Capítulo 2

Formas normales

Para bifurcaciones locales de equilibrios y puntos fijos, podemos hallar diagramas de bifurcación universales gracias a las *formas normales topológicas*. Esta es una de las nociones centrales en la teoría de bifurcaciones pues nos permite reducir el análisis de una bifurcación local de codimensión k al de alguna familia topológicamente equivalente con exactamente k parámetros y que solo contenga aquellos términos algebraicos relevantes para la bifurcación de interés.

2.1. Forma normal de Poincaré

Para simplificar la exposición consideremos primeramente un sistema de EDOs que no depende de parámetros

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

donde f es suave y posee un punto de equilibrio en $x_0 = 0$. (Si $x_0 \neq 0$, siempre podemos llevar el punto x_0 al origen mediante una traslación.) Nuestro objetivo es hallar un cambio de coordenadas

$$x = h(y) \tag{2.2}$$

con $h(0) = 0$ tal que el sistema (2.1) se vuelva "lo más simple posible" en las nuevas coordenadas y.

Por la regla de la cadena, en las coordenadas y se tiene el sistema equivalente:

$$Dh(y)\dot{y} = f(h(y))$$

o bien,

$$\dot{y} = (Dh(y))^{-1} f(h(y)), \tag{2.3}$$

En el mejor de los casos, el nuevo sistema (2.3) es lineal. Pero en general, no lo será. Repitamos la pregunta: ¿Cómo definir h tal que (2.1) se vuelva "lo más simple posible" en las nuevas coordenadas y? Notemos que el sistema (2.1) puede ser expandido en serie de potencias alrededor del origen. En tal caso, queremos hallar una secuencia de transformaciones de coordenadas:

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_s, \ldots$$

que vayan removiendo progresivamente *la mayor cantidad de términos* de grado $1, 2, 3, \ldots, s, \ldots$, etc, respectivamente, de la serie de Taylor de (2.1) y que dejen solo aquellos términos esenciales que capturen la dinámica. En otras palabras,

- h_1 remueve los términos "superfluos" de grado 1;
- h_2 remueve los términos "superfluos" de grado 2;
- $\vdots$
- h_s remueve los términos "superfluos" de grado s;
- etc.

De esta manera, luego podemos definir el cambio de coordenadas (2.2) como

$$h = h_s \circ h_{s-1} \circ \cdots \circ h_2 \circ h_1,$$

la cual elimina los términos superfluos hasta grado s de la expansión en serie de potencias de (2.1) alrededor del origen.

Eliminando términos de grado 1.

El primer paso es separar la parte lineal de (2.1) en $x = 0$ escribiendo

$$\dot{x} = Df(0)x + \bar{f}(x), \tag{2.4}$$

donde $\bar{f}(x) = f(x) - Df(0)x$. Por definición, $\bar{f}(x) = O(|x|^2)$. Para lograr esto, comencemos llevando la matriz $Df(0)$ a su forma diagonal o a su forma canónica de Jordan. Sea T la matriz de vectores propios (generalizados) de $Df(0)$. Luego, aplicando la transformación

$$x = Tv$$

se tiene $\dot{x} = T\dot{v}$, o bien,

$$\dot{v} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}\left(Df(0)x + \bar{f}(x)\right),$$

llevando (2.1) en

$$\dot{v} = T^{-1}Df(0)Tv + T^{-1}\bar{f}(Tv).$$

Notemos que $J = T^{-1}Df(0)T$ es la forma canónica (real) de Jordan de $Df(0)$ —o bien, su diagonalización, según corresponda. Si además denotamos $F(v) = T^{-1}\bar{f}(Tv)$ entonces obtenemos

$$\dot{x} = Jx + F(x), \tag{2.5}$$

donde hemos vuelto a usar la letra x para economizar notación. De esta manera hemos simplificado la parte lineal de (2.1) lo máximo posible.

Eliminando términos cuadráticos.

Expandiendo $F(x)$ en (2.5) en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ tenemos:

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots + F_{r-1}(x) + O(|x|^r), \tag{2.6}$$

donde $F_i(x)$ representa los términos de orden i en la expansión.

Consideremos la transformación

$$x = y + h_2(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

donde $h_2(y)$ es un polinomio (vectorial) homogéneo de grado 2, es decir, $h_2(y)$ tiene la forma

$$h_2(y) = \left(h_2^1(y), \ldots, h_2^n(y)\right)^t,$$

donde cada $h_2^i(y)$ es un polinomio homogéneo de grado 2 en $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Por ejemplo, si $n = 2$, se tiene

$$h_2^1(y_1, y_2) = \alpha_{20}y_1^2 + \alpha_{11}y_1y_2 + \alpha_{02}y_2^2; \quad h_2^2(y_1, y_2) = \beta_{20}y_1^2 + \beta_{11}y_1y_2 + \beta_{02}y_2^2,$$

con coeficientes α_{ij}, β_{ij} por determinar.

Sustituyendo (2.7) en (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} = (I + Dh_2(y))\,\dot{y} = \ & Jy + Jh_2(y) + F_2\,(y + h_2(y)) + F_3\,(y + h_2(y)) \\ & + \cdots + F_{r-1}\,(y + h_2(y)) + O(|y|^r),\end{aligned}$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. Notemos que cada término

$$F_k\,(y + h_2(y)) = F_k(y) + O(|y|^{k+1}) + \ldots + O(|y|^{2k}), \quad 2 \leq k \leq r-1.$$

Luego, podemos reescribir:

$$(I + Dh_2(y))\,\dot{y} = Jy + Jh_2(y) + F_2(y) + \tilde{F}_3(y) + \ldots + \tilde{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r), \quad (2.8)$$

en donde la tilde en $\tilde{F}_k$ denota que los términos de grado k han sido modificados por el cambio de coordenadas. Notemos que el término cuadrático $F_2(y)$ en (2.8) es el mismo que en (2.6).

Ahora bien, se puede probar que para y en una vecindad del origen la matriz $(I + Dh_2(y))$ en (2.8) es invertible (Tarea: comprobar!). Más aún, $(I + Dh_2(y))^{-1}$ puede representarse en una expansión en serie de la forma

$$(I + Dh_2(y))^{-1} = I - Dh_2(y) + O(|y|^2).$$

Sustituyendo esta expresión en (2.8) tenemos

$$\dot{y} = Jy + Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy + F_2(y) + \bar{F}_3(y) + \ldots + \bar{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r), \quad (2.9)$$

el cual corresponde al sistema en las nuevas coordenadas y. Los términos cuadráticos de (2.9) son en definitiva

$$Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy + F_2(y). \quad (2.10)$$

Hasta este punto h_2 en (2.7) ha sido arbitrario. Ahora buscaremos un h_2 específico de tal forma de simplificar al máximo los términos cuadráticos de (2.9). Idealmente

$$Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy = -F_2(y)$$

y se eliminarían todos los términos cuadráticos.

Observaciones:

1. Si podemos eliminar todos los términos hasta grado $k \geq 2$ mediante una sucesión de transformaciones suaves e invertibles h_i, entonces el campo resultante *se puede linealizar* hasta cualquier orden algebraico. Por ejemplo, esto es lo que ocurre —bajo ciertas condiciones—para un equilibrio hiperbólico. (Note que, en rigor, esto no es equivalente al resultado del teorema de Hartman-Grobman. ¿Por qué?)

2. Sin embargo, en la teoría de bifurcaciones estamos interesados en puntos de equilibrio no-hiperbólicos, es decir, en puntos de equilibrio con algún valor propio con parte real nula. En tal caso, la parte lineal no basta para determinar la dinámica. Es decir, existen términos no lineales de *resonancia* en el campo vectorial que no se pueden eliminar mediante cambios de coordenadas. La forma normal, en tal caso, nos entrega aquellos términos resonantes esenciales.

Con lo anterior en mente, volvemos a la pregunta: ¿Cómo hallar h_2 tal que la expresión (2.10) se simplifique al máximo, es decir, que solo sobrevivan los términos resonantes? Para responder esta pregunta debemos definir ciertos conceptos previos.

Sea H_k el espacio vectorial de campos de vectores en $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado k. Por ejemplo, si $n = k = 2$ el espacio H_2 posee la base canónica

$$\mathcal{B}_2 = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}.$$

Consideremos el operador lineal en H_k definido por el *Corchete de Lie*:

$$\begin{aligned} [\,\cdot\,, L] : \ & H_k \to H_k, \\ & Y \mapsto [Y, L] = (DL)Y - (DY)L, \end{aligned}$$

donde $L = Df(0)x$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. El Corchete de Lie es una aplicación bilineal en las dos componentes y se tiene la forma explícita:

$$\left[\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L^1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial L^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial L^n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial L^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y^1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial Y^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial Y^n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial Y^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix},$$

o equivalentemente en forma más compacta:

$$[Y, L]^i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L^i}{\partial x_j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} L^j \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Supongamos que $Df(0) = J$ está en su forma canónica de Jordan. Luego, $L = Df(0)x = Jx$, y entonces $DL = J$. Por definición, el polinomio $h_2 \in H_2$. Luego,

$$[h_2(y), L] = Jh_2(y) - Dh_2(y)Jy \in [H_2, L],$$

donde $[H_2, L]$ es la imagen del operador $[\,\cdot\,, L]$. Así los términos cuadráticos en (2.10) quedan:

$$[h_2(y), L] + F_2(y) \in H_2. \tag{2.11}$$

Del álgebra lineal se tiene que H_2 puede representarse como

$$H_2 \cong [H_2, L] \oplus G_2,$$

donde G_2 es un subespacio vectorial complementario de $[H_2, L]$ en H_2.

Caso 1. Si $F_2 \in [H_2, L]$, entonces es posible hallar h_2 tal que

$$[h_2(y), L] = -F_2(y).$$

Es decir, todos los términos cuadráticos se pueden eliminar. (En particular, si $[H_2, L] \cong H_2$ entonces todos los términos cuadráticos se pueden eliminar.)

Caso 2. Si $F_2 \notin [H_2, L]$, denotemos

$$F_2(y) = F_2^S(y) + F_2^R(y),$$

donde $F_2^S \in [H_2, L]$ son los términos "superfluos" y $F_2^R \in G_2$ son los términos resonantes. Por lo tanto podemos escoger h_2 tal que solo aquellos términos de F_2 que están en G_2 sobrevivan en (2.11). Es decir, escogemos h_2 tal que

$$[h_2(y), L] = -F_2^S(y).$$

Luego, la expresión (2.11) se reduce a

$$[h_2(y), L] + F_2^S(y) + F_2^R(y) = F_2^R(y).$$

En tal caso, el sistema (2.9) después del cambio de coordenadas (2.7) queda:

$$\dot{y} = Jy + F_2^R(y) + \bar{F}_3(y) + \ldots + \bar{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r), \tag{2.12}$$

en donde habremos reducido lo más posible los términos cuadráticos.

Eliminando términos cúbicos.

Sea el cambio de coordenadas $y \mapsto y + h_3(y)$, con $h_3(y) \in H_3$, el espacio vectorial de campos de vectores cuyas funciones coordenada son polinomios homogéneos de grado 3. Sustituyendo en (2.12) y después de un poco de álgebra obtenemos

$$\dot{y} = Jy + F_2^R(y) + Jh_3(y) - Dh_3(y)Jy + \bar{F}_3(y) + \hat{F}_4(y) \ldots + \hat{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r),$$

donde los términos $\hat{F}_k(y)$, $4 \leq k \leq r-1$, indican que el cambio de coordenadas ha modificado los términos de orden mayor a tres. Los términos cúbicos son ahora

$$Jh_3(y) - Dh_3(y)Jy + \bar{F}_3(y) = [h_3(y), L] + \bar{F}_3(y), \tag{2.13}$$

donde la aplicación lineal $[\,\cdot\,, L] : H_3 \to H_3$ queda ahora definida por el corchete de Lie en H_3. Si denotamos su imagen por $[H_3, L]$ entonces

$$H_3 \cong [H_3, L] \oplus G_3,$$

donde G_3 es un subespacio vectorial complementario de $[H_3, L]$ en H_3. Denotemos

$$\bar{F}_3(y) = F_3^S(y) + F_3^R(y),$$

donde $F_3^S(y) \in [H_3, L]$ y $F_3^R(y) \in G_3$. Luego, los términos cúbicos (2.13) se pueden simplificar al escoger $h_3(y)$ tal que

$$[h_3(y), L] = -\bar{F}_3^S(y).$$

De forma inductiva obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5 *(Forma Normal) Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema de clase C^r, con $f(0) = 0$ y $Jx = L$, donde J es la forma canónica de Jordan —o la diagonalización, según corresponda— de $Df(0)$. Considere el corchete de Lie $[\,\cdot\,, L] : H_k \to H_k$ y sea G_k un subespacio vectorial complementario de la imagen $[H_k, L]$ en H_k, es decir, $H_k \cong [H_k, L] \oplus G_k$. Entonces existe un cambio de coordenadas analítico en una vecindad de $x = 0$ que transforma el sistema en*

$$\dot{y} = Jy + F_2^R(y) + F_3^3(y) + \ldots + F_{r-1}^R(y) + O(|y|^r), \tag{2.14}$$

donde $F_k^R \in G_k$, $2 \leq k \leq r-1$.

Definición 13 *Bajo las hipótesis del teorema anterior, decimos que el sistema (2.14) corresponde a una* **forma normal** *hasta orden $r-1$ de $\dot{x} = f(x)$. Los términos $F_k^R, 2 \leq k \leq r-1$, se dicen* **términos resonantes**.

Observaciones:

1. La estructura de los términos no lineales en (2.14) queda enteramente determinada por la parte lineal del campo vectorial a través del corchete de Lie.

2. Al simplificar términos de orden k, no se afecta ningún otro término de orden menor. Sin embargo, los términos de orden mayor sí se ven modificados. Esto sucede en cada etapa de la aplicación de este método. Por lo tanto, para calcular los coeficientes de cada término de la forma normal en términos del campo original, uno debe hacer un seguimiento de cómo los términos de orden superior van modificándose por los sucesivos cambios de coordenadas.

3. En el mismo espíritu, también es posible enunciar un teorema de la forma normal para puntos fijos de sistemas dinámicos discretos.

Ejemplo 15 Consideremos el siguiente sistema planar

$$X : \begin{cases} \dot{x} = & X_1(x,y) = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + TOS, \\ \dot{y} = & X_2(x,y) = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + TOS, \end{cases}$$

donde TOS denota los *términos de orden superior*. Encontremos una forma normal de grado 2. Claramente $(0,0)$ es un punto de equilibrio. Además

$$DX(0,0) = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

está en su forma de Jordan y posee valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i$; luego el origen es un equilibrio no-hiperbólico.

Además,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Luego, definimos el corchete de Lie $[\ \cdot\ , L] : H_2 \to H_2$, donde H_2 es el espacio vectorial de campos de vectores en $\mathbb{R}^2$ cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2. Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B}_2 = \{(x^2,0), (xy,0), (y^2,0), (0,x^2), (0,xy), (0,y^2)\}.$$

Dada la linealidad de $[\ \cdot\ , L]$ basta buscar las imágenes de los vectores en esta base para determinar la imagen $[H_2, L]$ y su complemento G_2.

Para facilitar los cálculos es conveniente utilizar la siguiente notación para el campo de vectores:

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Con esta notación, la base $\mathcal{B}$ queda de la forma

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ x^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\}.$$

Se tiene

$$\left[\begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x} & \dfrac{\partial X_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x} & \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Realizando las cuentas de manera análoga con el resto de los elementos de las base $\mathcal{B}_2$ obtenemos el cuadro resumen 2.1.

Sea A la matriz asociada a la transformación lineal $\left[\ \cdot\ , \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right]$ en la base $\mathcal{B}_2$. Así,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuadro 2.1:

$\left[\,\cdot\,,\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right]$	x^2	xy	y^2
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	$2xy\dfrac{\partial}{\partial x}+x^2\dfrac{\partial}{\partial y}$	$(y^2-x^2)\dfrac{\partial}{\partial x}+xy\dfrac{\partial}{\partial y}$	$-2xy\dfrac{\partial}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$
$\dfrac{\partial}{\partial y}$	$-x^2\dfrac{\partial}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial}{\partial y}$	$-xy\dfrac{\partial}{\partial x}+(y^2-x^2)\dfrac{\partial}{\partial y}$	$-y^2\dfrac{\partial}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial}{\partial y}$

Luego, $\det(A) \neq 0$ y $\left[\,\cdot\,,\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right]$ es un isomorfismo. Por lo tanto,

$$\left[H_2,\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] \cong H_2$$

y todos los términos cuadráticos del campo X pueden eliminarse mediante un cambio de coordenadas apropiado. Por lo tanto, la forma normal hasta orden 2 buscada es

$$\begin{cases} \dot{u} = & -v + O(|(u,v)|^3), \\ \dot{v} = & u + O(|(u,v)|^3). \end{cases}$$

Ejemplo 16 Consideremos el siguiente sistema planar

$$X : \begin{cases} \dot{x} = & X_1(x,y) = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + TOS, \\ \dot{y} = & X_2(x,y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + TOS, \end{cases}$$

donde TOS denota los términos de orden superior. Encontremos una forma normal de grado 2. Claramente $(0,0)$ es un punto de equilibrio. Además

$$DX(0,0) = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

está en su forma de Jordan y ambos valores propios son $\lambda_{1,2} = 0$; luego el origen es un equilibrio no-hiperbólico.

Sea

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, definimos el corchete de Lie $[\ \cdot\ , L] : H_2 \to H_2$, donde H_2 es el espacio vectorial de campos de vectores en $\mathbb{R}^2$ cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2. Sea la base canónica de H_2

$$\mathcal{B}_2 = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}.$$

Dada la linealidad de $[\ \cdot\ , L]$ basta buscar las imágenes de los vectores en esta base para determinar la imagen $[H_2, L]$ y su complemento G_2.

Se tiene

$$\left[\begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x} & \dfrac{\partial X_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x} & \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Realizando las cuentas de manera análoga con el resto de los elemento de las base $\mathcal{B}_2$ obtenemos el cuadro resumen 2.2.

Sea A la matriz asociada a la transformación lineal $\left[\ \cdot\ , \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ en la base $\mathcal{B}_2$. Así,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuadro 2.2:

$\left[\,\cdot\,,\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right]$	x^2	xy	y^2
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	$-2xy\dfrac{\partial}{\partial x}$	$-y^2\dfrac{\partial}{\partial x}$	0
$\dfrac{\partial}{\partial y}$	$x^2\dfrac{\partial}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial}{\partial y}$	$xy\dfrac{\partial}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$	$y^2\dfrac{\partial}{\partial x}$

Luego, $\det(A)=0$ y $\left[\,\cdot\,,\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}\right]$ no es un isomorfismo. Por lo tanto, el subespacio G_2 no es trivial. La imagen de H_2 por el corchete de Lie está generada por

$$\left[H_2,\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}\right]=\left\langle\left\{-2xy\frac{\partial}{\partial x},-y^2\frac{\partial}{\partial x},x^2\frac{\partial}{\partial x}-2xy\frac{\partial}{\partial y},xy\frac{\partial}{\partial x}-y^2\frac{\partial}{\partial y},y^2\frac{\partial}{\partial x}\right\}\right\rangle.$$

Por lo tanto, una base de $\left[H_2,\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}\right]$ es

$$\tilde{\mathcal{B}}=\left\{xy\frac{\partial}{\partial x},y^2\frac{\partial}{\partial x},x^2\frac{\partial}{\partial x}-2xy\frac{\partial}{\partial y},xy\frac{\partial}{\partial x}-y^2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

y se tiene

$$\dim\left[H_2,\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}\right]=4.$$

Luego, $\dim G_2=2$, pues $H_2\cong\left[H_2,\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}\right]\oplus G_2$. Por lo tanto una base para G_2 es

$$\left\{x^2\frac{\partial}{\partial x},x^2\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

Por el teorema de la forma normal existe un cambio de coordenadas analítico tal que el sistema original en las nuevas coordenadas tiene la forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = & v + \alpha_1 u^2 + O(|(u,v)|^3), \\ \dot{v} = & \alpha_2 u^2 + O(|(u,v)|^3). \end{cases}$$

Observación. En el ejemplo anterior notemos que la base de $\left[H_2, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ no es única. Luego las formas normales generalmente tampoco son únicas. Por ejemplo, los vectores

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes y son ortogonales a cada columna de la matriz A. Por lo tanto, generan G_2. Así, la forma normal nos queda:

$$\begin{cases} \dot{u} = & v + \alpha_1 u^2 + O(|(u,v)|^3), \\ \dot{v} = & \alpha_2 u^2 + \alpha_3 uv + O(|(u,v)|^3). \end{cases}$$

Otra posibilidad es:

$$\begin{cases} \dot{u} = & v + O(|(u,v)|^3), \\ \dot{v} = & \alpha_1 u^2 + \alpha_2 uv + O(|(u,v)|^3). \end{cases}$$

2.2. Formas normales topológicas de bifurcaciones

Considere el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{2.15}$$

con f suficientemente suave en (x,α). Supongamos que $f(0,0) = 0$. Nuestro deseo sigue siendo simplificar (2.15) eliminando los términos superfluos que no influyen en la dinámica por medio de cambios de coordenadas (difeomorfismos). En este caso el truco es extender el sistema a uno más grande:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,\alpha), \\ \dot{\alpha} &= 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Uno puede calcular una forma normal para (2.16) imponiendo que las transformaciones de coordenadas $H(x, \alpha)$ sean de la forma

$$H(x, \alpha) = (h(x, \alpha), \alpha) = (y, \alpha).$$

De esta forma se deja la ecuación $\dot{\alpha} = 0$ invariante. En la práctica uno procede como en el caso ya descrito anteriormente pero los coeficientes de (2.16) deben considerarse como series de potencias tanto en x como en el parámetro α.

Supongamos que (2.15) presenta una bifurcación X de codimensión k (i.e., que satisface k condiciones algebraicas) en el equilibrio $x^* = 0$ cuando $\alpha = 0$. Y supongamos que —por ejemplo, ocupando el teorema de la forma normal— logramos construir un sistema "simple"

$$\dot{y} = g(y, \beta; \sigma), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l, \tag{2.17}$$

polinomial en y_i, $i = 1, \dots, n$, que tenga para $\beta = 0$ un equilibrio en $y^* = 0$ satisfaciendo las mismas k condiciones de bifurcación que (2.15). Aquí el vector $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ corresponde a los coeficientes de los polinomios de (2.17); por ejemplo,

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & i \neq i_0, \\ \pm 1, & i = i_0. \end{cases}$$

Definición 14 *El sistema* (2.17) *se dice una* **forma normal topológica** *para la bifurcación X si cualquier sistema genérico* (2.15) *con equilibrio en $x^* = 0$ satisfaciendo las mismas condiciones de bifurcación en $\alpha = 0$ es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a* (2.17) *para ciertos valores de los coeficientes σ_i.*

En muchos casos se puede probar que las formas normales topológicas que derivemos son deformaciones versales de las correspondientes bifurcaciones. Nos concentraremos en formas normales topológicas con el mínimo número de parámetros necesarios, también llamadas *desdoblamientos miniversales* —tan solo k parámetros si la codimensión de la bifurcación es k. En ese sentido, una forma normal topológica para una bifurcación es una versión simplificada y cualitativamente equivalente de todo campo de vectores que exhibe esa misma bifurcación.