

## 1.6. Estabilidad estructural

Existen sistemas dinámicos cuyo retrato de fase (en algún dominio) no cambia cualitativamente bajo perturbaciones suficientemente pequeñas; estos son los sistemas *estructuralmente estables*. Por tanto, nos interesa estudiar cuándo la propiedad de equivalencia topológica se preserva (o se rompe) en una vecindad de un sistema en particular al mover un parámetro. La noción de estabilidad estructural también nos permite dar un marco formal para los resultados que se desarrollan a lo largo de la teoría de bifurcaciones; por ejemplo, dado un desdoblamiento o familia  $f(x, \mu)$ , nos ayuda a establecer en qué regiones del espacio de parámetros los retratos de fase respectivos son equivalentes. Esta misma noción también da pie a estudiar qué propiedades pueden ser genéricas en un sistema dinámico, i.e., dadas ciertas condiciones, cuáles son las características o ingredientes dinámicos típicos que uno puede esperar que muestre un sistema dinámico (y cuáles no lo son!).

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

donde  $f$  es suave, y supongamos que  $f$  posee un equilibrio hiperbólico en  $x_0$ ,  $f(x_0) = 0$ . Sea  $\epsilon \in \mathbb{R}$  pequeño y consideremos una perturbación dada por:

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

con  $g$  suave; aquí,  $\epsilon$  podría ser positivo o negativo. Por la dependencia suave de las soluciones con respecto a los parámetros, es claro que si  $\epsilon \rightarrow 0$  en (1.4), uno recupera el sistema original (1.3).

Busquemos equilibrios de (1.4). La expresión

$$F(x, \epsilon) = f(x) + \epsilon g(x) = 0$$

define una ecuación para puntos de equilibrio de (1.4) con  $F(x_0, 0) = 0$ . Por otro lado, también tenemos que la matriz Jacobiana

$$F_x(x_0, 0) = Df(x_0) =: A_0$$

es invertible, pues  $x_0$  es hiperbólico. Luego, por el teorema de la función implícita, existe una función suave  $x = x(\epsilon)$ , con  $x(0) = x_0$  tal que  $F(x(\epsilon), \epsilon) = 0$ , para

todo  $|\epsilon|$  pequeño. Es decir, localmente es posible definir una familia de equilibrios de (1.4), parametrizada por  $\epsilon$ , que contiene a  $x_0$ . ¿Cuál es la estabilidad de  $x(\epsilon)$ ?

La matriz Jacobiana de (1.4) en  $x(\epsilon)$  es

$$A_\epsilon := (Df(x) + \epsilon Dg(x))|_{x=x(\epsilon)},$$

la cual varía en forma suave con  $\epsilon$  y coincide con  $A_0$  en  $\epsilon = 0$ . Por otro lado, los valores propios de una matriz que depende suavemente de un parámetro cambian continuamente con la variación de este parámetro (la variación es suave si los valores propios permanecen simples). Por lo tanto,  $x(\epsilon)$  no tendrá valores propios en el eje imaginario para ningún  $|\epsilon|$  suficientemente pequeño. Luego,  $x(\epsilon)$  es un equilibrio hiperbólico para todo  $|\epsilon|$  suficientemente pequeño. Además, los números  $n_+$  y  $n_-$  de valores propios inestables y estables de  $A_\epsilon$  no cambian debido a la continuidad. En resumen, los sistemas (1.3) y (1.4) son localmente topológicamente equivalentes cerca de los equilibrios. De hecho, para todo  $|\epsilon|$  pequeño, existe una vecindad  $U_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$  del equilibrio  $x(\epsilon)$  en la cual (1.4) es topológicamente equivalente a (1.3) en  $U_0$ .

En estas condiciones, decimos que el equilibrio hiperbólico  $x_0$  de (1.3) *persiste* bajo pequeñas perturbaciones suaves de la forma (1.4). Mediante argumentos similares, se tiene que el siguiente resultado.

**Teorema 1** *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $f$  es suave, y supongamos que  $f$  posee un equilibrio hiperbólico en  $x_0$ ,  $f(x_0) = 0$ . Entonces para todo  $|\epsilon|$  suficientemente pequeño, en un sistema suave de la forma

$$\dot{x} = G(x, \epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \epsilon \in \mathbb{R},$$

donde  $G(x, 0) = f(x)$ , existe un equilibrio  $x(\epsilon)$  con  $x(0) = x_0$  tal que el retrato de fase local en una vecindad de  $x(\epsilon)$  será cualitativamente equivalente al de una vecindad de  $x_0$ .

Como consecuencia, al perturbar un sistema cerca de un equilibrio hiperbólico, éste persiste: sus coordenadas pueden variar un poco pero su estabilidad local se

preserva. Este resultado también nos dice que, localmente, la cantidad de equilibrios hiperbólicos no puede cambiar ante pequeñas perturbaciones del parámetro ni tampoco pueden aparecer órbitas periódicas infinitesimales.

A continuación veremos qué otras características genéricas debería cumplir un sistema para que la propiedad de equivalencia topológica se preserve al mover un parámetro (...y qué esperar si estas condiciones no se cumplen!). Nuestro problema ahora se enmarca en un espacio normado de campos de vectores.

**Definición 8** *Consideremos los dos sistemas*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

con  $f$  y  $g$  suaves. Definimos la **distancia** entre (1.5) y (1.6) en una región cerrada  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  por

$$\|f - g\| = \sup_{x \in \Omega} \{|f(x) - g(x)| + |Df(x) - Dg(x)|\}.$$

Decimos que los sistemas (1.5) y (1.6) son  $\epsilon$ -**cercanos** en  $\Omega$  si  $\|f - g\| < \epsilon$ . Aquí,  $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  es la norma Euclídeana, y  $|A|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$  es la norma considerada para matrices.

OBSERVACIONES:

1. Con esta definición, dos sistemas son cercanos si los lados derechos de las ecuaciones son cercanos y *además* sus primeras derivadas parciales son cercanas. Luego, con esta métrica, uno dice que los sistemas son  $C^1$ -cercanos.
2. La distancia entre (1.5) y (1.6) es proporcional a  $|\epsilon|$ . De hecho, se tiene  $\|f - g\| = C|\epsilon|$ , para alguna constante  $C > 0$ .
3. La definición anterior también se puede aplicar a sistemas discretos.
4. ¿Qué pasa si no se consideran las primeras derivadas en la definición anterior? En la figura siguiente se ven las gráficas esquemáticas de dos sistemas unidimensionales de la forma (1.5) y (1.6) con  $n = 1$ . El sistema (1.5) posee un solo equilibrio, pero el sistema (1.6) tiene cinco. Si consideramos solo la

norma  $C^0$ , esto es,  $\sup_{x \in \Omega} \{|f(x) - g(x)|\} < \epsilon$ , entonces  $f$  y  $g$  son  $\epsilon$ -ceranos. Sin embargo, tienen un número diferente de puntos de equilibrio en cualquier vecindad del equilibrio de (1.5) y claramente no son topológicamente equivalentes.

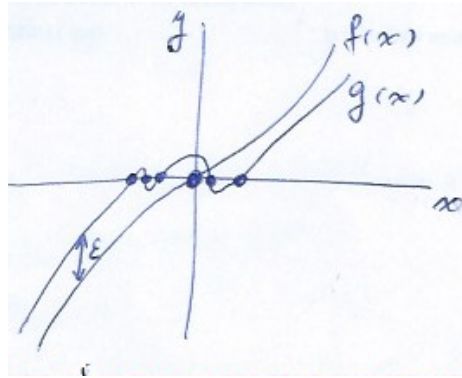


Figura 1.7: Al considerar la distancia  $C^0$ ,  $f$  y  $g$  son  $\epsilon$ -ceranos. Sin embargo, no son topológicamente equivalentes pues tienen una cantidad distinta de puntos de equilibrio. Al tomar la distancia  $C^1$  los sistemas  $f$  y  $g$  claramente ya no son  $\epsilon$ -ceranos.

**Definición 9** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Un campo de vectores  $f$  suave en  $\mathbb{R}^n$  se dice **estructuralmente estable** si existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo campo  $g$  suave que sea  $\epsilon$ -cerano a  $f$ , se tiene que  $f$  y  $g$  son topológicamente equivalentes en  $\Omega$ . Es decir, existe un homeomorfismo  $\phi : \Omega \rightarrow \Omega$  que lleva órbitas de  $f$  en órbitas de  $g$  y preserva su orientación en el tiempo. Si un campo  $f$  no es estructuralmente estable, se dice que  $f$  es **estructuralmente inestable**.

**Ejemplo 10** En la figura 1.8 vemos dos sistemas estructuralmente estables (lado izquierdo) y dos estructuralmente inestables (lado derecho). En estos últimos casos, una pequeña perturbación puede provocar que el equilibrio (resp. el ciclo límite) en la frontera de  $\Omega$  se mueva hacia el interior o el exterior de  $\Omega$  modificando la cantidad de conjuntos invariantes del sistema en  $\Omega$ .

**Ejemplo 11** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

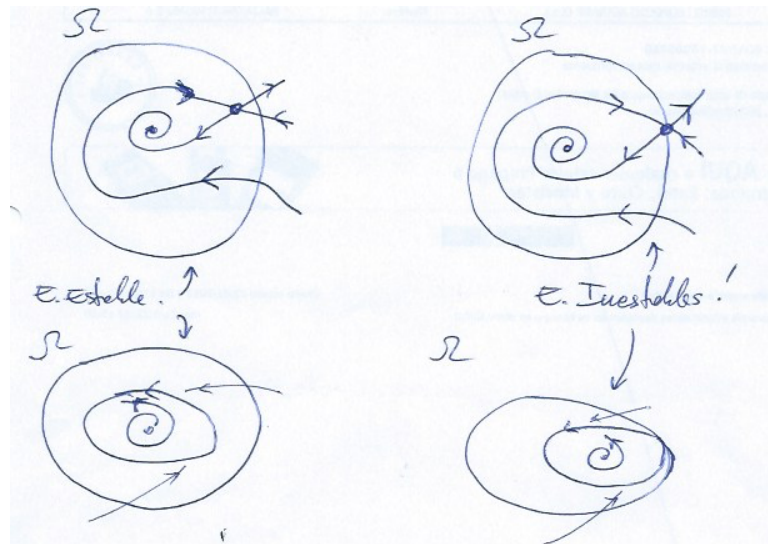


Figura 1.8: Ejemplos esquemáticos de sistemas estructuralmente estables e inestable en el plano.

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Este sistema no es estructuralmente estable en ningún compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$  que contenga al origen. Veamos por qué. Sea

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con  $|\mu|$  pequeño. Luego, dado que  $K$  es compacto,

$$\|f - g\| = \max_K \left\{ \mu \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| + \mu \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \right\} = |\mu| \left( \max_K |(x, y)| + 1 \right).$$

Sea  $d = \text{diam}(K)$ , esto es,  $d = \max_K \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right|$  es la mayor distancia entre dos puntos de  $K$ . Si escogemos  $|\mu| = \frac{\epsilon}{d+2}$ , con  $\epsilon > 0$ , se tiene:

$$\|f - g\| < |\mu|(d+1) \leq \frac{\epsilon}{d+2}(d+1) < \epsilon.$$

Por lo tanto,  $f$  y  $g$  son  $\epsilon$ -ceranos. Sin embargo, por otro lado, los posibles retratos de fase de  $g$  son como en la figura [1.9](#).

Claramente,  $f$  no es topológicamente equivalente a  $g$  para  $\mu \neq 0$ . Por lo tanto,  $f$  no es estructuralmente estable. En este caso,  $\mu = 0$  es un valor de bifurcación para  $g$ .

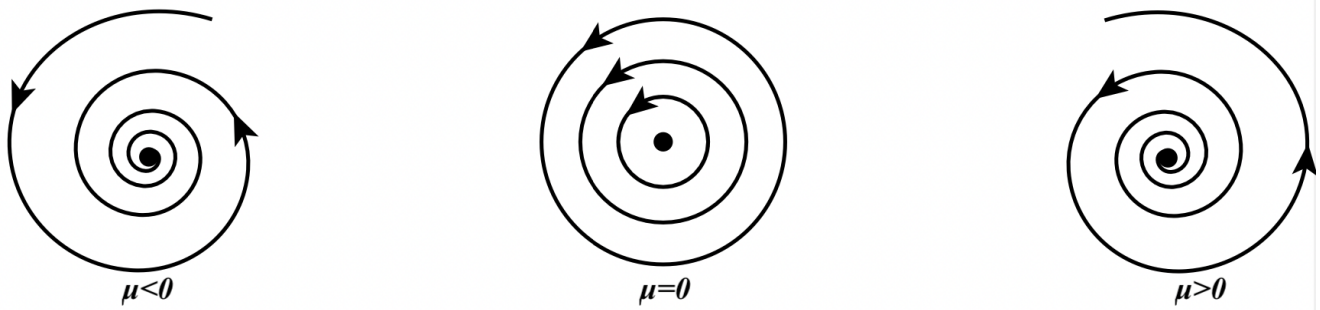


Figura 1.9: Retratos de fase representativos —para  $\mu < 0$  y  $\mu > 0$ , respectivamente— de perturbaciones  $\epsilon$ -cercanas a un centro lineal ( $\mu = 0$ ), el cual es estructuralmente inestable.

**Ejemplo 12** Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu y + x - x^3, \end{cases}$$

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Los retratos de fase posibles son los de la figura 1.10 para  $|\mu|$  suficientemente pequeño.

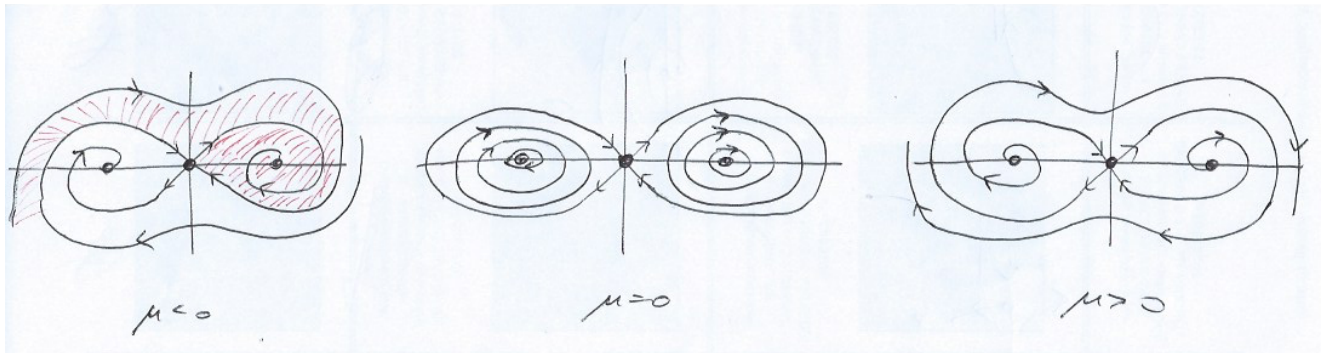


Figura 1.10: Retratos de fase representativos —para  $\mu < 0$  y  $\mu > 0$ , respectivamente— de perturbaciones  $\epsilon$ -cercanas a un sistema conservativo ( $\mu = 0$ ), el cual es estructuralmente inestable.

Si  $\mu < 0$ , el sistema posee dos focos estables hiperbólicos y un punto silla hiperbólico. Estos focos se vuelven inestables si  $\mu > 0$ . La transición ocurre en  $\mu = 0$  en que el sistema es conservativo, con cantidad conservada dada por

$$E(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Luego, las órbitas del sistema con  $\mu = 0$  están contenidas en las curvas de nivel de  $E$ . En particular, hay dos centros rodeados por familias de órbitas periódicas —una cantidad infinita. Además, las variedades estable e inestable del punto silla se intersectan a lo largo de dos conexiones homoclínicas. Cada una de estas intersecciones es no-transversal, pues ocurre a lo largo de *toda* la conexión. Por el contrario, si  $\mu \neq 0$ , vemos que estas conexiones se rompen. No solo el comportamiento cualitativo cerca de los puntos de equilibrio  $(\pm 1, 0)$  cambia a medida que  $\mu$  varía desde cero, sino que tampoco hay conexiones entre puntos silla para  $\mu \neq 0$ , es decir, no persisten bajo pequeñas perturbaciones. En definitiva, el sistema con  $\mu = 0$  es estructuralmente inestable.

### 1.6.1. Sistemas estructuralmente estables en $\mathbb{R}^2$

En el caso planar podemos caracterizar completamente qué propiedades debe tener un sistema dinámico estructuralmente estable.

**Teorema 2** (*Andronov & Pontryagin, 1937*) *Un sistema dinámico suave  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , es estructuralmente estable en una región  $D \subset \mathbb{R}^2$  si y solo si*

1. *El campo posee una cantidad finita de puntos de equilibrio y ciclos límite en  $D$ , y todos son hiperbólicos.*
2. *No existen conexiones homoclínicas ni heteroclínicas.*

#### COMENTARIOS:

1. Este teorema nos da una descripción completa de los sistemas estructuralmente estables en el plano. También existe una generalización probada por Peixoto (1962) para sistemas definidos en variedades compactas de dimensión dos.
2. En el espacio de sistemas planares de clase  $C^r$  sobre la región  $D \subset \mathbb{R}^2$ , aquellos campos que son estructuralmente estables forman un conjunto abierto y denso. Es decir, un sistema típico (i.e., genérico) en el plano satisface las condiciones de Andronov & Pontryagin. Por lo tanto, si un flujo contiene,

por ejemplo, un equilibrio no hiperbólico, entonces una pequeña perturbación basta para volverlo hiperbólico; similarmente, un equilibrio hiperbólico permanece hiperbólico bajo cualquier perturbación suficientemente pequeña.

3. El teorema anterior implica que típicamente un campo de vectores bidimensional puede tener solamente equilibrios atractores, repulsores, sillars, y órbitas cerradas estables e inestables en su conjunto invariante. En efecto, el teorema de Poincaré-Bendixson implica que no pueden haber conjuntos límite distintos a equilibrios, órbitas cerradas y órbitas homo/heteroclínicas, y éstas últimas están descartadas por las hipótesis de Andronov & Pontryagin.

### 1.6.2. Estabilidad estructural y codimensión

Si uno considera el diagrama de bifurcación de un sistema planar genérico dependiendo de  $k$  parámetros, éste define una familia

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^k,$$

de sistemas estructuralmente estables en las regiones abiertas  $k$ -dimensionales cuyas fronteras estén formadas por conjuntos de bifurcación. Por ejemplo, considere el diagrama de la figura [1.11](#). La variedad  $\mathcal{B}$  es una frontera de bifurcación (de codimensión 1 en el espacio  $k$ -dimensional) y la familia  $\dot{x} = f(x, \alpha)$  define sistemas estructuralmente estables en los abiertos  $A_1$  y  $A_2$ . Cualquier sistema en  $\mathbb{R}^2$  que no satisfaga al menos una de las características del teorema anterior es estructuralmente inestable. En particular, tal sistema se encuentra en alguna frontera de bifurcación en el espacio de parámetros, por ejemplo la variedad  $\mathcal{B}$ .

Sin embargo, si *restringimos* la familia a  $\mathcal{B}$  y consideramos la topología inducida en  $\mathcal{B}$ , entonces el sistema (restringido) también será estructuralmente estable en conjuntos abiertos de  $\mathcal{B}$  (i.e., de codimensión 1 en  $\mathbb{R}^k$ ) delimitados por subvariedades que definan bifurcaciones de codimensión 2 o mayor. Justamente, la codimensión de la subvariedad nos indica la codimensión de la bifurcación respectiva, es decir, el número de condiciones algebraicas independientes que definen esa variedad.

Aún cuando este ejemplo está planteado para sistemas planares, las conclusiones análogas en espacios de estado de dimensión arbitraria siguen siendo válidas.



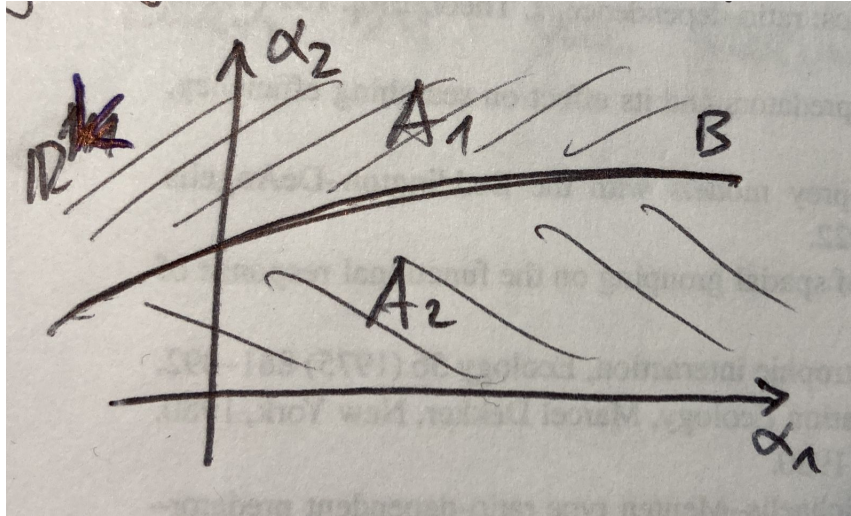


Figura 1.11: Representación esquemática de un espacio de parámetros subdividido por una frontera de bifurcación de codimensión uno. La familia  $\dot{x} = f(x, \alpha)$  define sistemas estructuralmente estables en los abiertos  $A_1$  y  $A_2$ .

En atención a esta última observación es posible dar la siguiente definición equivalente de codimensión.

**Definición 10** Una bifurcación posee **codimensión**  $m$  si ocurre en forma estructuralmente estable en sistemas genéricos a  $m$  parámetros.

### 1.6.3. Sistemas de Morse-Smale

El teorema anterior, en general, no es válido en el caso  $n$ -dimensional,  $n \geq 3$ . Ni siquiera es válido en sistemas bidimensionales cuyo espacio de fase no sea  $\mathbb{R}^2$ . Aún así, podemos decir al menos qué propiedades uno debería esperar para que un sistema sea candidato a ser estructuralmente estable. Por ejemplo, el siguiente teorema es una formalización del resultado demostrado al inicio de este capítulo, a saber, nos dice que en el caso general  $n$ -dimensional, bajo pequeñas perturbaciones, un equilibrio hiperbólico varía sus coordenadas en forma continua y su estabilidad se preserva.

**Teorema 3** Sea  $f$  un campo de vectores suave en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo campo de vectores  $g$ ,  $\delta$ -cercano a  $f$ , existe  $y_0$  en una vecindad

de  $x_0, y \in N_\epsilon(x_0)$ , de tamaño  $\epsilon$ , tal que  $y_0$  es un equilibrio hiperbólico de  $g$ . Además,  $Df(x_0)$  y  $Dg(y_0)$  tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa y positiva, respectivamente.

Asímimo, dado que el teorema anterior también es cierto en el caso discreto, podemos enunciar una versión análoga para el caso de órbitas periódicas de campos de vectores.

**Teorema 4** *Sea  $f$  un campo de vectores suave en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con una órbita periódica hiperbólica  $\Gamma$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo campo de vectores  $g$ ,  $\delta$ -cercano a  $f$ , existe una órbita periódica  $\Gamma'$  de  $g$  contenida en una  $\epsilon$ -vecindad tubular de  $\Gamma$ . Más aún, las variedades estable  $W^s(\Gamma)$  y  $W^s(\Gamma')$  y las inestables  $W^u(\Gamma)$  y  $W^u(\Gamma')$  tienen las mismas dimensiones.*

Para entender qué propiedades son características en un sistema estructuralmente estable en el caso  $n$ -dimensional, recordemos la noción de punto no-errante.

**Definición 11** *Un punto  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  se dice un **punto no-errante** del flujo  $\Phi^t$  definido por el campo de vectores  $\dot{x} = f(x)$ , si para toda vecindad  $U$  de  $x$  y para todo  $T > 0$ , existe  $t > T$  tal que*

$$\Phi^t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

*El conjunto no-errante del flujo  $\Phi^t$  consiste de todos los puntos no-errantes en  $\Omega$ .*

En esta definición, un punto no-errante es aquel cuya órbita constantemente se acerca al mismo punto, pudiendo alejarse de él, pero regresando eventualmente una y otra vez.

**Ejemplo 13** Los puntos de equilibrio y puntos en órbitas periódicas son no-errantes.

**Ejemplo 14** Sea  $S$  el cuadrado unitario con lados opuestos identificados formando un toro  $\mathbb{T}^2$ , y sean  $(x, y)$  coordenadas en  $S$ , las cuales están identificadas módulo 1. El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_1, \\ \dot{y} &= \omega_2,\end{aligned}$$

con  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^2$ , define el flujo en el toro  $\mathbb{T}^2$

$$\Phi^t(x_0, y_0) = (\omega_1 t + x_0, \omega_2 t + y_0)^t.$$

No es difícil ver que si  $\omega_1/\omega_2$  es racional, entonces todos los puntos en  $S$  están en órbitas periódicas. Por otro lado, si  $\omega_1/\omega_2$  es irracional, todos los puntos en  $S$  están en órbitas que nunca se cierran, pero que cubren densamente a  $\mathbb{T}^2$ . Ambos casos claramente no son topológicamente equivalentes entre sí. En ambos casos, todos los puntos de  $\mathbb{T}^2$  son no-errantes. Además, en *ambos* casos, el sistema es estructuralmente inestable pues cualquier pequeña perturbación  $\epsilon \neq 0$  en la razón  $\frac{\omega_1 + \epsilon}{\omega_2}$  cambia el caso racional en irracional o viceversa. Luego, en ambos casos, tenemos un sistema bidimensional (pero no definido en  $\mathbb{R}^2$ ) estructuralmente inestable cuyo conjunto no-errante se compone de todo el espacio de fase  $\mathbb{T}^2$ .

Los ejemplos anteriores nos sugieren ciertas propiedades deseadas que uno intuitivamente esperaría en un sistema genérico.

**Definición 12** *Un sistema de Morse-Smale es uno para el cual:*

1. *El número de puntos de equilibrio y órbitas periódicas es finito y cada uno es hiperbólico.*
2. *Todas las variedades estables e inestables que se intersecten lo hacen transversalmente.*
3. *Los conjuntos no-errantes consisten únicamente de puntos de equilibrio y órbitas periódicas.*

Se puede demostrar que los sistemas de Morse-Smale restringidos a dominios  $n$ -dimensionales compactos son estructuralmente estables. Sin embargo, el recíproco no es cierto. De hecho, existen sistemas (muchos de ellos provenientes de modelos aplicados concretos) que **no** satisfacen estas condiciones de Morse-Smale y que, aún así, son estructuralmente estables. El mismo Smale construyó un famoso contraejemplo: un sistema estructuralmente estable con un conjunto no-errante que contiene un conjunto invariante caótico (i.e., no es ni un punto

de equilibrio ni una órbita periódica) y un número infinito de órbitas periódicas en una región compacta: La herradura de Smale. Efectivamente, una pequeña perturbación  $C^1$ -cercana del mapeo puede deformar la herradura, pero el conjunto hiperbólico invariante persiste. Más adelante estudiaremos bifurcaciones que generan herraduras de Smale en secciones transversales de Poincaré.