

### 3.2. Bifurcación de Hopf

Considere el sistema planar visto inicialmente en el ejemplo 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (3.8)$$

con  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Este sistema posee un equilibrio en el origen  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  para todo  $\alpha$ . La matriz jacobiana asociada es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

con valores propios  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ . Claramente, para  $\alpha = 0$ , este equilibrio es no hiperbólico; para  $\alpha < 0$ , el origen es un foco estable, y para  $\alpha > 0$  es foco inestable, por lo que está ocurriendo una bifurcación en  $\alpha = 0$ .

Introduciendo coordenadas polares  $\rho = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ , se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

el cual se puede extender continuamente a  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Notemos que las ecuaciones para  $\rho$  y  $\varphi$  son desacopladas. Luego, es fácil analizar las soluciones y las bifurcaciones. A partir de la primera ecuación de (3.9) vemos que  $\rho = 0$  es un equilibrio linealmente estable para  $\alpha < 0$  y no linealmente estable (i.e., la convergencia no es exponencial) para  $\alpha = 0$ ; mientras que para  $\alpha > 0$  el origen es linealmente inestable y el punto  $\rho = \sqrt{\alpha}$  es atractor; ver figura 3.4.

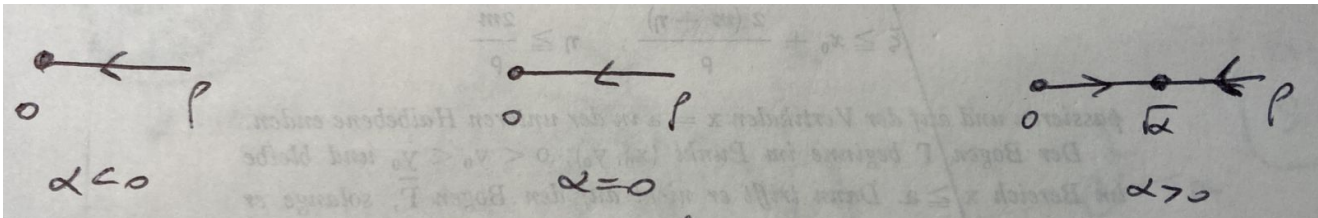


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación para  $\rho$  en (3.9).

Por otro lado, la ecuación  $\dot{\varphi} = 1$  describe una rotación a velocidad constante. Al superponer los movimientos independientes definidos por las dos ecuaciones de

(3.9) obtenemos los retratos de fase de la figura 3.5. De esta manera, para  $\alpha > 0$  descubrimos que existe un ciclo límite estable de radio constante  $\sqrt{\alpha}$  rodeando al foco inestable en el origen.

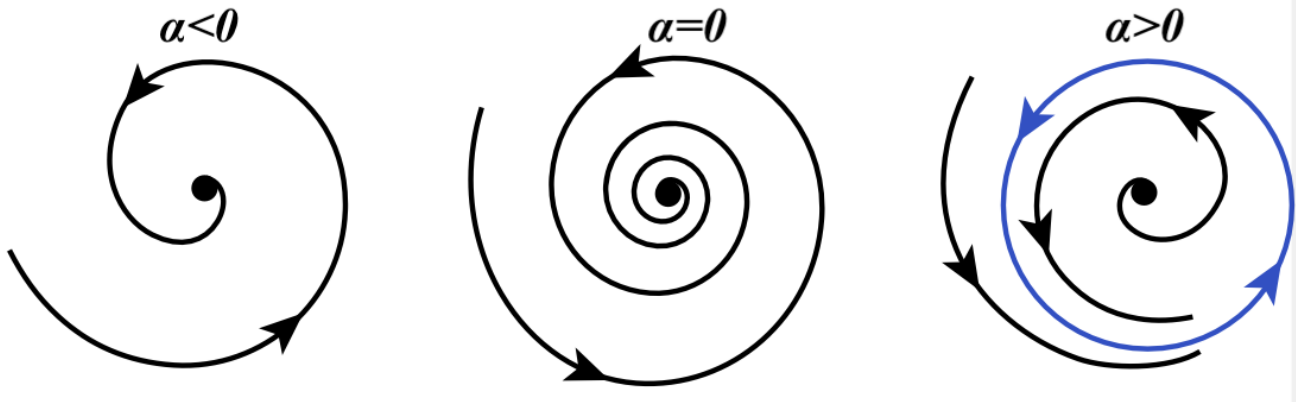


Figura 3.5: Bifurcación de Hopf supercrítica.

En el espacio extendido  $(x_1, x_2, \alpha)$  el diagrama de bifurcación incluye una familia de ciclos (parametrizada por  $\alpha$ ) formando una superficie paraboloides que se abre hacia el semiespacio  $\alpha > 0$  como en la figura 3.6. Esto se conoce como **bifurcación de Hopf supercrítica**.

#### OBSERVACIONES.

1. Hay dos tipos de bifurcación de Hopf genéricas. Uno es el caso supercrítico mostrado arriba; el otro es la **bifurcación de Hopf subcrítica**, una de cuyas realizaciones está presente en el campo de vectores

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

El diagrama de bifurcación de la bifurcación de Hopf subcrítica se muestra en la figura 3.7.

2. En ambos casos el equilibrio pierde estabilidad en  $\alpha = 0$  cuando  $\alpha$  es creciente.
  - a) En el caso supercrítico, el equilibrio es reemplazado por un ciclo estable infinitesimal. Luego, las soluciones permanecen en una vecindad

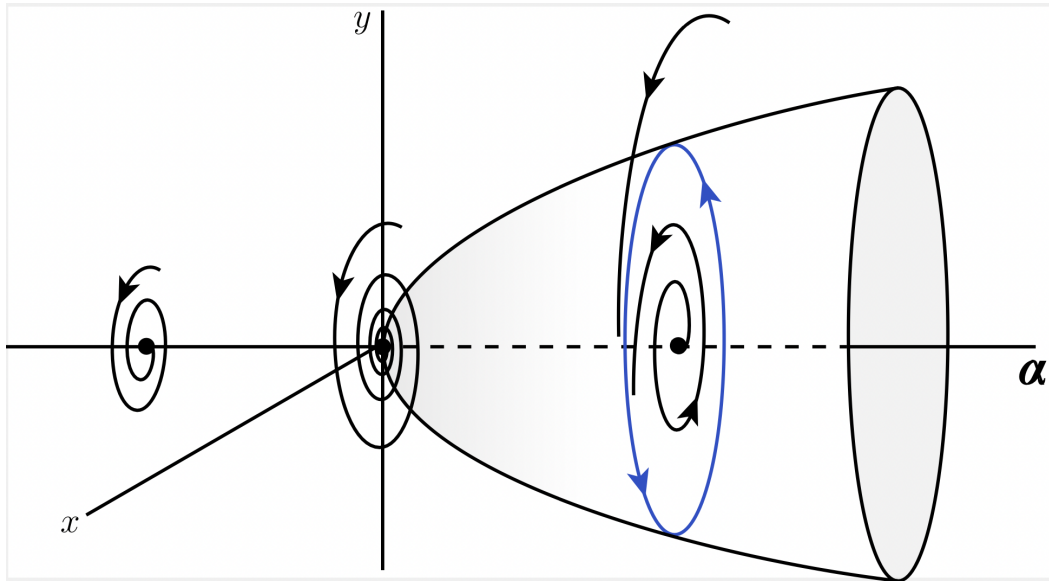


Figura 3.6: Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio extendido  $(x_1, x_2, \alpha)$ .

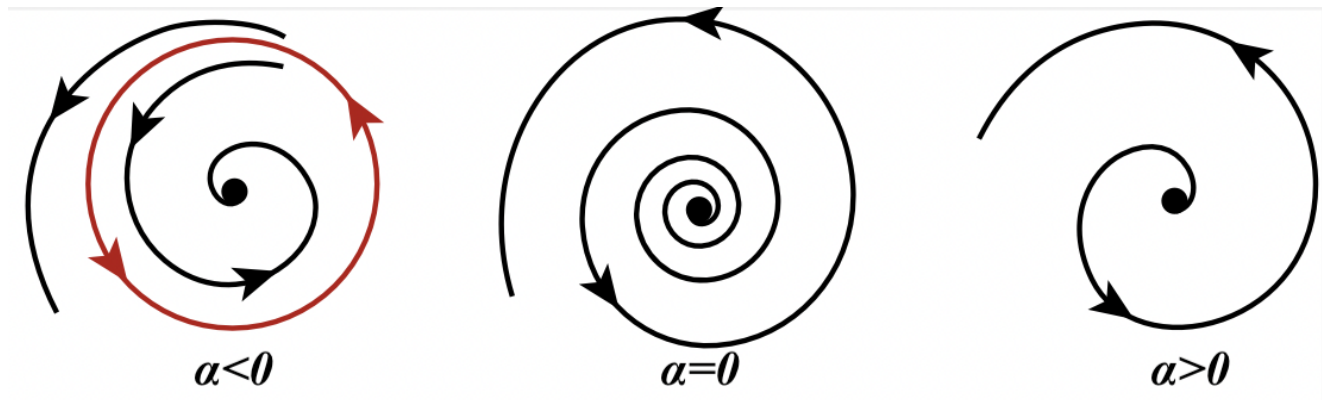


Figura 3.7: Bifurcación de Hopf subcrítica.

del equilibrio. Uno habla que el sistema permanece “bajo control”. Si  $\alpha$  vuelve a ser negativo, el sistema regresa al equilibrio estable.

- b) En el caso subcrítico, la región de atracción del equilibrio está acotada por un ciclo inestable que existe para  $\alpha < 0$ , ver figuras 3.7 y 3.8. A medida que  $\alpha$  crece y se acerca a  $\alpha = 0$ , el ciclo se achica y eventualmente desaparece. Luego, las órbitas ya no están confinadas a una vecindad

del equilibrio. Si  $\alpha$  vuelve a ser negativo, el sistema, en general, no regresa al equilibrio estable, pues puede que haya abandonado su región de atracción; compare las figuras 3.5 y 3.6, con las figuras 3.7 y 3.8, respectivamente.

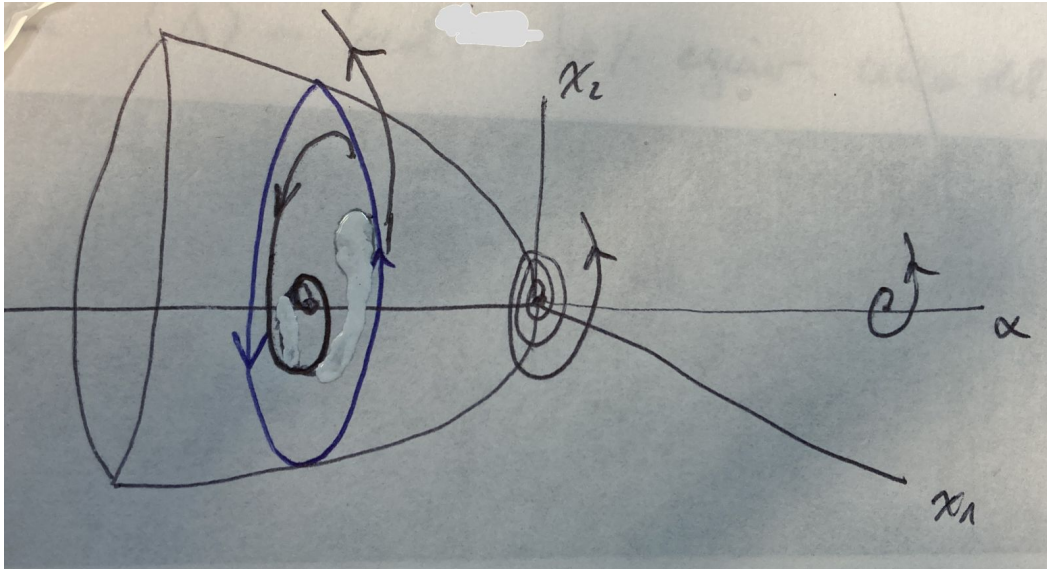


Figura 3.8: Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio extendido  $(x_1, x_2, \alpha)$ .

3. En el caso en que el sistema tenga la misma parte lineal  $A$  de (3.8), pero sin términos no-lineales, se obtiene un caso degenerado. En efecto, el sistema (lineal) en coordenadas complejas  $\dot{z} = (\alpha + i)z$  también posee un foco estable para  $\alpha < 0$ , y un foco inestable para  $\alpha > 0$ . Sin embargo, no hay ciclos para  $\alpha \neq 0$ . Más aún, si  $\alpha = 0$ , el origen se vuelve un centro, i.e., un equilibrio no-hiperbólico rodeado de un continuo de órbitas periódicas. Podemos pensar que el diagrama de bifurcación resultante en la figura 3.9 muestra el mismo paraboloides compuesto de órbitas periódicas de los casos super- y subcrítico pero ahora “degenerado” al plano  $\alpha = 0$ .

El siguiente lema nos dice que si uno agrega términos de orden superior a (3.8), localmente estos no producen ningún efecto en la bifurcación de Hopf.

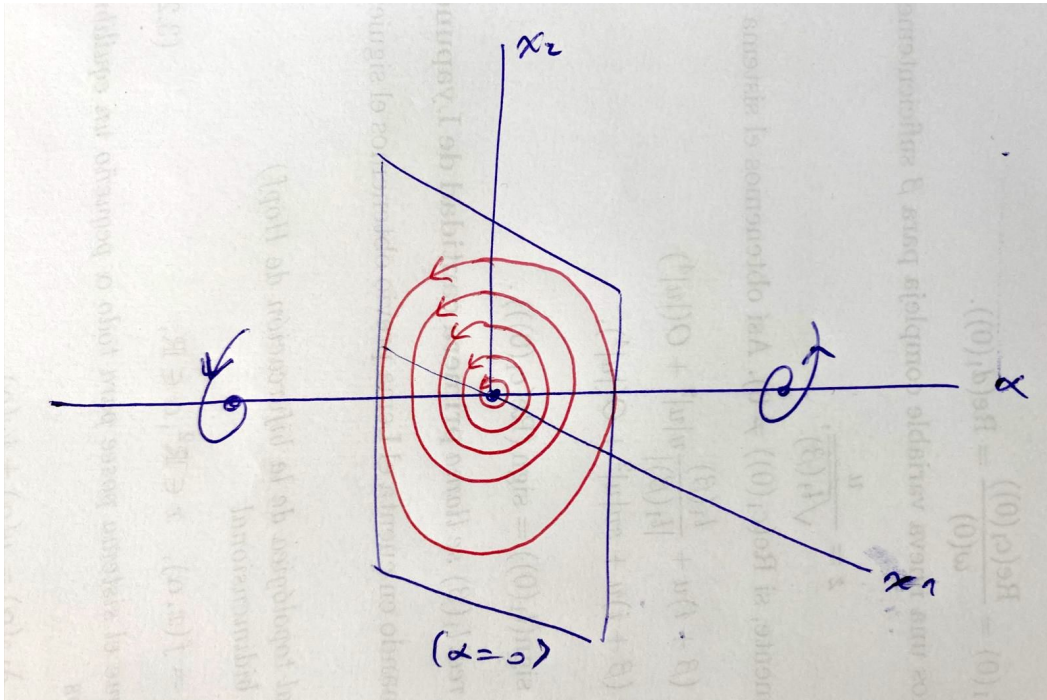


Figura 3.9:

**Lema 2** Consideremos el sistema planar

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \quad (3.10)$$

donde  $x = (x_1, x_2)^t$ ,  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ , y los términos  $O(\|x\|^4)$  puede depender en forma suave de  $\alpha$ . Entonces, (3.10) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a (3.8).

DEMOSTRACIÓN. Reescribamos el enunciado en notación compleja equivalente:

El sistema

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 + O(|z|^4) \quad (3.11)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (3.12)$$

*Paso 1.* Existencia y unicidad del ciclo.

La ecuación (3.11) en coordenadas polares  $(\rho, \varphi)$  nos queda:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} = 1 + \Psi(\rho, \varphi), \end{cases} \quad (3.13)$$

donde  $\Phi = O(|\rho|^4)$  y  $\Psi = O(|\rho|^3)$ , y la dependencia con respecto a  $\alpha$  de estas funciones no se indica para simplificar la notación.

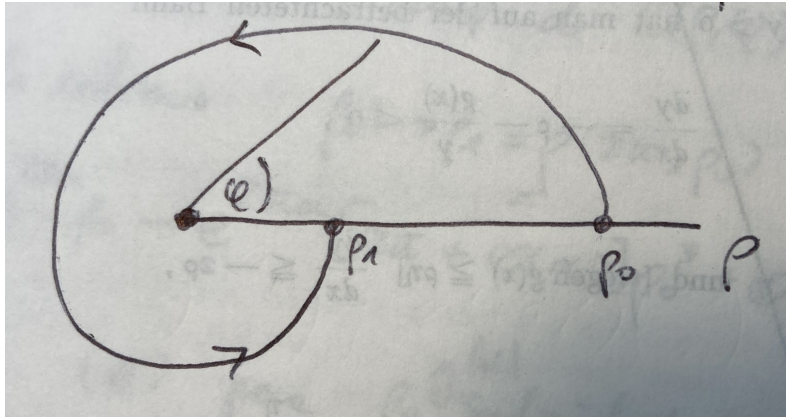


Figura 3.10:

Si  $\rho_0 > 0$  es suficientemente grande, una órbita de (3.13) comenzando en  $(\rho, \varphi) = (\rho_0, 0)$  es como en la figura 3.10 y tiene la forma general

$$\begin{cases} \rho = \rho(\varphi; \rho_0), \\ \rho_0 = \rho(0, \rho_0), \end{cases}$$

donde  $\rho$  satisface

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi)}{1 + \Psi(\rho, \varphi)} = \rho(\alpha - \rho^2) + R(\rho, \varphi), \quad (3.14)$$

donde  $R = O(|\rho|^3)$ . ¿Cómo podemos hallar el punto  $\rho_1$  en la figura 3.10? Para eso necesitaremos construir la aplicación de retorno de Poincaré definida en la sección  $\varphi = 0$ .

Notemos que la transición de (3.13) a (3.14) es equivalente a introducir una nueva parametrización del tiempo en la cual  $\dot{\varphi} = 1$ . Luego, el tiempo de retorno al semieje  $\varphi = 0$  es el mismo para todas las órbitas en este eje con  $\rho_0 > 0$  y es igual a  $2\pi$ .

Dado que  $\rho(\varphi; 0) = 0$ , podemos escribir la serie de Taylor para  $\rho(\varphi; \rho_0)$  en potencias de  $\rho_0$  cerca de  $\rho_0 = 0$ :

$$\rho = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4). \quad (3.15)$$

Luego,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = u'_1(\varphi)\rho_0 + u'_2(\varphi)\rho_0^2 + u'_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4). \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.15) y (3.16) en (3.14) obtenemos:

$$\begin{aligned} u'_1(\varphi)\rho_0 + u'_2(\varphi)\rho_0^2 + u'_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4) &= (u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4)) \\ &\quad \times (\alpha - (u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4))^2) \\ &\quad + R(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

Igualando términos en las correspondientes potencias de  $\rho_0$  obtenemos un sistema de EDOs para las incógnitas  $u_1, u_2, u_3$ . Al agregar condiciones iniciales  $u_1(0) = 1, u_2(0) = u_3(0) = 0$ , estas EDOs se pueden resolver y obtener:

$$u_1(\varphi) = e^{\alpha\varphi}, \quad u_2(\varphi) = 0, \quad u_3(\varphi) = \frac{(1 - e^{2\alpha\varphi})e^{\alpha\varphi}}{2\alpha}.$$

(Notemos que estas expresiones son independientes de  $R(\rho, \varphi)$ .)

Por lo tanto, el mapeo de retorno  $\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$  tiene la forma:

$$\rho_1 = e^{2\pi\alpha}\rho_0 - e^{2\pi\alpha} (2\pi + O(\alpha)) \rho_0^3 + O(\rho_0^4). \quad (3.17)$$

Podemos analizar los puntos fijos de (3.17) para  $\rho_0$  y  $|\alpha|$  suficientemente pequeños en la figura 3.11. Si  $\alpha < 0$  existe una vecindad del origen en la cual el mapeo tiene un solo punto fijo en  $\rho = 0$ . Pero si  $\alpha > 0$  es suficientemente pequeño aparece un punto fijo adicional en  $\rho = \sqrt{\alpha} + \dots$ . La estabilidad de estos puntos fijos también se puede obtener de (3.17).

Tomando en cuenta que cada punto fijo positivo del mapeo de retorno corresponde a un ciclo límite del sistema, podemos concluir que el sistema (3.13)

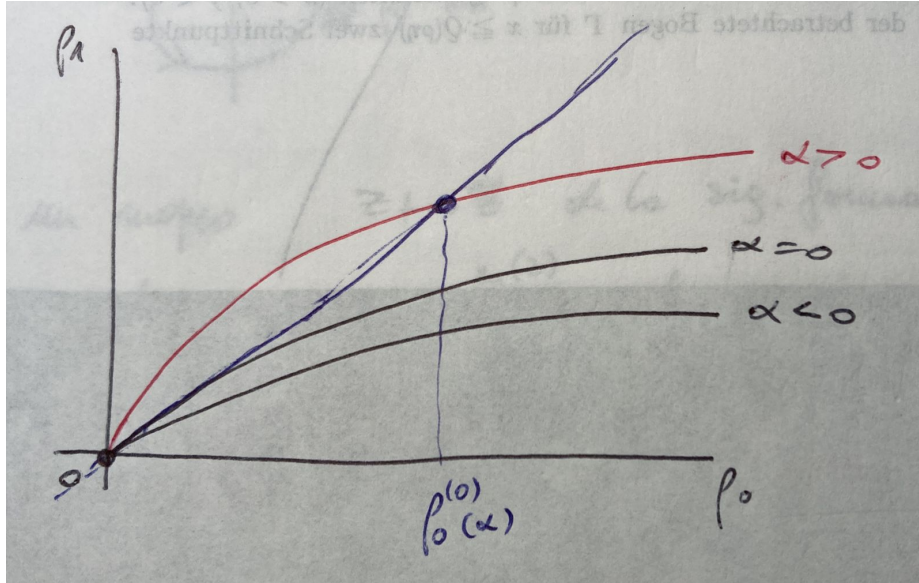


Figura 3.11:

o (3.11) con cualquier término  $O(|z|^4)$  posee un único ciclo límite (estable) bifurcándose del origen y existiendo para  $\alpha > 0$  como en el sistema (3.12). Por lo tanto, los términos de orden superior no afectan la bifurcación del ciclo límite en una vecindad de  $z = 0$  para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño.

*Paso 2.* Construcción de un homeomorfismo.

Fijemos un  $\alpha$  pequeño, pero positivo. Ambos sistemas (3.11) y (3.12) tienen un ciclo límite en alguna vecindad del origen. Asumamos que aplicamos un reescalamiento del tiempo en (3.11) de manera que el tiempo de retorno al semieje  $\varphi = 0$  es  $2\pi$  (como en el paso anterior). Asumamos también que aplicamos un reescalamiento lineal de coordenadas en (3.11) tal que el punto de intersección del ciclo con el semieje  $\varphi = 0$  es en  $x_1 = \sqrt{\alpha}$ .

Definamos un mapeo  $z \mapsto \tilde{z}$  de la siguiente forma (ver también figura 3.12). Tomemos un punto  $z = x_1 + ix_2$  en (3.12). Encontramos valores  $(\rho_0, \tau_0)$ , donde  $\tau_0$  es el tiempo requerido para que una órbita que parte en  $(\rho_0, 0)$  en el semieje  $\varphi = 0$  llegue al punto  $z$ . Ahora, tomemos el sistema (3.11). Partiendo del punto  $(\rho_0, 0)$  en el semieje  $\varphi = 0$  construyamos una órbita de (3.11) en el intervalo de tiempo  $[0, \tau_0]$ . Denotemos el extremo de esta órbita en  $t = \tau_0$  como  $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2$ .



Además, definamos  $\tilde{z} = 0$  como imagen de  $z = 0$ . El mapeo así construido es un homeomorfismo. Para  $\alpha > 0$  mapea órbitas de (3.12) en una vecindad del origen en órbitas de (3.11) preservando la dirección del tiempo. El caso  $\alpha < 0$  se puede considerar de la misma manera sin necesidad de reescalar las coordenadas.

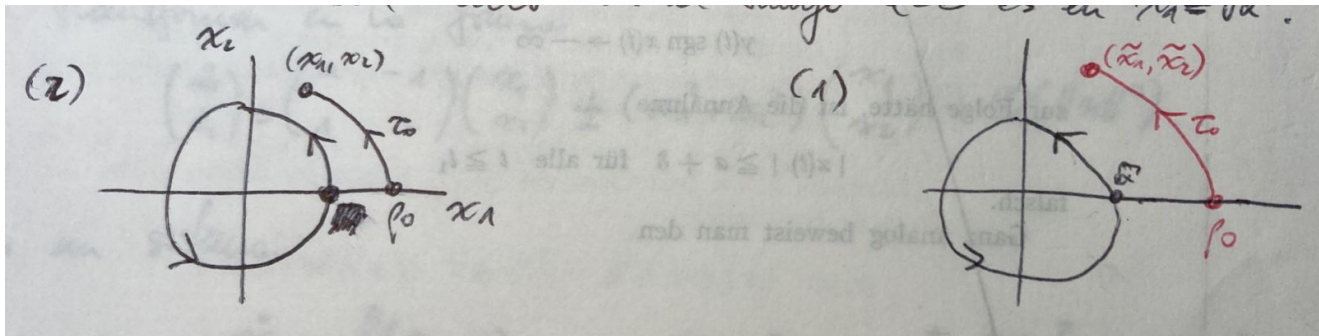


Figura 3.12:

### 3.2.1. Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf

En esta sección probaremos que cualquier sistema bidimensional genérico que pase por una bifurcación de Hopf se puede transformar en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x^4\|).$$

Consideremos un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con  $f$  suave, el cual tiene el equilibrio  $x = 0$  para  $\alpha = 0$  con valores propios  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Dado que  $Df(0, 0)$  es invertible (¿por qué?), por el teorema de la función implícita, el sistema posee un equilibrio  $x_0(\alpha)$  en alguna vecindad del origen para todo  $\alpha$  suficientemente pequeño tal que  $x_0(0) = 0$ . Mediante una traslación (que podría depender de  $\alpha$ ), podemos asumir que  $x = 0$  es el equilibrio del sistema para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño. Luego, consideramos el sistema

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \tag{3.18}$$

donde  $F$  es una función vectorial suave cuyas componentes  $F_{1,2}$  poseen expansiones de Taylor en  $x$  partiendo de los términos cuadráticos, es decir,  $F = O(\|x\|^2)$ . Además,

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix}$$

donde  $a, b, c, d$  son funciones suaves de  $\alpha$ . Los valores propios de  $A(\alpha)$  satisfacen  $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$ , donde

$$\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{tr}(A), \quad \Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = \det(A).$$

Luego,

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)} \right).$$

La bifurcación nde hopf implica

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0.$$

Para  $|\alpha|$  pequeño podemos introducir

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \quad \omega(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)} \right).$$

Luego,

$$\lambda_1(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda_1(\alpha)},$$

donde

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \quad \mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0. \quad (3.19)$$

Notemos que  $\lambda(\alpha)$  es un número complejo para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño.

Sea  $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  un vector propio (complejo) de  $A(\alpha)$  correspondiente a  $\lambda(\alpha)$ :

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha),$$

y sea  $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  un vector propio (complejo) de  $A^T(\alpha)$  correspondiente a  $\overline{\lambda(\alpha)}$ :

$$A^T(\alpha)p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha).$$

Podemos normalizar  $p$  con respecto a  $q$  tal que

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1.$$

(Aquí,  $\langle, \rangle$  es el producto interno en  $\mathbb{C}^2$ :  $\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$ .) Así, cualquier vector  $x \in \mathbb{R}^2$  se puede representar para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño como

$$x = zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha) \quad (3.20)$$

en forma única, para algún  $z \in \mathbb{C}$  por determinar. En efecto, tomando producto escalar en (3.20) con  $p(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), x \rangle &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha) \rangle \\ &= z\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \overline{z}\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle. \end{aligned}$$

Por un lado,  $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$ . Y por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle &= \langle p(\alpha), (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1}A\overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1}\langle A^T p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1}\langle \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1}\lambda(\alpha)\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left(1 - (\overline{\lambda(\alpha)})^{-1}\lambda(\alpha)\right) \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0.$$

Pero  $\overline{\lambda(\alpha)} \neq \lambda(\alpha)$ , pues  $\omega(\alpha) > 0$ . Luego,  $\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0$ . Por lo tanto,

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle$$

es la fórmula explícita para determinar el valor de  $z$  que hace posible la igualdad (3.20).

Ocupando la representación (3.20) y tomando producto escalar en (3.18) con  $p(\alpha)$ , la variable  $z$  satisface la EDO:

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha), \alpha) \rangle.$$

Por lo tanto obtenemos el siguiente lema.

**Lema 3** *El sistema (3.18) se puede escribir para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño en la forma*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \overline{z}, \alpha),$$

donde  $z \in \mathbb{C}$  y  $g(z, \overline{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha), \alpha) \rangle = O(|z|^2)$  es una función suave de  $(z, \overline{z}, \alpha)$ .

La introducción de la variable compleja  $z$  puede verse como un cambio de coordenadas lineal  $y = T(\alpha)x$ , con  $z = y_1 + iy_2$ . Las componentes  $(y_1, y_2)$  son las coordenadas de  $x$  escritas en la base  $\{2\operatorname{Re}(q), -2\operatorname{Im}(q)\}$  de vectores propios generalizados (reales) de  $A(\alpha)$ . En esta base, la matriz  $A(\alpha)$  tiene la forma canónica (real) de Jordan

$$J(\alpha) = T(\alpha)A(\alpha)T^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mu(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \mu(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la transformación  $T(\alpha)$  “simplifica” al máximo los términos lineales. Esta es la misma idea de las formas normales! Justamente, los siguientes pasos para la obtención de nuestro resultado consisten en reducir los términos de orden superior vía el teorema de la forma normal. A continuación daremos un bosquejo de estos pasos. (Los detalles de estos resultados involucran muchos cálculos intermedios y pueden revisarse en la bibliografía.)

En primer lugar, se puede probar que todos los términos cuadráticos se pueden anular mediante cambios de coordenadas complejos, obteniéndose

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + c_1(\alpha)z^2\bar{z} + O(|z|^4),$$

donde  $c_1(\alpha)$  es el único término cúbico resonante (complejo).

El siguiente paso es introducir un rescalamiento del tiempo

$$\tau = \omega(\alpha)t$$

(con  $\omega(\alpha) > 0$ ) y un nuevo parámetro

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}.$$

Esta parametrización es válida solo si es invertible para todo  $|\alpha|$  pequeño cerca de  $\alpha = 0$ , esto es, si

$$0 \neq \beta'(0) = \frac{\mu'(0)\omega(0) - \mu(0)\omega'(0)}{\omega^2(0)} = \frac{\mu'(0)}{\omega(0)},$$

donde hemos ocupado la igualdad  $\mu(0) = \beta(0) = 0$  de (3.19). Por lo tanto, si  $\mu'(0) \neq 0$  obtenemos el sistema

$$\frac{dz}{d\tau} = (\beta + i)z + d_1(\beta)z|z|^2 + O(|z|^4),$$

donde

$$d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}$$

es una función que toma valores complejos.

Ahora introducimos una reparametrización no-lineal del tiempo definiendo la nueva variable independiente:

$$\theta = \theta(\tau, \beta),$$

donde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|z|^2)d\tau$$

es cercano a la identidad en una vecindad de  $z = 0$  y

$$e_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta)).$$

Luego el sistema nos queda de la forma

$$\frac{dz}{d\theta} = (\beta + i)z + l_1(\beta)z|z|^2 + O(|z|^4),$$

donde

$$l_1(\beta) = \text{Re}(d_1(\beta)) - \beta e_1(\beta) \in \mathbb{R}$$

y además

$$l_1(0) = \frac{\text{Re}(c_1(0))}{\omega(0)} = \text{Re}(d_1(0)).$$

A continuación definimos una nueva variable compleja para  $\beta$  suficientemente pequeño:

$$z = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

si  $l_1(0) \neq 0$  (o equivalentemente, si  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$ ). Así obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) \\ &= (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \end{aligned}$$

con

$$s = \text{sign}(l_1(0)) = \text{sign}(\text{Re}(c_1(0))).$$

**Definición 17** La función real  $l_1(\beta)$  se llama **primera cantidad de Lyapunov**.

De todo lo anterior y tomando en cuenta el Lema previo obtenemos el siguiente resultado final.

**Teorema 8** (Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf)

*Supongamos un sistema bidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

*con  $f$  suave. Supongamos que el sistema posee para todo  $\alpha$  pequeño un equilibrio en  $x = 0$  con valores propios*

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

*donde  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:*

1.  $l_1(0) \neq 0$ , donde  $l_1$  es la primera cantidad de Lyapunov;
2.  $\mu'(0) \neq 0$ .

*Entonces el sistema es topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

El signo de  $l_1(0)$  nos indica si la bifurcación de Hopf es supercrítica o subcrítica. En efecto, si  $l_1(0) < 0$ , se trata del caso supercrítico, mientras que si  $l_1(0) > 0$  es una bifurcación de Hopf subcrítica. Existen fórmulas explícitas para calcular  $l_1(0)$  explícitamente a partir de  $f$  en (3.21). Por ejemplo, supongamos que aplicamos la transformación de coordenadas  $T(\alpha)$  de la demostración del Lema 3 —definida por los vectores propios generalizados de  $Df(0, \alpha) = A(\alpha)$ — de manera que para  $\alpha = 0$  el sistema 2-dimensional (3.21) toma la forma

$$\begin{cases} x' &= -\omega y + P(x, y), \\ y' &= \omega x + Q(x, y). \end{cases}$$

Entonces la primera cantidad de Lyapunov  $l_1(0)$  se puede calcular como:

$$16 l_1(0) = P_{xxx} + P_{xyy} + Q_{xxy} + Q_{yyy} + \frac{1}{\omega} \left( P_{xy}(P_{xx} + P_{yy}) - Q_{xy}(Q_{xx} + Q_{yy}) - P_{xx}Q_{xx} + P_{yy}Q_{yy} \right), \quad (3.22)$$

donde todas las derivadas están evaluadas en  $(0, 0)$ .

Por otro lado, muchos paquetes computacionales ya tienen incorporadas en sus rutinas la evaluación de  $l_1(0)$ , lo cual hace que no sea indispensable saber la fórmula de memoria.

**Ejemplo 14** Bifurcación de Hopf en un modelo depredador-presa (Holling 1965).

Consideremos el siguiente modelo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1(1 - x_1) - \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}, \\ \dot{x}_2 = -dx_2 + \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}, \end{cases}$$

donde  $\alpha$  es un parámetro de control y  $r, c, \alpha, d > 0$ . Supongamos además que  $c > d$ .

Para tratar con un sistema polinomial equivalente rescalamos el tiempo en la forma  $t = (\alpha + x_1)\tau$  obteniendo el sistema

$$\begin{cases} x_1' = rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - (cx_1x_2), \\ x_2' = -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2. \end{cases}$$

El sistema posee el equilibrio no-trivial  $E_0 = \left( \frac{\alpha d}{c-d}, \frac{r\alpha}{c-d} \left( 1 - \frac{\alpha d}{c-d} \right) \right)$ , con matriz jacobiana

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right) & -\frac{\alpha cd}{c-d} \\ \frac{\alpha r(c-d(1+\alpha))}{c-d} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2} = \frac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2} \left( \frac{c-d}{c+d} - \alpha \right).$$

Se tiene  $\mu(\alpha_0) = 0$  para  $\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d}$ . Más aún,  $\omega_0^2(\alpha_0) = \frac{rc^2d(c-d)}{(c+d)^3} > 0$ . Por lo tanto en  $\alpha = \alpha_0$ , el equilibrio  $E_0$  tiene valores propios  $\lambda_{1,2}(\alpha_0) = \pm i\omega_0$  y ocurre una bifurcación de Hopf. El equilibrio es estable para  $\alpha > \alpha_0$  e inestable para  $\alpha < \alpha_0$ . La condición de transversalidad también se satisface

$$\mu'(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0 rd(c+d)}{2(c-d)^2} = -\frac{rd}{2(c-d)} < 0.$$

Por último, al calcular la primera cantidad de Lyapunov obtenemos

$$l_1(\alpha_0) = -\frac{rc^2d^2}{\omega} < 0.$$

Por lo tanto la bifurcación de Hopf es supercrítica y un único ciclo límite se bifurca desde  $E_0$  y existe para  $\alpha < \alpha_0$ .