a la recta $E^c = \{(x, y) | y = x\}$ en $(0, 0)$ como en la Figura 5.4.

Por definición:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, h'(0) = 1\},$$

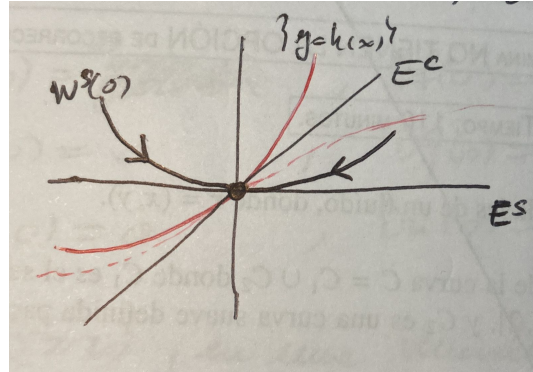


Figura 5.4:

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que la condición $h'(0) = 1$ asegura que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es tangente a E^c en el origen. Busquemos $h(x)$ de la forma

$$y = h(x) = ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4),$$

donde a, b, c son coeficientes por determinar. Notemos que $h(0) = 0$ se satisface trivialmente, mientras que $h'(0) = 1$ si y solo si $a = 1$. Luego procedemos igual que en los ejemplos anteriores para hallar los coeficientes b, c . Es decir, planteamos

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = \frac{Q(x, h(x))}{P(x, h(x))},$$

de donde obtenemos que

$$(1 + 2bx + 3cx^2 + O(x^3))P(x, h(x)) - Q(x, h(x)) = 0.$$

Igualando los coeficientes de cada potencia a cero encontramos los valores de b, c . Posteriormente, podemos analizar la restricción del sistema a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ y determinamos la (in)estabilidad de $x = 0$.

5.2. Inclusión de direcciones inestables

Supongamos que tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, y, z), \\ \dot{y} = Sy + g(x, y, z), \\ \dot{z} = Uz + h(x, y, z), \end{cases} \quad (5.6)$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$, donde $f(0, 0, 0) = 0$, $g(0, 0, 0) = 0$, $h(0, 0, 0) = 0$, $Df(0, 0, 0) = 0$, $Dg(0, 0, 0) = 0$ y $Dh(0, 0, 0) = 0$, y $f, g, h \in C^r$, $r \geq 2$, en una vecindad del origen. Aquí, la matriz C tiene tamaño $n_0 \times n_0$ y todos sus valores propios tienen parte real nula; la matriz S tiene tamaño $n_- \times n_-$ y todos sus valores propios tienen parte real negativa; y la matriz U tiene tamaño $n_+ \times n_+$ y todos sus valores propios tienen parte real positiva. Luego, el origen posee una variedad central $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ n_0 -dimensional, una variedad estable $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0})$ n_- -dimensional y una variedad inestable $W_{\text{loc}}^u(\mathbf{0})$ n_+ -dimensional.

La variedad central puede representarse localmente como el gráfico de una función suave

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+} : y = h_1(x), z = h_2(x), |x| < \delta, h_i(0) = 0, Dh_i(0) = 0, i = 1, 2\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. El campo (5.6) restringido a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ queda de la forma

$$\dot{u} = Cu + f(u, h_1(u), h_2(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}.$$

Dado que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante bajo (5.6) obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} = Dh_1(x)\dot{x} = Sh_1(x) + g(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{z} = Dh_2(x)\dot{x} = Uh_2(x) + h(x, h_1(x), h_2(x)), \end{cases}$$

lo cual nos lleva a las siguientes ecuaciones para h_1 y h_2 :

$$\begin{cases} Dh_1(x)(Cx + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Sh_1(x) - g(x, h_1(x), h_2(x)) = 0, \\ Dh_2(x)(Cx + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Uh_2(x) - h(x, h_1(x), h_2(x)) = 0. \end{cases}$$

Al igual que en el caso $n_+ = 0$, podemos resolver este sistema de EDPs en forma aproximada a través de expansiones en series de potencias.

Teorema 15 (*Principio de reducción*) *El sistema (5.6) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} = Sy, \\ \dot{z} = Uz. \end{cases} \quad (5.7)$$

Si hay más de una variedad central, entonces todos los sistemas resultantes (5.7) con diferentes (h_1, h_2) son localmente equivalentes.

Notemos que las ecuaciones en (5.7) están desacopladas. La primera ecuación es la restricción de (5.6) a su variedad central. Luego, la dinámica del sistema estructuralmente inestable (5.6) queda determinada por esta restricción pues las ecuaciones para (y, z) en (5.7) son lineales y tienen soluciones exponencialmente crecientes/decrecientes. En otras palabras, gracias al Principio de Reducción, el problema de analizar (5.6) cerca del origen se *reduce* de dimensión pues depende esencialmente solo del primer subsistema en (5.7), el cual es de menor dimensión (n_0 -dimensional, de hecho) que el sistema completo.

Las últimas componentes de (5.7) se pueden reemplazar por la ecuación de una *silla estándar*:

$$\begin{cases} \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases}$$

donde $(y, z) \in \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$. Por lo tanto, el Principio de Reducción se puede expresar en forma equivalente como: “Cerca de un equilibrio no hiperbólico, el sistema es localmente topológicamente equivalente a la *suspensión* de su restricción a la variedad central por la silla estándar.”