

Capítulo 4

Bifurcaciones locales de codimensión uno en sistemas dinámicos discretos

Consideremos un sistema dinámico a tiempo discreto

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es suave con respecto a (x, α) . Sea x_0 un punto fijo hiperbólico para $\alpha = \alpha_0$, es decir,

- $x_0 = f(x_0, \alpha_0)$,
- $D_x f(x_0, \alpha_0)$ no tiene valores propios en el círculo unitario.

A medida que variamos el parámetro α podemos monitorear la coordenada x_0 del punto fijo y sus valores propios μ_1, \dots, μ_n . Al igual que en el caso continuo, las bifurcaciones más simples ocurren cuando x_0 pierde hiperbolicidad, es decir, cuando hay un valor propio, digamos μ_1 , con $|\mu_1| = 1$, i.e., sobre el círculo unitario en el plano complejo. Geométricamente hay 3 formas en que esto pueda ocurrir y se muestran en la figura 4.1.

Definición 18 (a) *La bifurcación asociada con la aparición de $\mu_1 = 1$ se llama **bifurcación fold o tangente**. También es conocida como **bifurcación Limit Point (LP) y Silla Nudo (SN)**.*

(b) *La bifurcación asociada con la aparición de $\mu_1 = -1$, es una **bifurcación flip o duplicación de período** (“*period-doubling*” en inglés).*

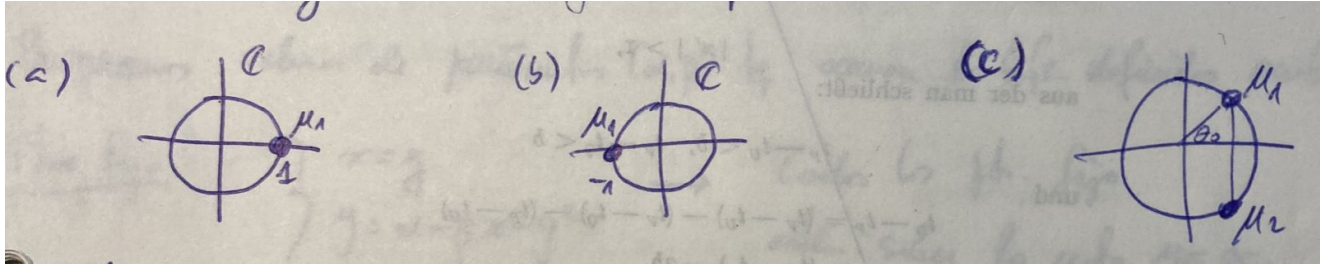


Figura 4.1:

(c) La bifurcación asociada a la presencia de un par de valores propios complejos conjugados con módulo 1, $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$, se llama **bifurcación Neimarck-Sacker** o **bifurcación de toro**.

Notemos que los casos (a) y (b) pueden ocurrir en sistemas discretos de dimensión $n \geq 1$, mientras que para que ocurra el caso (c) es necesario que $n \geq 2$. Todos estos casos son bifurcaciones de codimensión 1, siempre que se satisfagan ciertas condiciones de no-degeneración. Un punto fijo satisfaciendo cualquiera de las condiciones de arriba es estructuralmente inestable.

Ejemplo 15 Bifurcaciones en el mapeo de Hénon.

Consideremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}.$$

Busquemos valores de parámetros (α, β) tales que ocurra alguna de las bifurcaciones estudiadas en esta sección (Omitiremos por ahora la verificación de las condiciones de genericidad, pero se sugiere su completación como tarea).

Los puntos fijos satisfacen $x = y$, $y = \alpha - \beta x - y^2$. Luego, todos los puntos fijos están sobre la recta $y = x$. Además, la coordenada y de un punto fijo satisface $y^2 + (1 + \beta)y - \alpha = 0$. Por lo tanto, el sistema posee a lo más dos puntos fijos.

La matriz Jacobiana del sistema viene dada por

$$A(x, y; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -2y \end{pmatrix}.$$

Para que ocurra una bifurcación silla-nodo se debe satisfacer $\det(A - I) = 0$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 . Así, A tendrá un valor propio 1. Esto nos lleva a la ecuación $1 + \beta + 2y = 0$. Luego, el sistema algebraico

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0, \\ 1 + \beta + 2y &= 0, \end{aligned}$$

en las incógnitas (α, β) nos da el conjunto de valores de (α, β) para los cuales hay una bifurcación silla-nodo. Al resolver obtenemos

$$T = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4} \right\},$$

la cual representa una curva en el plano (β, α) a lo largo de la cual existe un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = 1$.

Similarmente, la condición para la bifurcación flip se puede escribir como $\det(A + I) = 0$, la cual lleva a $1 + \beta - 2y = 0$. Luego, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0, \\ 1 + \beta - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando y , obtenemos que el mapeo tiene un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = -1$ cuando los parámetros están en la curva

$$f = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4} \right\}.$$

Finalmente, para analizar la ocurrencia de una bifurcación Neimarck-Sacker, notemos que el producto de los multiplicadores de la forma $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm i\theta_0)$ es $\mu_1\mu_2 = 1 = \det(A)$, que es equivalente a la ecuación $1 - \beta = 0$. El diagrama de bifurcación resultante en el plano (β, α) muestra las tres curvas de bifurcación obtenidas.

Sin embargo, notemos que la curva de bifurcación Neimarck-Sacker está acotada por las curvas f y T , esto es,

$$NS = \{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 1, -1 < \alpha < 3 \}.$$

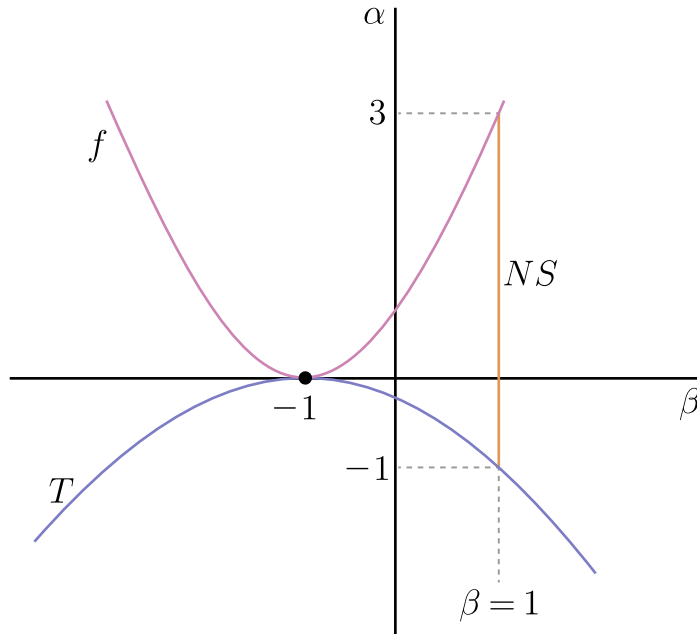


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación del mapeo de Hénon.

La razón es que una bifurcación Neimarck-Sacker solo puede considerarse cuando *exista* un punto fijo. Luego, esto ocurre para valores de (β, α) arriba de la curva T , i.e., para $\alpha > -1$ si $\beta = 1$. Además, notemos que la condición $\mu_1\mu_2 = 1$ también es válida para multiplicadores reales de la forma $\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = \frac{1}{\nu}$, $|\nu| > 1$, $\nu \in \mathbb{R}$. En ese caso, el punto fijo sería de tipo silla y no podría pasar por una bifurcación Neimarck-Sacker. Esto impone la condición extra $\alpha < 3$ si $\beta = 1$.

Habiendo podido hallar explícitamente el diagrama de bifurcación en el ejemplo anterior, quedan pendientes las preguntas: ¿Cuáles son los posibles retratos de fase para valores de parámetros en las regiones abiertas en el plano (β, α) ? ¿Cómo cambia el retrato de fase al atravesar una u otra curva de bifurcación? En las siguientes secciones responderemos estas preguntas y daremos las formas normales topológicas de estas bifurcaciones.

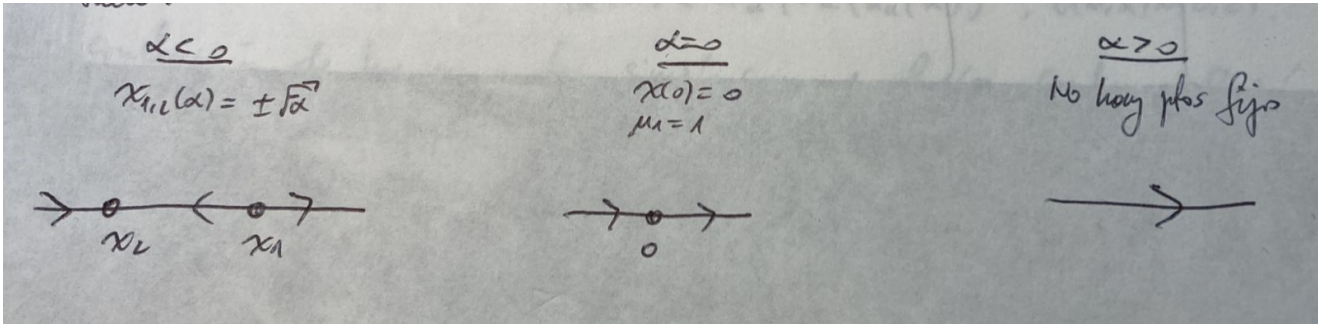


Figura 4.3:

4.1. Bifurcación fold

Considere el siguiente sistema dinámico discreto unidimensional

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 =: f(x, \alpha) = f_\alpha(x). \quad (4.1)$$

El mapeo $f_\alpha(x)$ es invertible para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad del origen. Para $\alpha = 0$ hay un punto fijo no hiperbólico en $x_0 = 0$ con valor propio $\mu = f_x(0, 0) = 1$. Se obtienen las dinámicas de la figura 4.3 para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad del origen. Si $\alpha < 0$, existen dos puntos fijos en $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, donde x_1 es repulsor y x_2 es atractor. A medida que α tiende a cero por la izquierda, los puntos fijos $x_{1,2}(\alpha)$ se acercan y, en el límite cuando $\alpha = 0$, colisionan en $x_0 = 0$, el cual es semiestable. Para $\alpha > 0$, ya no hay puntos fijos.

El diagrama de bifurcación resultante en el plano (x, α) se muestra en la figura 4.4. La ecuación $x - f(x, \alpha) = 0$ define una variedad de puntos fijos dada, en este caso, por $\alpha = -x^2$. En definitiva, el fenómeno es completamente análogo a la bifurcación fold del caso continuo. El caso $x \mapsto \alpha + x - x^2$ es similar; el análisis revela que los dos puntos fijos existen para $\alpha > 0$.

Ahora agreguemos términos de orden superior a (4.1):

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 + x^3\psi(x, \alpha) =: F_\alpha(x), \quad (4.2)$$

donde $\psi(x, \alpha)$ depende de forma suave en (x, α) . Para $|\alpha|$ suficientemente pequeño el número y la estabilidad de los puntos fijos es el mismo que en (4.1) en una vecindad de $x = 0$. Luego es posible construir una conjugación topológica local entre

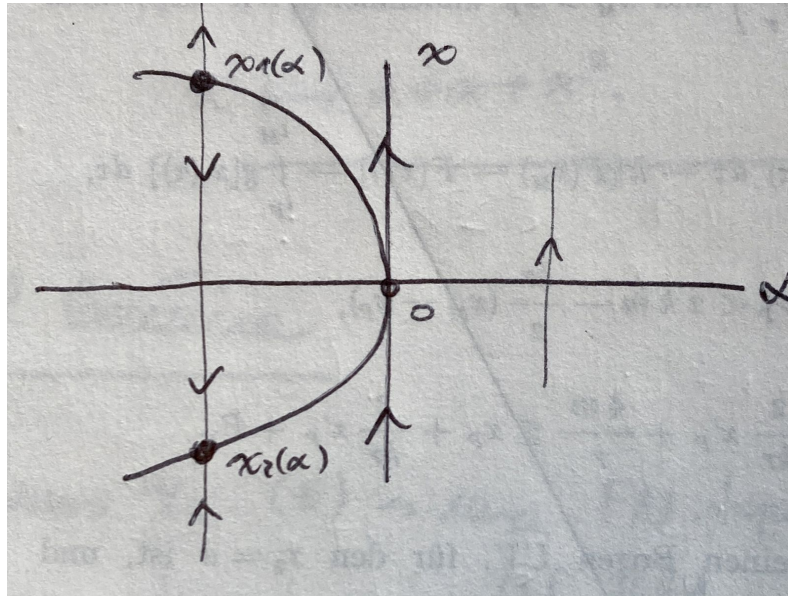


Figura 4.4:

(4.1) y (4.2), esto es, un homeomorfismo h_α de una vecindad de $x = 0$ mapeando órbitas de (4.1) en órbitas de (4.2) para cada $|\alpha|$ pequeño: $f_\alpha = h_\alpha^{-1} \circ f_\alpha \circ h_\alpha$, para todo (x, α) cerca de $(0, 0)$. Sin embargo, la construcción de h_α no es tan simple como en el caso continuo. La razón es que un homeomorfismo que mapee puntos fijos de (4.1) en puntos fijos de (4.2) no necesariamente mapea órbitas en órbitas. De todas formas se tiene el siguiente resultado.

Lema 4 *El sistema*

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 + O(x^3)$$

es localmente topológicamente conjugado cerca del origen al sistema

$$x \mapsto \alpha + x + x^2.$$

Ahora probaremos que (4.1) es una forma normal topológica de un sistema unidimensional discreto genérico que tenga una bifurcación fold.

Teorema 9 *Supongamos un sistema unidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave, el cual posee en $\alpha = 0$ un punto fijo $x_0 = 0$, y sea

$$\mu = f_x(0, 0) = 1.$$

Además, suponga que se cumplen las siguientes condiciones de no-degeneración:

$$(G) f_{xx}(0, 0) \neq 0;$$

$$(T) f_\alpha(0, 0) \neq 0.$$

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a alguna de las siguientes formas normales topológicas:

$$y \mapsto \beta + y \pm y^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Expandemos $f(x, \alpha)$ en una serie de Taylor con respecto a x en $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3).$$

Por hipótesis se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- $f_0(0) = f(0, 0) = 0$ (el origen es un punto fijo);
- $f_1(0) = f_x(0, 0) = 1$ (ocurre una bifurcación fold).

Luego podemos escribir:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + [1 + g(\alpha)]x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde $g(\alpha)$ es suave y $g(0) = 0$.

A continuación hacemos una traslación de coordenadas $\xi = x + \delta$, donde $\delta = \delta(\alpha)$ se debe determinar. Sea $\tilde{x} = f(x, \alpha)$ la imagen de x . Luego:

$$\tilde{\xi} = \tilde{x} + \delta = f(x, \alpha) + \delta = f(\xi - \delta, \alpha) + \delta.$$

Expandiendo esta última expresión con respecto a ξ y escribiendo a su vez cada coeficiente como expansión en δ se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= f_0(\alpha) + [1 + g(\alpha)](\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + O(\xi^3) + \delta \\ &= f_0(\alpha) - g(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3) \\ &\quad + \xi + [g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi \\ &\quad + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3). \end{aligned}$$

Asumiendo que $f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0) \neq 0$, entonces existe una función suave $\delta(\alpha)$ que aniquila los términos $g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)$ en el coeficiente de orden 1 de la expansión anterior para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, esto es,

$$F(\alpha, \delta) := g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\varphi(\alpha, \delta) = 0,$$

para alguna función suave φ . Se tiene:

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \delta}(0,0) = -2f_2(0) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = g'(0),$$

lo que implica la existencia y unicidad de $\delta = \delta(\alpha)$ tal que $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) \equiv 0$. Entonces,

$$\delta(\alpha) = \frac{g'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2),$$

para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Luego,

$$\tilde{\xi} = [f'_0(0)\alpha + \alpha^2\psi(\alpha)] + \xi + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3),$$

donde ψ es una función suave y donde hemos expandido cada coeficiente en términos de α .

Sea el nuevo parámetro $\mu = \mu(\alpha) = f'_0(0)\alpha + \alpha^2\psi(\alpha)$, esto es, el término constante en la expresión para $\tilde{\xi}$. Tenemos:

1. $\mu(0) = 0$;
2. $\mu'(0) = f'_0(0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)$. (Recordemos que $f_0(\alpha) = f(0, \alpha)$.)

Luego si asumimos que $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = f'_\alpha(0,0) \neq 0$, entonces el teorema de la función inversa implica que localmente existe una única función inversa $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\tilde{\xi} = \mu + \xi + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3),$$

donde $b(\mu)$ es una función suave con $b(0) = f_2(0) \neq 0$.

Ahora sean $\eta = |b(\mu)|\xi$ y $\beta = |b(\mu)|\mu$, y obtenemos el sistema topológicamente equivalente

$$\tilde{\eta} = \beta + \eta + s\eta^2 + O(\eta^3),$$

donde $s = \text{sign}(b(0)) = \pm 1$. Finalmente el resultado se completa al aplicar el lema anterior.

4.2. Bifurcación flip

Considere el sistema dinámico unidimensional

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha).$$

El mapeo f es invertible para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño en una vecindad del origen. Además $x_0 = 0$ es un punto fijo con valor propio $\mu = -(1 + \alpha)$. En particular, para $|\alpha|$ suficientemente pequeño se cumple: Si $\alpha < 0$, x_0 es estable; si $\alpha > 0$ x_0 es inestable; y si $\alpha = 0$, x_0 es no-hiperbólico con valor propio $\mu = -1$. Notemos que no hay otros puntos fijos cerca de $x_0 = 0$ para $|\alpha|$ pequeño. ¿Adónde convergen entonces las órbitas para $\alpha > 0$ cuando x_0 es inestable?

Consideremos la segunda iteración $f^2(x, \alpha)$. Sea $y = f(x, \alpha)$. Entonces:

$$\begin{aligned} f^2(x, \alpha) &= f(y, \alpha) = -(1 + \alpha)y + y^3 \\ &= -(1 + \alpha) \left(-(1 + \alpha)x + x^3 \right) + \left(-(1 + \alpha)x + x^3 \right)^3 \\ &= (1 + \alpha)^2 x - \left((1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2) \right) x^3 + O(x^5). \end{aligned}$$

En el conjunto de puntos fijos de $f^2(x, \alpha)$ podemos hallar al origen $x_0 = 0$ (obviamente) y a otros dos puntos fijos no triviales para $\alpha > 0$ pequeño al resolver la ecuación

$$x_{1,2} = f^2(x_{1,2}, \alpha),$$

obteniendo los valores $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$. Los puntos fijos $x_{1,2}(\alpha)$ son ambos estables y forman una órbita de período 2 de $f(x, \alpha)$, es decir,

$$x_2 = f(x_1, \alpha), \quad x_1 = f(x_2, \alpha), \quad x_1 \neq x_2.$$

La figura 4.5 muestra cómo cambia la gráfica de $f^2(x, \alpha)$ a medida que α cruza el valor $\alpha = 0$ y la aparición de $x_{1,2}(\alpha)$ para $\alpha > 0$.

Toda esta información la podemos reunir en un solo diagrama de bifurcación como el de la figura 4.6. En el eje horizontal se ubica el punto fijo $x_0 = 0$, el cual cambia de estabilidad en $\alpha = 0$. La parábola $x = f^2(x, \alpha)$ representa las coordenadas del ciclo estable $\{x_1, x_2\}$ de período 2 para $\alpha > 0$. Luego, es natural hacer una analogía con la bifurcación de Hopf del caso continuo; de hecho, para este diagrama de bifurcación hablamos de una *bifurcación flip supercrítica*.

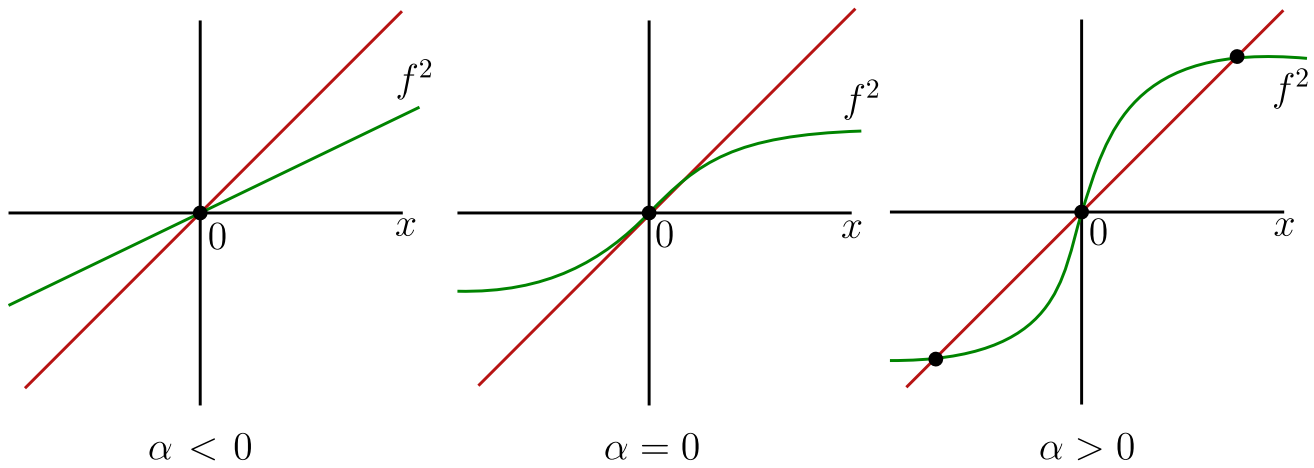


Figura 4.5: Forma cualitativa de f^2 cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

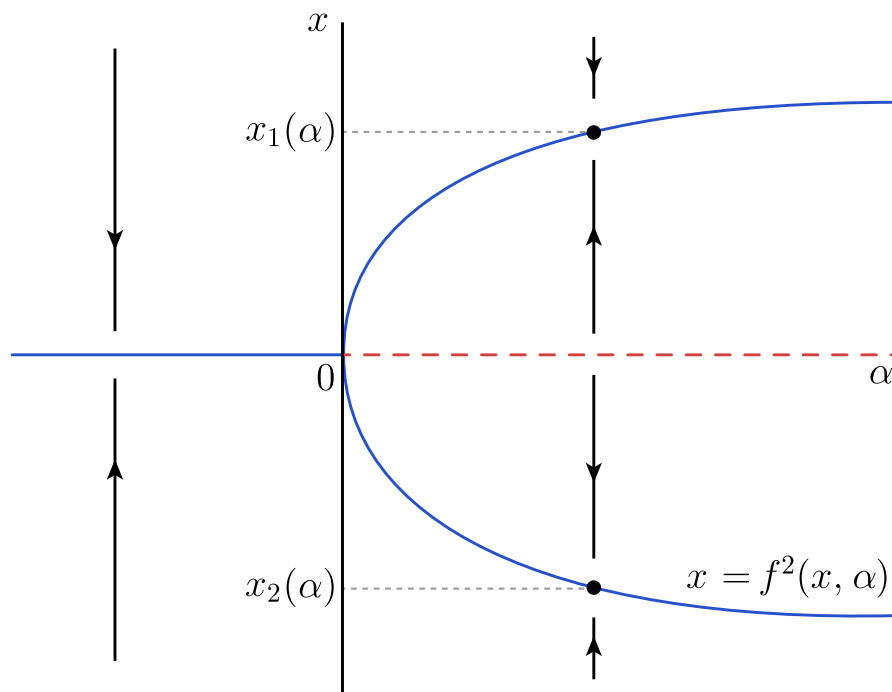


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación $x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3$ cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Similarmente a lo visto en la sección anterior para la bifurcación fold discreta, en este caso también podemos probar un resultado que indica que agregar térmi-

nos de orden superior a $f(x, \alpha)$ no altera la topología del diagrama de bifurcación ni de las órbitas en el espacio de fase. El análisis del punto fijo y del ciclo de período 2 en el siguiente lema es simple, pero el resto de la demostración no lo es aunque puede verse en las referencias.

Lema 5 *El sistema*

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 + O(x^4)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3.$$

El caso $x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3$ se puede tratar de manera análoga. El diagrama de bifurcación resultante es como el de la figura 4.7. Aquí los puntos de período 2 son inestables y existen para $\alpha < 0$; por ello uno habla de una *bifurcación flip subcrítica*.

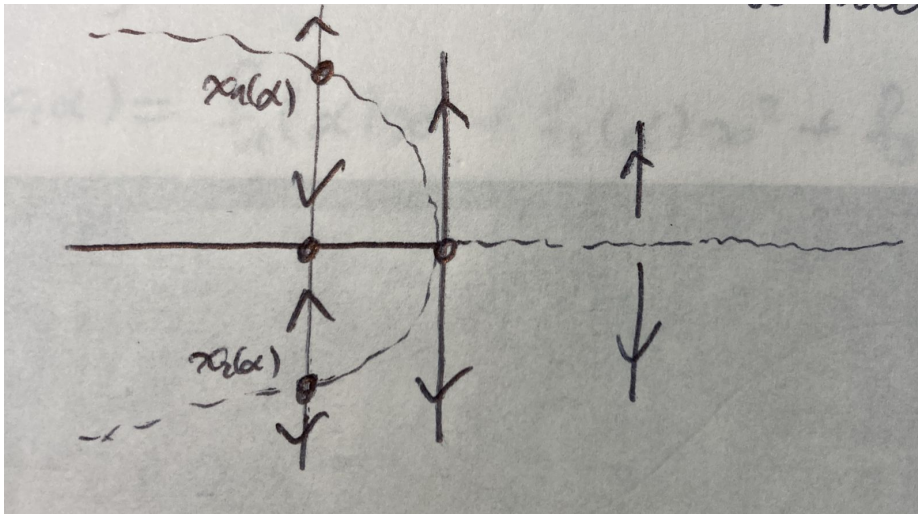


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación $x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3$ cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Teorema 10 *Suponga que el sistema unidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave, posee en $\alpha = 0$ un punto fijo $x_0 = 0$, y sea

$$\mu = f_x(0, 0) = -1.$$

Además, suponga que se cumplen las siguientes condiciones de no-degeneración:

$$(G) \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3} f_{xxx}(0, 0) \neq 0;$$

$$(T) f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0.$$

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a alguna de las siguientes formas normales topológicas:

$$y \mapsto -(1 + \beta)y \pm y^3.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de la función implícita el sistema tiene un único punto fijo $x_0(\alpha)$ en alguna vecindad del origen para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, pues $f_x(0, 0) \neq 1$. Podemos trasladar este equilibrio al origen y asumir, sin pérdida de generalidad, que $x_0 = 0$ es el punto fijo del sistema para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Luego, podemos escribir,

$$f(x, \alpha) = f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4),$$

donde $f_1(\alpha) = -(1 + g(\alpha))$, para alguna función g suave. Dado que $g(0) = 0$ y $g'(0) = f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0$, la función g es localmente invertible y podemos definir un nuevo parámetro $\beta = g(\alpha)$.

Si llamamos

$$\mu(\beta) = -(1 + \beta),$$

se tiene

$$\tilde{x} = f(x, \beta) = \mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3 + O(x^4),$$

donde las funciones $a(\beta)$ y $b(\beta)$ son suaves. Tenemos :

$$a(0) = f_2(0) = f_{xx}(0, 0), \quad b(0) = \frac{1}{6} f_{xxx}(0, 0).$$

Definamos el cambio de coordenadas:

$$x = \varphi(y) := y + \delta y^2,$$

donde $\delta = \delta(\beta)$ es una función suave por definir. Esta transformación es invertible cerca del origen y su inversa φ^{-1} se puede hallar por el método de los coeficientes indeterminados obteniendo:

$$y = \varphi^{-1}(x) := x - \delta x^2 + 2\delta^2 x^3 + O(x^4).$$

Busquemos una expresión para el mapeo en las nuevas coordenadas, esto es, $\bar{f}(y) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(y)$. Se tiene:

$$\tilde{y} = \bar{f}(y, \beta) = \mu y + (a + \delta\mu - \delta\mu^2)y^2 + (b + 2\delta a - 2\delta\mu(\delta\mu + a) + 2\delta^2\mu^3)y^3 + O(y^4).$$

Luego, el término cuadrático se puede eliminar para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño al tomar

$$\delta(\beta) = \frac{a(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)},$$

pues $\mu^2(0) - \mu(0) = 2 \neq 0$. Luego,

$$\tilde{y} = \bar{f}(y, \beta) = \mu y + \left(b + \frac{2a^2}{\mu^2 - \mu}\right)y^3 + O(y^4) = -(1 + \beta)y + c(\beta)y^3 + O(y^4).$$

Aquí $c = c(\beta)$ es una función suave tal que

$$c(0) = a^2(0) + b(0) = \frac{1}{4}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0) \neq 0.$$

Por lo tanto, aplicando el reescalamiento

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{|c(\beta)|}},$$

se tiene en la coordenada η :

$$\tilde{\eta} = -(1 + \beta)\eta + s\eta^3 + O(\eta^4),$$

donde $s = \text{sign}(c(0)) = \pm 1$. El resultado sigue al aplicar el lema anterior.

Ejemplo 16 Considere la ecuación de Ricker:

$$x_{k+1} = \alpha x_k e^{-x_k},$$

donde x_k representa la densidad de una población en el año k . El parámetro $\alpha > 0$ es la tasa de crecimiento, y el término e^{-x_k} representa el rol negativo de competencia interespecie a altas poblaciones.

Sea $f(x, \alpha) = \alpha x e^{-x}$. Este sistema siempre posee el punto fijo trivial $x_0 = 0$ para todo α . En $\alpha_0 = 1$ aparece un punto fijo positivo no-trivial:

$$x_1(\alpha) = \ln(\alpha), \quad \alpha \geq 1.$$

El valor propio de $x_1(\alpha)$ es $\mu(\alpha) = 1 - \ln(\alpha)$. Luego, x_1 es estable para $1 < \alpha < \alpha_1$, e inestable para $\alpha > \alpha_1$, donde $\alpha_1 = e^2 \approx 7,38907$. En $\alpha = \alpha_1$ se tiene $\mu(\alpha_1) = -1$ y ocurre una bifurcación flip en $x(\alpha_1) = 2$.

Verifiquemos las condiciones de no-degeneración al evaluar las derivadas parciales en $(x, \alpha) = (2, e^2)$:

- $c(\alpha_1) = \frac{1}{6} > 0$.
- $f_{x\alpha} = -\frac{1}{e^2} \neq 0$.

Por lo tanto, aparece un único ciclo de período 2 desde x_1 para $\alpha > \alpha_1$. La estabilidad de $x(\alpha_1)$ para $\alpha = \alpha_1$ determina si la bifurcación es supercrítica o subcrítica. Más aún se puede probar que este ciclo pierde estabilidad en $\alpha_2 \approx 12,50925$ en una nueva bifurcación flip que le ocurre a f^2 . Esto genera un ciclo estable de período 4, el cual nuevamente se bifurca en $\alpha_4 \approx 14,24425$ dando paso a un ciclo de período 8, el cual pierde estabilidad en $\alpha_8 \approx 14,65267$. Es decir, a medida que α crece, el conjunto límite atractor va *duplicando su período* en una secuencia de bifurcaciones flip en f, f^2, f^4 , etc. En el proceso, cada punto fijo o ciclo ya existente va perdiendo estabilidad y se vuelve repulsor, y en su reemplazo aparece un ciclo atractor del *doble de período*. A medida que α crece, se obtienen ciclos de período 8, 16, etc.

Este proceso genera una *cascada de duplicación de período*: una secuencia infinita de bifurcaciones flip en los valores $\alpha_{m(k)}$, con $m(k) = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, donde $m(k)$ es el período del ciclo que se bifurca a la k -ésima duplicación. El diagrama de bifurcación resultante es como en la figura 4.8.

La sucesión $\alpha_{m(k)}$ converge a un cierto valor α_∞ para el cual todas las (infinitas) órbitas periódicas existentes son inestables y se genera dinámica caótica. El conjunto invariante resultante pasa de ser un conjunto finito de puntos a un

conjunto infinito, pero confinado al intervalo compacto. Una órbita típica nunca se asienta ni en un punto fijo ni en una órbita periódica, sino que su comportamiento en el largo plazo es aperiódico. Cada una de esas órbitas aperiódicas es densa en un compacto y su comportamiento cualitativo es “errático”. Este proceso gobernado por una secuencia de bifurcaciones flip se conoce como *ruta al caos por duplicación de período*. Este es uno de los caminos “universales” al caos y se puede hallar en muchos sistemas.

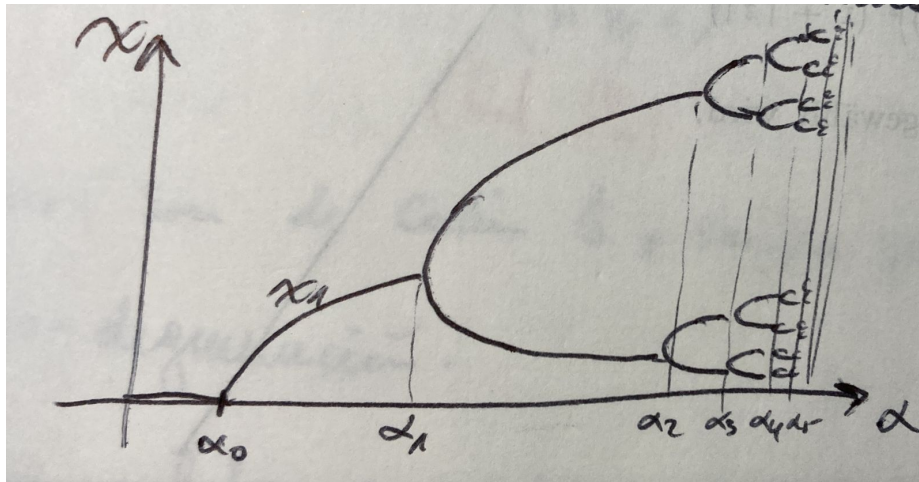


Figura 4.8: Cascada de duplicación de período en la ecuación de Ricker.

4.3. Bifurcación Neimark-Sacker

Consideremos el siguiente sistema discreto bidimensional que depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el parámetro; $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ y $d = d(\alpha)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$, $d(0) \neq 0$. El sistema (4.3) tiene un punto fijo $(x_1, x_2) = (0, 0)$ para

todo α , con matriz Jacobiana

$$A = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y valores propios $\mu_{1,2} = (1 + \alpha) \exp(\pm i\theta)$. Luego, el mapeo (4.3) es invertible cerca del origen para todo $|\alpha|$ pequeño. Más aún, cuando $\alpha = 0$, se tiene $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$, con $|\mu_{1,2}| = 1$; luego, el origen es un punto fijo no-hiperbólico.

Introduciendo una variable compleja $z = x_1 + ix_2$, y reescribiendo (4.3) en notación polar $z = \rho \exp(i\varphi)$, luego de un poco de operatoria obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho(1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2) + R_\alpha(\rho), \\ \varphi \mapsto \varphi + \theta(\alpha) + Q_\alpha(\rho), \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $R_\alpha(\rho) = O(\rho^4)$ y $Q_\alpha(\rho) = O(\rho^2)$ son funciones suaves de (ρ, α) . Notemos que el mapeo para ρ es independiente de ϕ y define un sistema dinámico con un punto fijo en $\rho = 0$ para todo α . Este punto fijo es estable si $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. En la transición, cuando $\alpha = 0$, la estabilidad del origen depende del signo del coeficiente $d(0)$. En lo que sigue, supongamos que $d(0) < 0$; en tal caso, el origen es un punto fijo estable no-hiperbólico si $\alpha = 0$. Además, si $\alpha > 0$, en una vecindad del origen, el mapeo para ρ posee otro punto fijo dado por

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} + O(\alpha). \quad (4.5)$$

Por continuidad, tenemos que $d(\alpha) < 0$ y ρ_0 es estable para todo $|\alpha|$ pequeño.

Por otro lado, el mapeo para φ describe una rotación por un ángulo que depende de φ y θ ; y es aproximadamente igual a $\theta(\alpha)$. Luego, al superponer los dos mapeos en ρ y φ , obtenemos el diagrama de bifurcación de la figura 4.9 para (4.3): Para $\alpha < 0$, el origen es un punto fijo atractor; las órbitas espiralean hacia $(0, 0)$. Para $\alpha > 0$ aparece un círculo invariante aislado de radio $\rho(\alpha)$ dado en (4.5). Esta curva invariante es única y atrayente. Todas las órbitas que comienzan afuera o adentro de la curva invariante cerrada, excepto el origen, tienden a la curva bajo iteraciones de (4.3). Decimos que el sistema pasa por una *bifurcación Neimarck-Sacker supercrítica*.

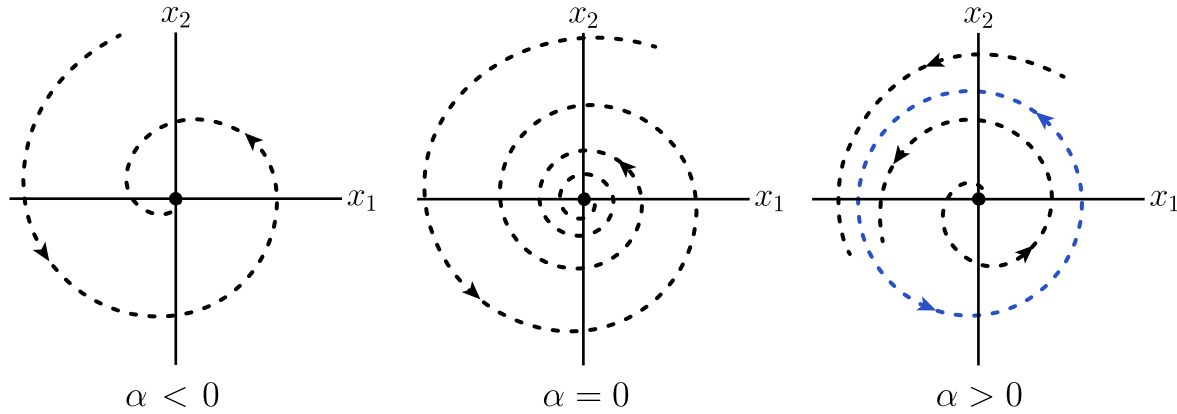


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker supercrítica ($d(0) < 0$).

La bifurcación también puede presentarse en el espacio (x_1, x_2, α) . La familia de curvas cerradas invariantes que aparece, parametrizada por α , forma una superficie paraboloides.

El caso $d(0) > 0$ se puede analizar de la misma forma: Existe una curva invariante cerrada inestable que desaparece cuando α cruza el cero desde los valores negativos a los positivos como en la figura 4.10. En tal caso, uno habla de una *bifurcación Neimark-Sacker subcrítica*. Al igual que con las bifurcaciones de Hopf y flip, el tipo de bifurcación (supercrítica o subcrítica) está determinado por la estabilidad del punto fijo en el valor de bifurcación del parámetro.

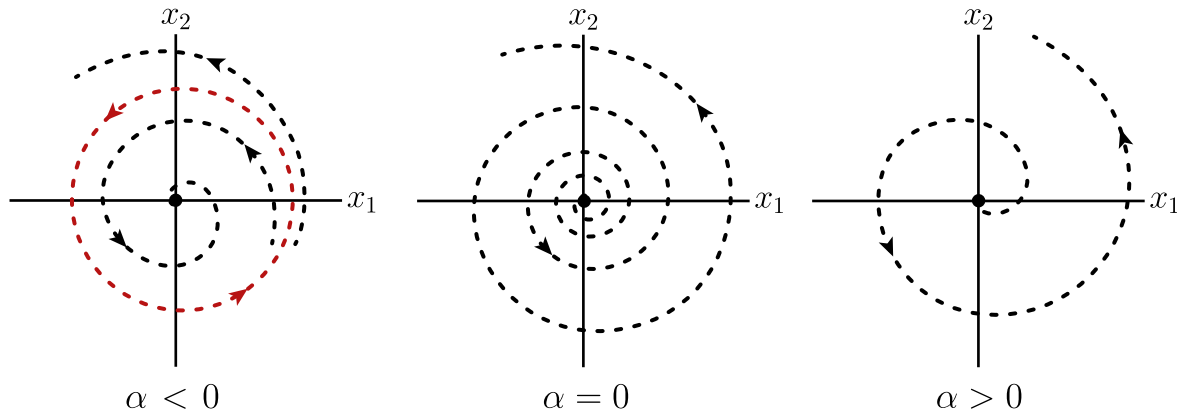


Figura 4.10: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker subcrítica ($d(0) > 0$).

La estructura de órbitas de (4.4) en el círculo invariante depende de si la razón entre el ángulo de rotación $\Delta\varphi = \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho)$ y 2π es racional o irracional en el círculo. Si es racional, *todas* las órbitas en la curva son *periódicas*. Más precisamente, si

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q}$$

con enteros p y q , todos los puntos en la curva cerrada son ciclos de período q de la p -ésima iteración del mapeo. Por el contrario, si la razón es un número irracional, no hay órbitas periódicas y todas las órbitas son densas en el círculo.

Ahora agreguemos términos de orden superior al sistema (4.3). Por ejemplo, podemos pensar que (4.3) es una versión truncada de un mapeo que contiene términos de orden superior ($\|x\|^4$), los cuales dependen suavemente de α . En tal caso, sobre la curva invariante que se bifurca podrían haber puntos fijos y puntos periódicos. La existencia y estabilidad de estos puntos (i.e., el retrato de fase concreto del sistema restringido a la curva invariante) depende de estos términos de orden superior que no están presentes en (4.3). Por lo tanto, dos sistemas distintos exhibiendo una misma bifurcación Neimarck-Sacker podrían no ser topológicamente equivalentes. Este hecho impide obtener una forma normal para esta bifurcación. Sin embargo, de todas maneras podemos enunciar el siguiente teorema que nos asegura que estos términos ($\|x\|^4$) no afectan la bifurcación de la curva cerrada invariante en (4.3). Es decir, una curva invariante localmente única se bifurca del origen en la misma dirección y con la misma estabilidad que en (4.3).

Teorema 11 (*Bifurcación Neimarck-Sacker*) *Consideremos un sistema dinámico bidimensional*

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f suave. Supongamos que para valores de α cerca de α^ el sistema posee un punto fijo $x(\alpha)$ cuya coordenada depende de α ; en particular, sea $x_0 = x(\alpha^*)$ y expresemos los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x(\alpha), \alpha)$ en la forma*

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha) \exp(\pm i\varphi(\alpha)).$$

Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(B1) \quad f(x_0, \alpha^*) = x_0;$$

(B2) $Df(x_0, \alpha^*)$ tiene un par de multiplicadores complejos conjugados sobre el círculo unitario $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm i\theta_0)$, ($r(\alpha^*) = 1, \varphi(\alpha^*) = \theta_0$);

$$(G1) \quad \frac{d}{d\alpha} r(\alpha^*) \neq 0;$$

$$(G2) \quad \exp(ik\theta_0) \neq 1, \text{ para } k = 1, 2, 3, 4.$$

Entonces, existe un cambio de coordenadas suave e invertible (difeomorfismo) y un cambio de parámetros suave e invertible que transforman el sistema, en una vecindad de (x_0, α^*) , en

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &\mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &+ (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4), \end{aligned}$$

donde $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ y $d = d(\alpha)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$. Más aún, $\theta(\alpha^*) = \theta_0$ y $d(\alpha^*) = \operatorname{Re}(\exp(-i\theta_0)c_1(\alpha^*))$ (donde $c_1(\alpha^*)$ posee una fórmula que puede buscarse en textos sobre bifurcaciones!)

Si además, $d(\alpha^*) \neq 0$ (i.e., $c_1(\alpha^*) \neq 0$), entonces, existe una vecindad de x_0 en la cual se bifurca una única curva cerrada invariante desde x_0 a medida que α pasa por α^* .

Ejemplo 17 (Bifurcación Neimark-Sacker en la ecuación logística con retardo)
Considere la siguiente ecuación en recurrencia:

$$u_{k+1} = ru_k(1 - u_{k-1}).$$

Este es un modelo simple de dinámica poblacional, donde u_k representa la densidad de una población en el tiempo k , y r es la tasa de crecimiento. Aquí se asume que el crecimiento está determinado no solo por la densidad poblacional actual (u_k) sino también por su densidad en el pasado (u_{k-1}).

Si introducimos $v_k = u_{k-1}$, la ecuación se puede reescribir como

$$\begin{cases} u_{k+1} = ru_k(1 - v_k), \\ v_{k+1} = u_k, \end{cases}$$

lo cual, a su vez, define el sistema dinámico discreto bidimensional

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx_1(1-x_2) \\ x_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1(x, r) \\ F_2(x, r) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$. El mapeo (4.6) tiene el punto fijo $(0, 0)^T$ para todos los valores de r . Para $r > 1$ aparece un punto fijo positivo no trivial x^0 en las coordenadas

$$x_1^0 = x_2^0 = 1 - \frac{1}{r}.$$

La matriz jacobiana de (4.6) evaluada en x^0 viene dada por

$$A(r) = \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y tiene valores propios

$$\mu_{1,2}(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - 4}.$$

Si $r > \frac{5}{4}$, los valores propios son complejos y $|\mu_{1,2}|^2 = \mu_1\mu_2 = r - 1$. Por lo tanto, en $r = r_0 = 2$ el punto fijo no trivial pierde estabilidad y tenemos una bifurcación Neimark-Sacker. Los valores propios en r_0 son

$$\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Luego, es claro que las condiciones (G1) y (G2) del teorema anterior se satisfacen. Utilizando las fórmulas para $d(r_0)$ disponibles en textos avanzados de teoría de bifurcaciones, es posible obtener $d(r_0) = -2 < 0$. Por lo tanto, una única curva invariante cerrada estable se bifurca desde el punto fijo no trivial para $r > 2$.