

# Capítulo 3

## Bifurcaciones locales de codimensión uno en sistemas dinámicos continuos

Considere el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde  $f$  es suave con respecto a  $(x, \alpha)$ . Sea  $x = x_0$  un equilibrio hiperbólico para  $\alpha = \alpha_0$ . Si uno realiza una pequeña perturbación del parámetro  $\alpha$ , el equilibrio mueve un poco su ubicación pero sigue siendo hiperbólico, i.e., su estabilidad no cambia. Pero si la variación del parámetro es lo suficientemente grande, hay (genéricamente) dos maneras en que el equilibrio podría perder su hiperbolicidad:

1. Un valor propio simple se anula; por ej.,  $\lambda_1 = 0$ .
2. Un par de valores propios complejos conjugados se ubica en el eje imaginario; por ej.,  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ .

En este capítulo veremos que un sistema dinámico continuo con un punto de equilibrio no hiperbólico satisfaciendo una de las condiciones de arriba es estructuralmente inestable y veremos el análisis de las correspondientes bifurcaciones de los retratos de fase locales bajo variación del parámetro.

**Definición 14** La bifurcación genérica asociada con la aparición de un valor propio nulo,  $\lambda_1 = 0$ , se llama **bifurcación fold**. También se conoce como **bifurcación silla-nodo (SN)**, **punto límite (LP)** o **tangente**. Es posible encontrarla en sistema de dimensión  $n \geq 1$ .

**Definición 15** La bifurcación genérica asociada a la presencia de un par de valores propios complejos conjugados con parte real nula,  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ , se llama **bifurcación de Hopf**. También se conoce como **bifurcación Andronov-Hopf** o incluso **bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf**. Para que esta bifurcación ocurra la dimensión del espacio de fase debe ser  $n \geq 2$ .

### 3.1. Bifurcación fold o silla-nodo

Consideremos el campo de vectores en la recta real

$$\dot{x} = \alpha + x^2 =: f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

En  $\alpha = 0$  el sistema tiene un equilibrio no-hiperbólico  $x_0 = 0$  con valor propio  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ . La figura 3.1 muestra los distintos retratos de fase no equivalentes cerca de  $\alpha = 0$ .

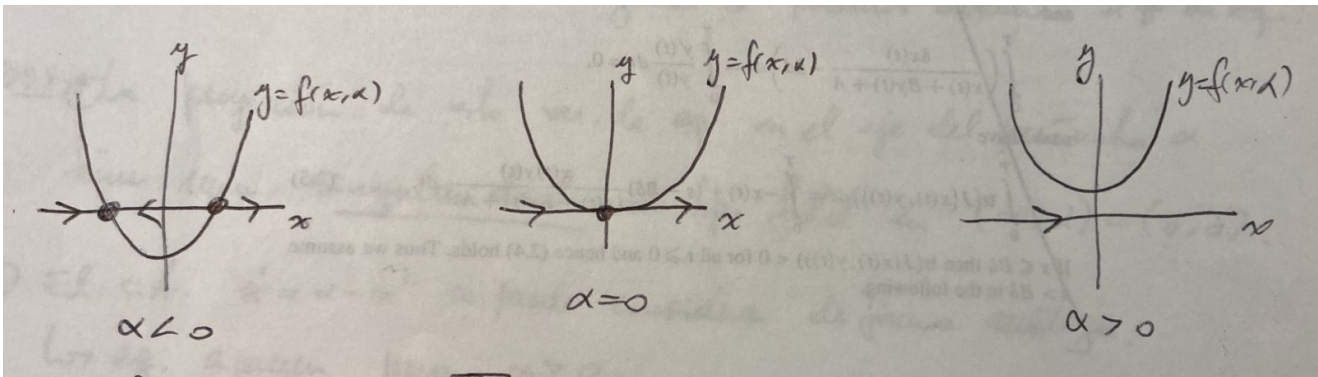


Figura 3.1:

Para  $\alpha < 0$  existen dos equilibrios hiperbólicos ubicados en las coordenadas

$$x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}.$$

Uno de ellos es estable y el otro inestable. Para  $\alpha > 0$ , sin embargo, ya no hay equilibrios. Podemos visualizar cómo ocurre este cambio en la dinámica a medida que  $\alpha \rightarrow 0^-$ : los equilibrios  $x_{1,2}(\alpha)$  se acercan entre sí y colisionan en el límite  $\alpha = 0$  formando un solo equilibrio  $x_0 = 0$  con valor propio  $\lambda = 0$ , y luego desaparecen para  $\alpha > 0$ . Notemos que  $\frac{d}{d\alpha}x_{1,2}(\alpha) \rightarrow \infty$  a medida que  $\alpha \rightarrow 0^-$ .

**Definición 16** La ecuación algebraica  $f(x, \alpha) = 0$  define una **variedad de equilibrios** en el espacio producto  $(x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

En este caso la variedad de equilibrios es la parábola  $\alpha = -x^2$  graficada en la figura 3.2. Aquí se aprecia claramente cómo el proceso de acercamiento y “aniquilación” de los dos equilibrios ocurre de manera continua en  $\alpha = 0$ .

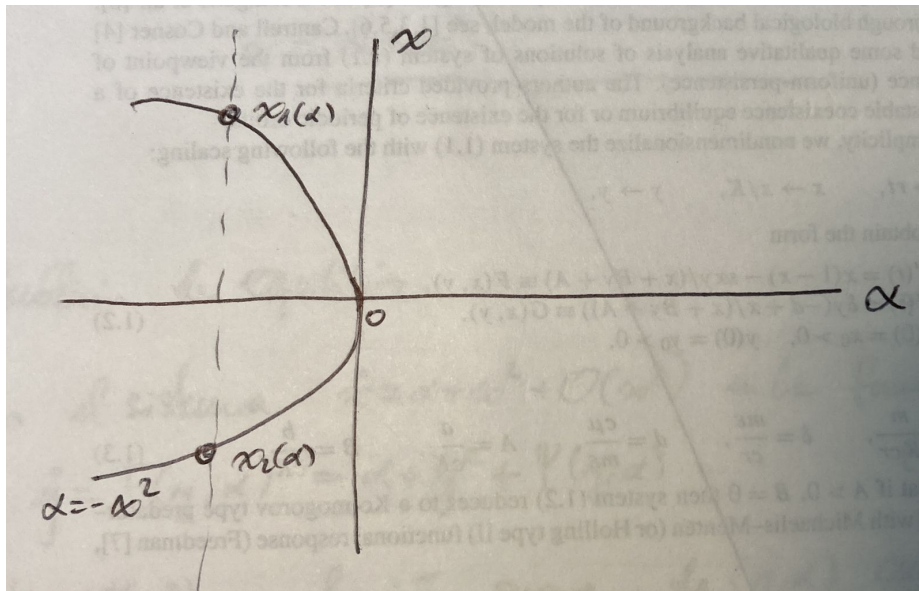


Figura 3.2:

La representación de la figura 3.2 posee varias ventajas: Nos muestra todo el panorama de los efectos de la bifurcación en una misma figura. Más aún, fijando el valor de  $\alpha$  podemos determinar el número de equilibrios del sistema y el retrato de fase para ese valor particular del parámetro.

#### OBSERVACIONES.

1. La proyección de la variedad de equilibrios en el eje del parámetro  $\alpha$  tiene una singularidad de tipo *fold* en  $(x, \alpha) = (0, 0)$ : La curva definida por  $\alpha + x^2 = 0$  efectivamente “se dobla” en este punto, lo que le da el nombre a esta bifurcación.
2. El nombre de *silla-nodo* será más evidente al observar esta bifurcación en sistemas de dimensión mayor, lo cual haremos en el capítulo 5.

3. El sistema  $\dot{x} = \alpha - x^2$  se puede analizar de manera análoga. En tal caso, los equilibrios aparecen para  $\alpha > 0$ .

El siguiente lema nos dice que si uno agrega términos de orden superior a (3.1), localmente estos no producen ningún efecto en la bifurcación fold.

**Lema 1** *El sistema*

$$\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3)$$

*es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema*

$$\dot{x} = \alpha + x^2.$$

DEMOSTRACIÓN.

*Paso 1.* Análisis de los equilibrios.

Reescribamos el sistema en la forma

$$\dot{y} = F(y, \alpha) := \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha), \quad (3.2)$$

donde  $\psi = O(y^3)$  es una función suave de  $(y, \alpha)$  cerca de  $(0, 0)$ . Sea

$$M = \{(y, \alpha) : F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha) = 0\}$$

la variedad de equilibrios de (3.2) cerca de  $(0, 0)$  en el plano  $(y, \alpha)$ . La curva  $M$  pasa por el origen, pues  $F(0, 0) = 0$ . Además  $\partial F / \partial \alpha(0, 0) = 1$ . Luego por el teorema de la función implícita,  $M$  se puede representar localmente como

$$M = \{(y, \alpha) : \alpha = g(y)\},$$

donde  $g$  es suave y está definida para todo  $|y|$  pequeño. Más aún,

$$g(y) = -y^2 + O(y^3),$$

y se tiene el gráfico de la figura 3.3. Luego, para todo  $\alpha < 0$  suficientemente pequeño, existen dos equilibrios de (3.2) cerca del origen,  $y_{1,2}(\alpha)$ , los cuales están cerca de los equilibrios  $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$  para los mismos valores del parámetro.

*Paso 2.* Construcción de un homeomorfismo.

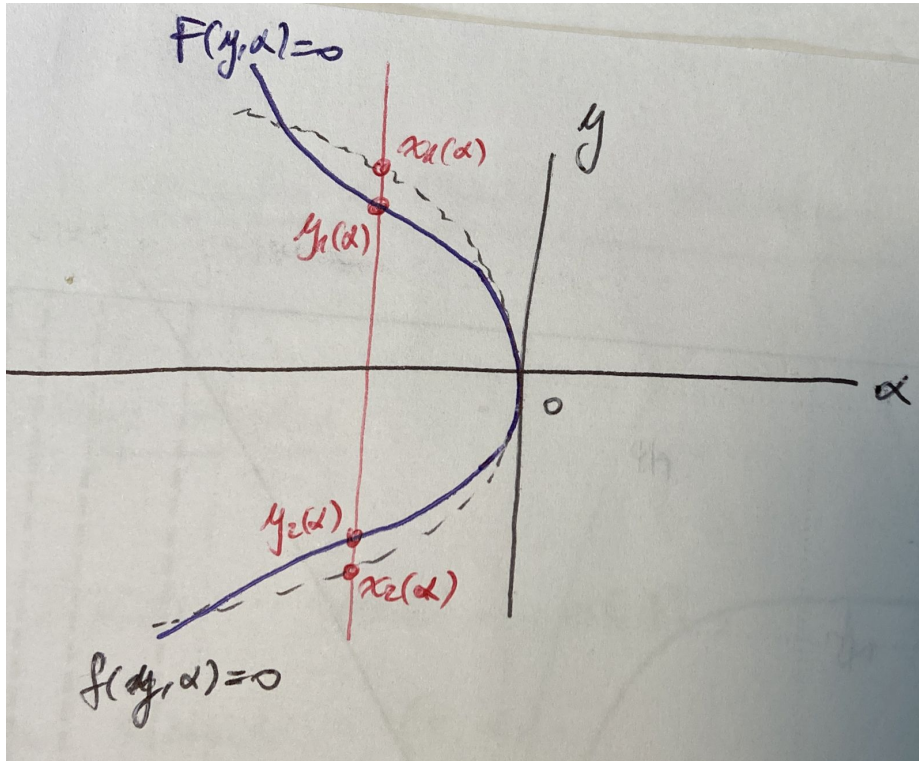


Figura 3.3:

Para  $|\alpha|$  pequeño construimos un mapeo

$$y = h_\alpha(x)$$

de la siguiente forma: Para  $\alpha \geq 0$ :  $h_\alpha(x) = x$  (i.e., identidad); para  $\alpha < 0$ :  $h_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)x$  (función lineal), donde los coeficientes  $a, b$  quedan únicamente determinados por las condiciones

$$h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2;$$

es decir, los equilibrios son llevados en equilibrios. (Tarea: hallar  $a, b$ .) El mapeo así construido  $h_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un homeomorfismo que mapea órbitas de (3.1) cerca del origen en órbitas de (3.2), preservando la orientación del tiempo.

### 3.1.1. Forma normal topológica de la bifurcación fold

A continuación demostramos que el sistema (3.1) (módulo un posible cambio de signo del término  $x^2$ ) es una forma normal topológica de un sistema unidimensional que pasa por una bifurcación fold. (Veremos en el capítulo 5 que esta ecuación también describe, en cierto sentido, a la bifurcación fold en un sistema  $n$ -dimensional genérico.)

Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

con  $f$  suave, tiene en  $\alpha = 0$  el equilibrio  $x = 0$  con  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ . Expandimos  $f$  es una serie de Taylor con respecto a  $x$  en  $x = 0$ :

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde

- $f_0(0) = f(0, 0) = 0$ , (*condición de equilibrio*);
- $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ , (*condición de bifurcación fold*).

Nuestra estrategia es transformar (3.3) en la forma (3.1), incluyendo hasta términos de orden 2, mediante cambios de coordenadas y de parámetros invertibles y suaves (i.e., difeomorfismos).

*Paso 1. Traslación.*

Sea la nueva variable

$$y = x + \delta(\alpha),$$

donde  $\delta = \delta(\alpha)$  es una función a priori desconocida que definiremos después. La transformación inversa es  $x = y - \delta$ . Sustituyendo  $y$  en (3.3) tenemos:

$$\dot{y} = \dot{x} = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(y - \delta) + f_2(\alpha)(y - \delta)^2 + \dots$$

Entonces, reescribiendo el campo como una expansión en  $y$ :

$$\begin{aligned} \dot{y} = & (f_0(\alpha) + f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)) \\ & + (f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)) y \\ & + (f_2(\alpha) + O(\delta)) y^2 + O(y^3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notemos que si  $f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2) = 0$ , aniquilaríamos los términos de orden 1 en  $y$ , acercándonos a la forma (3.1). Veamos cómo esto puede ser posible. Supongamos que

$$f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \neq 0. \quad (3.5)$$

Entonces existe una función suave  $\delta(\alpha)$  que aniquila los términos de orden 1 en  $y$  para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño. En efecto, el coeficiente del término lineal es

$$F(\alpha, \delta) := f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta)$$

para alguna función suave  $\psi$ . Se tiene:

- $F(0, 0) = 0$ ;
- $\frac{\partial F}{\partial \delta}(0, 0) = -2f_2(0) \neq 0$  (por (3.5));
- $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0, 0) = f_1'(0)$ .

Luego, por el teorema de la función implícita, existe localmente una única función suave  $\delta = \delta(\alpha)$  tal que  $\delta(0) = 0$  y  $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$ .

Se tiene entonces

$$\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2).$$

(tarea: verificar!)

Con esta elección para  $\delta(\alpha)$ , la ecuación para  $y$  ahora no contiene términos lineales. Al expandir los coeficientes de (3.4) en términos de  $\alpha$  tenemos:

$$\dot{y} = (f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)) + (f_2(0) + O(\alpha))y^2 + O(y^3). \quad (3.6)$$

*Paso 2.* Introducir un nuevo parámetro.

Considerando el coeficiente constante en (3.6), sea

$$\mu = \mu(\alpha) = f_0'(0)\alpha + \alpha^2\phi(\alpha),$$

donde  $\phi$  es alguna función suave. Tenemos:

- $\mu(0) = 0$ ;

$$\blacksquare \mu'(0) = f'_0(0) = f_\alpha(0, 0).$$

Ahora supongamos que

$$f_\alpha(0, 0) \neq 0. \quad (3.7)$$

Entonces el teorema de la función inversa implica la existencia y unicidad local de una función inversa suave  $\alpha = \alpha(\mu)$  con  $\alpha(0) = 0$ . Por lo tanto, en (3.6) se tiene

$$\dot{y} = \mu + b(\mu)y^2 + O(y^3),$$

donde  $b(\mu)$  es una función suave con  $b(0) = f_2(0) \neq 0$  (por (3.5)). En particular, el signo de  $b(0)$  es constante.

*Paso 3. Reescalamiento final.*

Definiendo una nueva variable  $v = |b(\mu)|y$  y un nuevo parámetro  $\beta = |b(\mu)|\mu$ , tenemos

$$\dot{v} = \beta + sv^2 + O(v^3),$$

donde  $s = \text{sign}(b(0)) = \pm 1$ . En resumen, hemos probado el siguiente resultado.

**Teorema 6** *Suponga un sistema unidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

*con  $f$  suave. Suponga que en  $\alpha = 0$  se tiene el equilibrio  $x = 0$ . Sea  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ . Supongamos además que se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$(A.1) \quad f_{xx}(0, 0) \neq 0;$$

$$(A.2) \quad f_\alpha(0, 0) \neq 0.$$

*Entonces existen cambios invertibles de coordenadas ( $x \mapsto v$ ) y de parámetros ( $\alpha \mapsto \beta$ ) que transforman el sistema en*

$$\dot{v} = \beta \pm v^2 + O(v^3).$$

Ocupando el lema 1 podemos eliminar los términos  $O(v^3)$  en el teorema anterior y arribar finalmente al resultado deseado.



**Teorema 7** (*Forma normal topológica de la bifurcación fold*)  
*Cualquier sistema genérico unidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con  $f$  suave, que posee en  $\alpha = 0$  el equilibrio  $x = 0$  con  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$  y que satisfaga las condiciones (A.1) y (A.2) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$\dot{v} = \beta \pm v^2.$$

OBSERVACIONES. Las condiciones (A.1) y (A.2) de los teoremas anteriores son *condiciones de no-degeneración*. Nos especifican cuáles sistemas uniparamétricos exhibiendo una bifurcación fold se pueden considerar como *genéricos*:

- (A.1) **Condición de genericidad.** Condición algebraica de los coeficientes en la expansión de Taylor de  $f(x, \alpha)$  con respecto a  $x$  en  $(x, \alpha) = (0, 0)$ . Garantiza que el equilibrio  $x = 0$  no sea “tan” degenerado, es decir, que sea “típico” dentro de la clase de equilibrios que satisfacen las condiciones de bifurcación dadas.
- (A.2) **Condición de transversalidad.** Condiciones en las cuales hay derivadas de  $f$  con respecto a  $\alpha$  en  $(x, \alpha) = (0, 0)$ . Asegura que los parámetros “despliegan” o “desdoblan” (del inglés *unfold*) esta singularidad en una forma genérica. Es decir, los retratos de fase topológicamente no equivalentes en torno al valor de bifurcación se pueden hallar de manera estructuralmente estable a medida que el parámetro cruza transversalmente el conjunto de bifurcación.

### 3.1.2. Bifurcaciones fold degeneradas

Si en los teoremas anteriores no se satisface la condición de transversalidad (A.2), entonces la bifurcación puede ser algo distinta en carácter. Por ejemplo, el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \mu) := \mu x + x^2,$$

posee en  $\mu = 0$  un equilibrio  $x = 0$  con  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$  por lo que satisface la condición de bifurcación fold, pero no se satisface (A.2) pues  $f_\mu(0, 0) = 0$ . De hecho, en este sistema siempre hay dos equilibrios, en  $x = 0$  y  $x = -\mu$ . Y en  $\mu = 0$  ambos equilibrios están intercambiando estabilidad, por lo que efectivamente está ocurriendo una bifurcación. Este fenómeno se conoce como **bifurcación transcítica**. Sin embargo, este sistema siempre posee un equilibrio en  $x = 0$ , independiente del valor del parámetro  $\mu \in \mathbb{R}$ ; luego, esta bifurcación transcítica no es una deformación versal de la singularidad fold  $x^2$  pues existen deformaciones más generales que para ciertos valores de parámetros no poseen ningún equilibrio. De todas maneras, uno puede encontrar esta bifurcación en sistemas con una simetría especial —por ejemplo, un sistema que requiera que  $x = 0$  sea siempre un equilibrio.

Otra bifurcación fold interesante ocurre cuando la condición de genericidad (A.1) es violada, es decir, cuando el término cuadrático de la expansión de Taylor se anula. Esto corresponde al campo de vectores

$$f(x, 0) = dx^3 + g(x),$$

donde  $g(x) = o(x^3)$ . Una deformación de este sistema, en general, contiene todos los términos de orden inferior,

$$f(x, \mu) = a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 + dx^3 + g(x, \mu).$$

Un caso especial de este sistema ocurre cuando  $a(\mu) = c(\mu) = 0$ . Esto da lugar a la **bifurcación pitchfork**, la cual corresponde a un equilibrio perdiendo estabilidad por la creación de dos nuevos equilibrios simétricos, como vimos anteriormente en el ejemplo 4.