

Capítulo 1

Conceptos preliminares

1.1. ¿Para qué estudiar bifurcaciones?

Un ejemplo introductorio. Considere el oscilador armónico con fricción. Físicamente, este sistema puede interpretarse como una masa unida a un resorte, el cual está sujeto a una pared, y cuya energía es disipada por el roce con el suelo. La segunda ley de Newton nos dice que el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de reposo viene dado por la EDO de 2do orden:

$$\ddot{x} - c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = cy - \omega^2 x. \end{cases}$$

Éste es un sistema lineal y por lo tanto no es difícil hallar una solución explícita. Sin embargo, dado que se trata de un sistema físico, también podemos dar una descripción intuitiva del comportamiento de las soluciones como en la figura 1.1. Si $c = 0$, en la figura 1.1(b), no se considera roce con el suelo y el sistema conserva la energía. La dinámica resultante corresponde a un movimiento oscilatorio perfectamente sinusoidal. El origen en el plano (x, y) es un *centro*, un equilibrio estable en sentido Lyapunov (pero no es asintóticamente estable) rodeado de un continuo de órbitas periódicas. Si $c < 0$, en la figura 1.1(a), el sistema masa-resorte pierde energía debido al roce, por lo tanto la amplitud de las oscilaciones decrece hasta converger al estado de reposo en el origen, el cual es un equilibrio

atractor. Por último, si $c > 0$ —caso físicamente improbable—, en la figura 1.1(c), la amplitud de las oscilaciones crece y el origen es un repulsor.

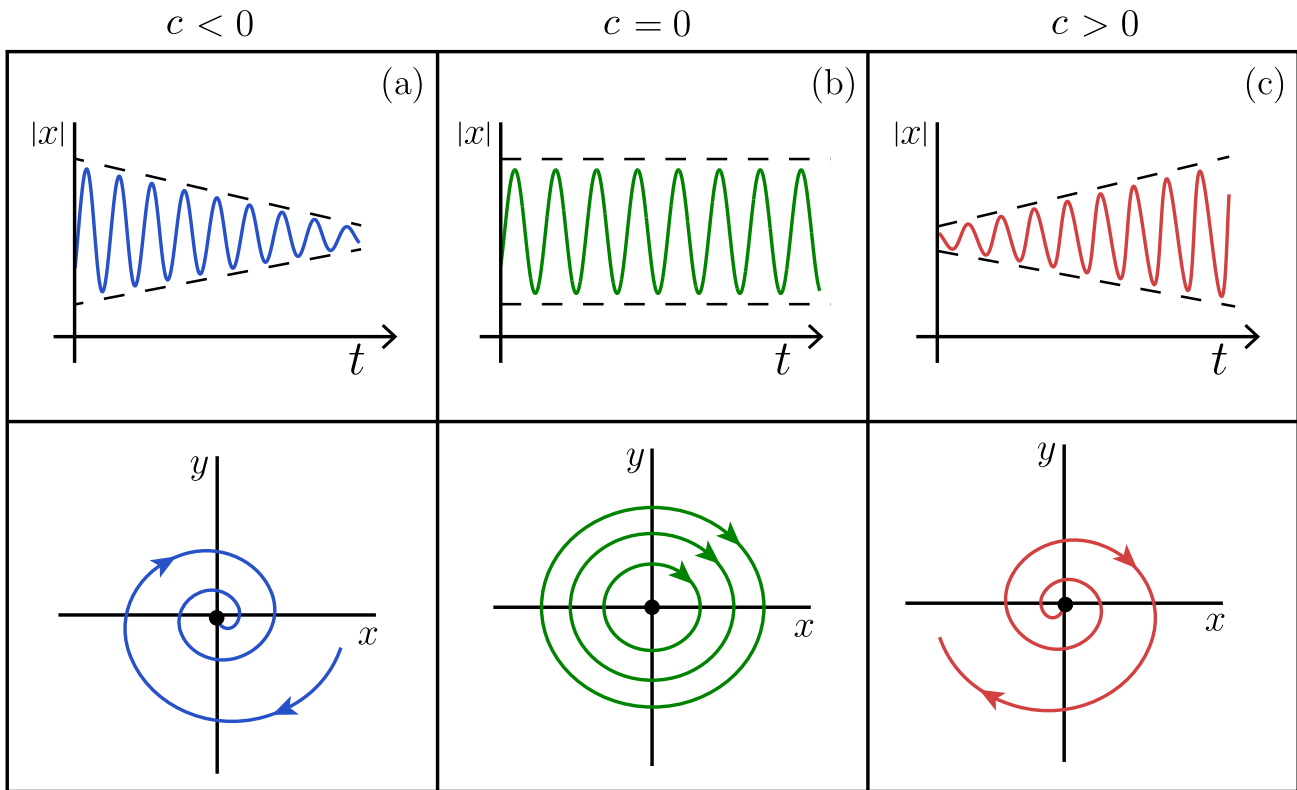


Figura 1.1: Diferentes retratos de fase del oscilador armónico dependiendo del signo de c .

En conclusión, la dinámica del sistema cambia drásticamente al variar el parámetro c cuando $c \approx 0$. Decimos que $c = 0$ es un **valor de bifurcación**, pues la dinámica para todo $c < 0$ suficientemente pequeño es cualitativamente distinta que para todo $c > 0$ suficientemente pequeño.

En este ejemplo, fuimos capaces de deducir propiedades de estabilidad de los equilibrios fácilmente. En general, sin embargo, debemos recurrir a alguna teoría que nos diga qué consecuencias puede tener el mover un parámetro para la estructura topológica de las órbitas de un sistema dinámico. Esto es de especial interés pues típicamente uno no conoce los valores exactos de los parámetros de un modelo. No sabemos exactamente el valor del coeficiente de fricción para el péndulo

planar amortiguado, pero hay uno; no sabemos exactamente el efecto inhibitor de una especie sobre otra, pero parece haber uno; etcetera. Por lo tanto, el modelo es típicamente de la forma general

$$\dot{x} = f(x; \alpha),$$

en el caso de un sistema dinámico continuo, o bien

$$x \mapsto f(x; \alpha),$$

en el caso de un sistema dinámico a tiempo discreto, donde $x \in \mathbb{R}^n$ son variables de estado y $\alpha \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. Puede que solo se sepa que el valor del parámetro α se halla en un cierto intervalo o región. Sin conocer exactamente α , ¿qué se puede decir sobre el sistema si variamos el parámetro α ? Hay dos posibilidades:

1. El sistema permanece topológicamente equivalente al original.
2. El sistema **no** es topológicamente equivalente al original.

Definición 1 *La aparición de un retrato de fase topológicamente no-equivalente bajo variación de parámetros se dice una **bifurcación**.*

Es decir, una bifurcación es un cambio del tipo topológico del sistema a medida que sus parámetros pasan por un valor de bifurcación.

El objetivo de estos apuntes (y del curso que lo acompaña) es presentar una clasificación y métodos para el análisis de bifurcaciones, y las consecuencias de la ocurrencia de estos eventos para la dinámica de un sistema dado.

1.2. Bifurcaciones locales vs bifurcaciones globales

Ejemplo 1 (Bifurcación de Andronov-Hopf)

Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. En coordenadas polares se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Notemos que este último sistema se puede integrar explícitamente. Pero dado que las ecuaciones para ρ y θ son independientes, podemos dibujar fácilmente los retratos de fase en una vecindad del origen.

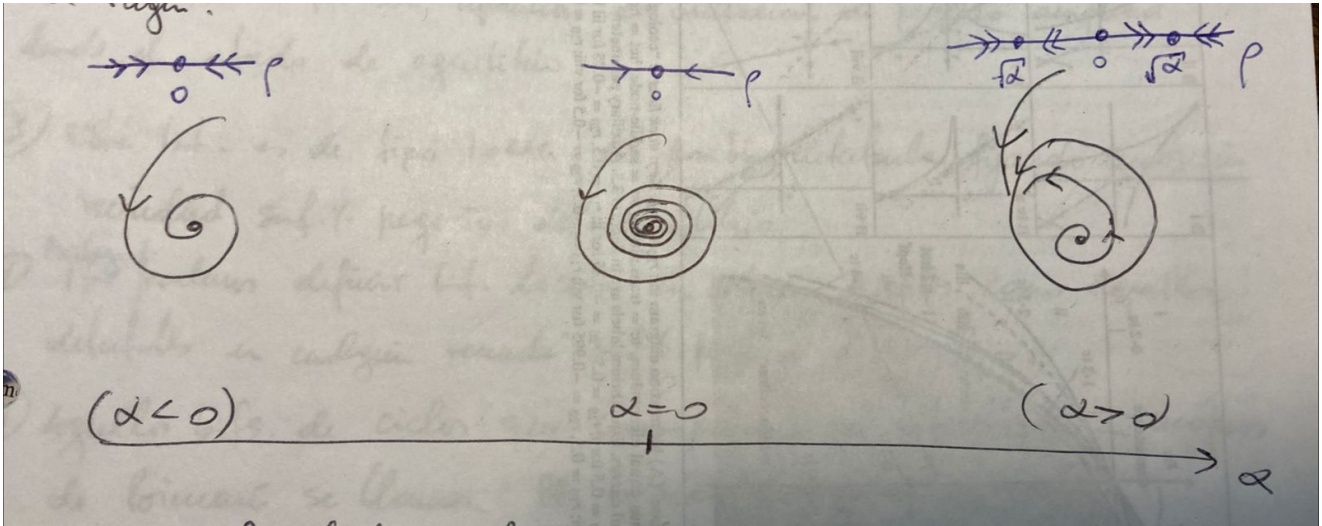


Figura 1.2: Retratos de fase cerca de una bifurcación de Andronov-Hopf.

Para $\alpha \leq 0$, el origen es un foco atractor, pues $\dot{\rho} < 0$ y luego $\rho(t) \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, si $\alpha > 0$, se tiene $\dot{\rho} > 0$ para ρ suficientemente pequeño (luego, decimos que el origen es un foco inestable); pero si ρ es suficientemente grande, $\dot{\rho} < 0$. Es fácil ver de la ecuación para ρ que el sistema tiene una órbita periódica para todo $\alpha > 0$ de radio $\rho_0 = \sqrt{\alpha}$ y que esta órbita es estable. Por lo tanto, $\alpha^* = 0$ es un valor de bifurcación. ¿La razón? Un espacio de fase con un ciclo límite (caso $\alpha > 0$) no se puede deformar homeomórficamente a otro espacio de fase con solo un punto de equilibrio y sin órbitas periódicas (caso $\alpha \leq 0$). Uno se refiere al ciclo límite como un *invariante topológico*, un objeto o característica que debe preservarse bajo homeomorfismos.

Decimos que en este ejemplo ocurre una **Bifurcación de Andronov-Hopf** a medida que α cruza el valor $\alpha^* = 0$; este fenómeno se caracteriza por la aparición

de oscilaciones de pequeña amplitud desde el estado de equilibrio.

Esta bifurcación es de tipo **local**. Es decir, es posible detectarla fijando cualquier vecindad suficientemente pequeña del equilibrio.

OBSERVACIONES:

1. Podemos definir bifurcaciones locales en sistemas discretos de manera análoga, es decir, como aquellas detectables en cualquier vecindad suficientemente pequeña de puntos fijos.
2. Aquellas bifurcaciones de ciclos que correspondan a bifurcaciones locales en mapeos de retorno de Poincaré se llaman bifurcaciones locales de órbitas periódicas.
3. También existen bifurcaciones que no se pueden detectar con solo estudiar un sistema en vecindades pequeñas de equilibrios, puntos fijos o ciclos. Tales bifurcaciones se dicen **globales**. El siguiente es un ejemplo de una bifurcación global.

Ejemplo 2 (Bifurcación heteroclínica)

Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1^2 - \alpha x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + \alpha(1 - x_1^2), \end{cases}$$

con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Este sistema posee dos puntos de equilibrio de tipo silla: $P_1 = (-1, 0)$ y $P_2 = (1, 0)$.

Cuando $\alpha = 0$, el eje horizontal x_1 es invariante. Esto implica que los puntos silla están conectados por una órbita que es asintótica a una de ellas para $t \rightarrow \infty$, y a la otra para $t \rightarrow -\infty$. Esta órbita se llama **heteroclínica**. (Similarmente, una órbita que es asintótica al mismo punto de equilibrio para $t \rightarrow \pm\infty$ se llama **homoclínica**.)

Sin embargo, para $\alpha \neq 0$, el eje x_1 ya no es invariante y la conexión desaparece; ver figura [1.3](#). Esta es claramente una bifurcación global: Para detectarla debemos estudiar una región que cubra ambos puntos de equilibrio silla.

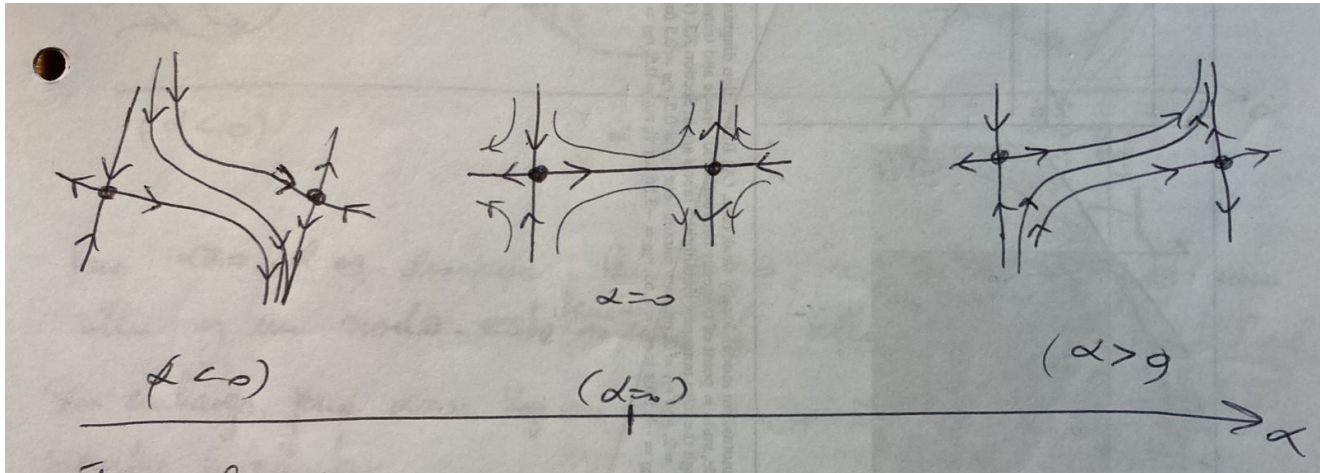


Figura 1.3: Retratos de fase cerca de una bifurcación heteroclínica.

También existen fenómenos que involucran bifurcaciones locales y globales simultáneamente como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 (Bifurcación homoclínica silla-nodo)

Considere el sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(1 + \alpha + x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + \alpha + x_1) + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2), \end{cases}$$

con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. En coordenadas polares se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1 + \alpha + \rho \cos \theta. \end{cases}$$

De aquí es inmediato concluir que el círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{(\rho, \theta) : \rho = 1\}$ es invariante. Consideremos un anillo delgado U alrededor de \mathbb{S}^1 . Para $\alpha = 0$ existe un equilibrio $x_0 = (\rho_0, \theta_0) = (1, \pi)$ con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ (Tarea: verificar esta afirmación). Para $\alpha > 0$, el equilibrio desaparece, mientras que para $\alpha < 0$, x_0 se “divide” en dos equilibrios: una silla y un nodo. Este fenómeno es un evento local y se conoce como una **bifurcación silla-nodo**. Sin embargo, para $\alpha > 0$ existe un ciclo que coincide con \mathbb{S}^1 . Como \mathbb{S}^1 es invariante para todo α , entonces para $\alpha = 0$ también hay una conexión homoclínica al equilibrio x_0 . Por lo tanto, lo que está ocurriendo en $\alpha = 0$ se llama una **bifurcación homoclínica silla-nodo**.

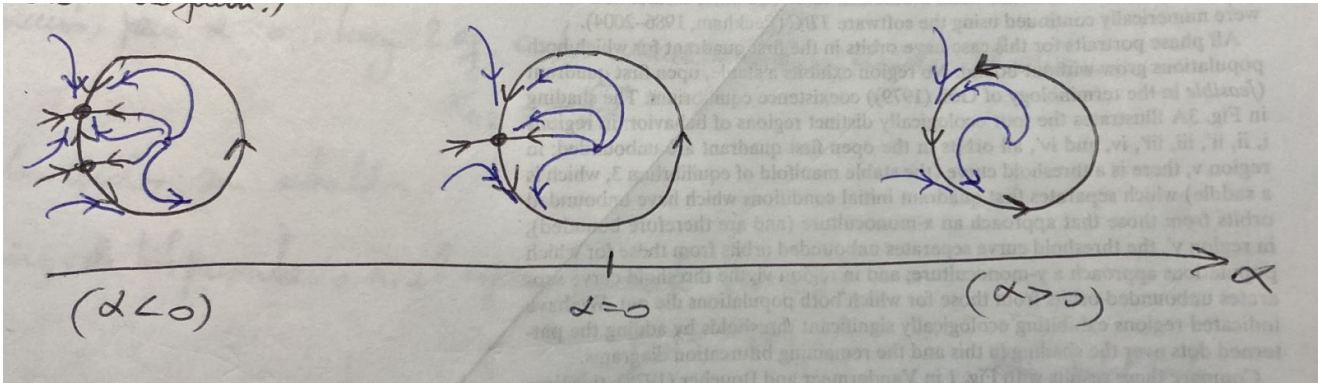


Figura 1.4: Retratos de fase cerca de una bifurcación homoclínica silla-nodo.

1.3. Diagramas de bifurcación y codimensión

En los tres ejemplos anteriores, el valor de bifurcación $\alpha = \alpha^*$ define una *separación* o transición entre los retratos de fase topológicamente diferentes. Existe una vecindad de α^* tal que para todo $\alpha < \alpha^*$ en esta vecindad, los retratos de fase son topológicamente equivalentes entre sí; mientras que para todo $\alpha > \alpha^*$ en esta vecindad, los retratos de fase son topológicamente equivalentes entre sí. Pero los retratos de fase para $\alpha < \alpha^*$ y $\alpha > \alpha^*$ no son topológicamente equivalentes.

Definición 2 *Un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica, junto con retratos de fase representativos para cada estrato.*

Ejemplo 4 Considere el campo de vectores $\dot{x} = \alpha x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Este sistema posee un equilibrio en $x_0 = 0$ para todo α . Como $f'(0) = \alpha$, entonces x_0 es estable para $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. Además, para $\alpha > 0$ hay otros dos equilibrios que se ramifican desde el origen en $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha}$, los cuales son ambos estables. Este fenómeno se conoce como **bifurcación pitchfork**. El diagrama de bifurcación en el espacio producto (α, x) se muestra en la figura [1.5](#).

Notemos que este sistema posee una simetría pues es invariante bajo la transformación $x \mapsto -x$. Estudiaremos algunas bifurcaciones en sistemas que poseen ciertas simetrías más adelante.

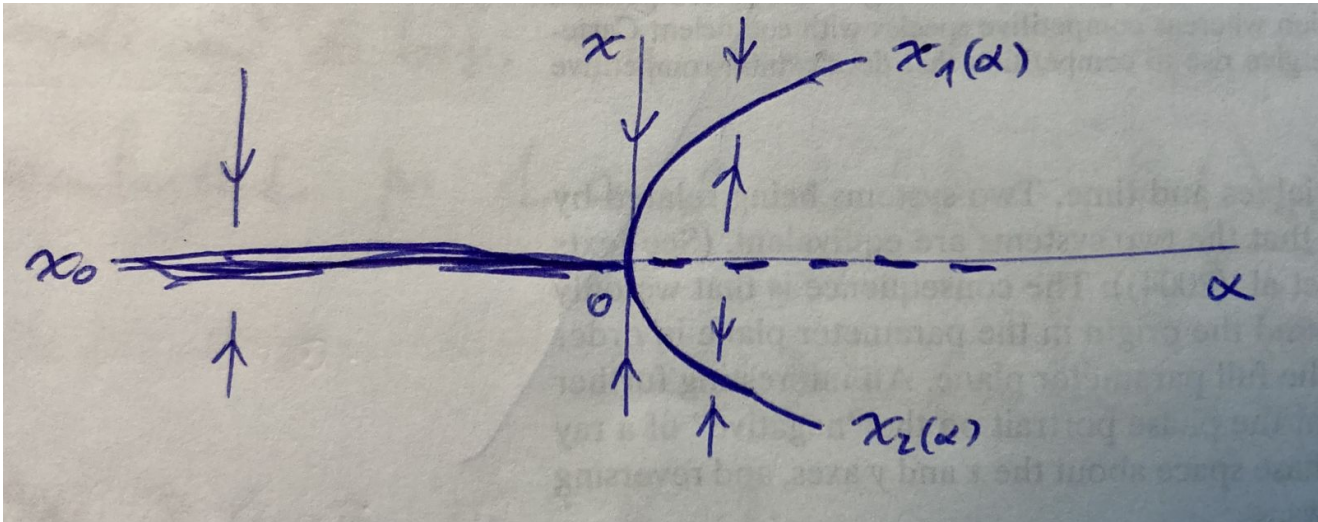


Figura 1.5: Diagrama de bifurcación de una bifurcación pitchfork.

En los casos más simples, si el espacio de parámetros de un sistema es \mathbb{R}^m , los diagramas de bifurcación se componen de un número finito de regiones de \mathbb{R}^m . Dentro de cada región los retratos de fase resultantes son topológicamente equivalentes entre sí. Cada región abierta es separada por **fronteras de bifurcación** (que corresponden a subvariedades suaves de \mathbb{R}^m). Estas fronteras se pueden intersectar o unir. Estas intersecciones subdividen las fronteras en subregiones y así sucesivamente. Una frontera de bifurcación queda especificada por un objeto (un punto de equilibrio, un ciclo, etc) —el cual está “pasando por la bifurcación— y alguna condición (típicamente algebraica) que determina de cuál bifurcación se trata (Hopf, silla-nodo, pitchfork, etc).

Ejemplo 5 Considere el diagrama de bifurcación en el espacio de parámetros \mathbb{R}^m , con $m = 3$, como en la figura [1.6](#) asociado a las bifurcaciones de un punto de equilibrio de un sistema en \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Aún cuando los valores propios $\lambda_{1,2,3}$ de este equilibrio dependen de los parámetros $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, obviaremos esta dependencia para simplificar la notación. El espacio tridimensional está dividido por dos fronteras de bifurcación correspondientes a una superficie de bifurcación silla-nodo (LP) y una superficie de bifurcación de Hopf (H), respectivamente. La superficie H está definida por la condición de bifurcación (condición algebraica) $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ impuesta sobre los valores propios de un punto de equilibrio. Es

decir,

$$H = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0\}.$$

Por otro lado, la superficie LP corresponde a

$$LP = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_3 = 0\}.$$

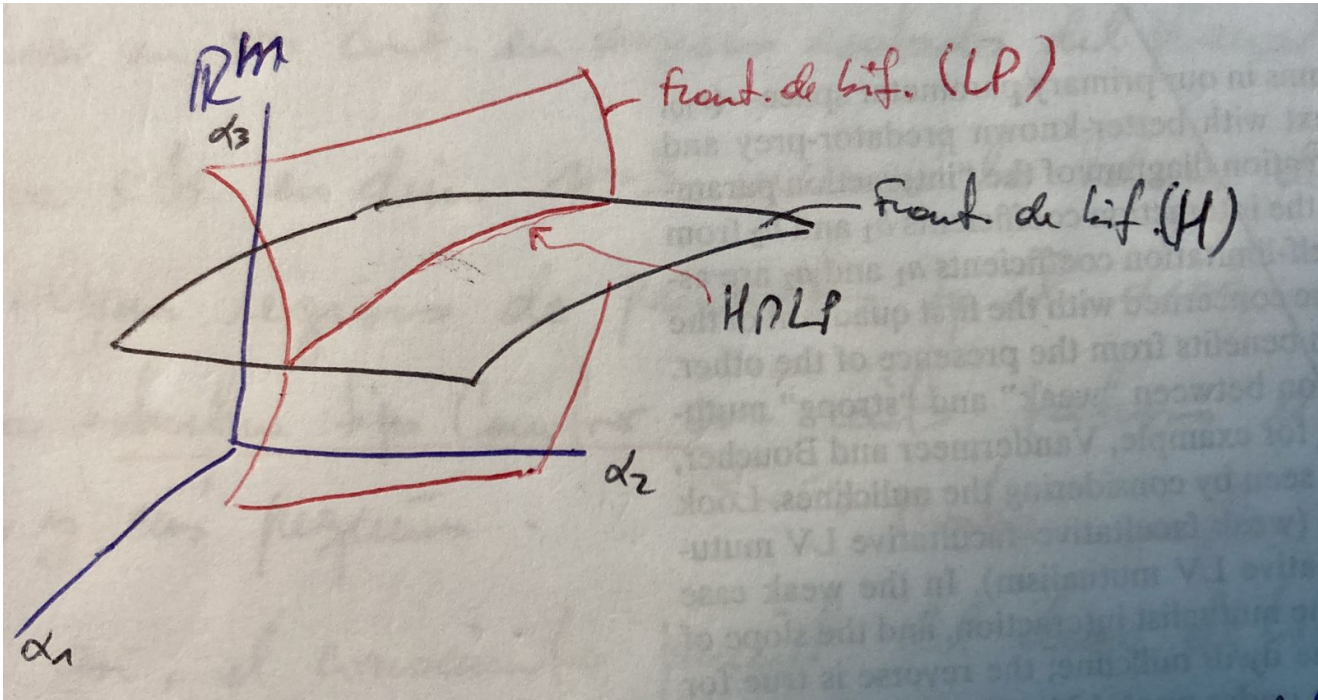


Figura 1.6: Diagrama de bifurcación de una bifurcación pitchfork.

Cada vez que el punto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ cruza una de estas fronteras, ocurre la bifurcación correspondiente en el sistema.

Si adoptamos un lenguaje de variedades, notemos que tanto H como LP son dos subvariedades de dimensión 2 en un espacio de dimensión 3, es decir poseen *codimensión* 1. Ambas superficies se intersectan a lo largo de la curva

$$H \cap LP = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0, \lambda_3 = 0\},$$

la cual es una subvariedad de dimensión 1, es decir, de *codimensión* 2, que determina la ocurrencia simultánea de una bifurcación de Hopf y una bifurcación

silla-nodo en un mismo punto de equilibrio (fenómeno también conocido como *bifurcación zero-Hopf*). De esta manera, tanto H como LP quedan divididas en dos subfronteras a lo largo de la curva $H \cap LP$.

Definición 3 Una bifurcación es de **codimensión** k si el conjunto de bifurcación queda determinado por k condiciones independientes sobre los parámetros.

En base al ejemplo [5](#), la codimensión puede entenderse equivalentemente como:

- i) La diferencia entre la dimensión del espacio de parámetros m y la dimensión de la correspondiente frontera de bifurcación.
- ii) El número mínimo de parámetros que es necesario “mover” para hallar una bifurcación en el espacio de parámetros. En la figura [1.6](#) es necesario variar al menos un parámetro —dejando los demás fijos— para cruzar la superficie H (o LP); en cambio, se requiere mover al menos dos parámetros para cruzar la frontera $H \cap LP$ desde una ubicación arbitraria en el espacio $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

En general, el número mínimo de parámetros libres que se necesitan para encontrar una bifurcación de codimensión k es exactamente k . Por ejemplo, para satisfacer una única condición de bifurcación necesitamos mover un único parámetro del sistema. Si hay dos condiciones, debemos variar dos parámetros, etc. En otras palabras, debemos controlar k parámetros para alcanzar una frontera de bifurcación de codimensión k .

OBSERVACIONES:

1. Un diagrama de bifurcación se puede componer de un número infinito de estratos o fronteras (incluso en sistemas dinámicos continuos definidos en regiones acotadas del plano).
2. Para sistemas en dimensión $n > 3$ incluso los valores de bifurcación podrían acumularse densamente en algunas regiones del espacio de parámetros y el diagrama de bifurcación podría tener una estructura tipo Cantor con ciertos patrones repitiéndose en escalas más y más pequeñas. Aún así, el conocimiento parcial del diagrama de bifurcación nos da información importante sobre el comportamiento de un sistema.

1.4. Equivalencia topológica

A pesar de la complejidad que pueden llegar a tener algunos diagramas de bifurcación, afortunadamente las bifurcaciones “interactúan” entre sí siguiendo ciertas *reglas*. Eso hace que los diagramas de bifurcación que aparecen en muchas aplicaciones se vean similares. Por ello, necesitamos un criterio para decidir cuándo dos sistemas dinámicos parámetro-dependientes tienen diagramas de bifurcación equivalentes.

Definición 4 Consideremos dos familias de sistemas dependientes de parámetros:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (1.2)$$

donde f y g son suaves. La familia (1.1) se dice **topológicamente equivalente** a la familia (1.2) si se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Existe un homeomorfismo del espacio de parámetros

$$p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \beta = p(\alpha);$$

2. Existe un homeomorfismo (parámetro-dependiente) del espacio de fase

$$h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y = h_\alpha(x),$$

que mapea órbitas de (1.1) —en los valores de parámetro α — en órbitas de (1.2) —en valores de parámetro $\beta = p(\alpha)$ —, preservando la dirección del tiempo.

OBSERVACIONES:

1. El homeomorfismo p transforma el diagrama de bifurcación de (1.1) en el de (1.2).
2. El homeomorfismo h_α mapea los correspondientes retratos de fase.

3. Por definición dos sistemas parámetro-dependientes topológicamente equivalentes poseen diagramas de bifurcación topológicamente equivalentes.
4. No es necesario que h_α dependa continuamente de α . En tal caso, la transformación

$$(x, \alpha) \mapsto (h_{p(\alpha)}(x), p(\alpha))$$

sería un homeomorfismo en el espacio producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

5. Los sistemas (1.1) y (1.2) se dicen **localmente topológicamente equivalentes** cerca de (x_0, α^*) si la definición anterior se cumple en una pequeña vecindad de $\alpha = \alpha^*$ con $p(\alpha^*) = \beta^*$ y tal que h_α mapea órbitas de (1.1) en una vecindad U_α de x_0 en órbitas de (1.2) en $h_\alpha(U_\alpha)$ con $h_\alpha(x_0) = y_0$.

La noción de equivalencia topológica refuerza la idea que para estudiar una bifurcación de codimensión k basta hacerlo en sistemas genéricos con k parámetros. En efecto, si se tiene un sistema m -paramétrico con $m > k$, el diagrama topológicamente equivalente cerca de la frontera de bifurcación se puede obtener al “mover” el diagrama k -paramétrico en las direcciones complementarias.

Ejemplo 6 Como ya vimos la bifurcación de Hopf es una bifurcación de codimensión $k = 1$. Si $m = 1$, ocurre en valores de parámetros aislados. Si $m = 2$, generalmente ocurre en curvas específicas (subvariedades unidimensionales) en el espacio de parámetros. Si cruzamos esta curva transversalmente (i.e., en un ángulo no nulo), los diagramas de bifurcación resultantes serán topológicamente equivalentes al diagrama de bifurcación original uniparamétrico. Lo mismo es verdad si cruzamos transversalmente una superficie bidimensional correspondiente a la bifurcación de Hopf en un sistema con $m = 3$ como en el ejemplo 5.

1.5. Desdoblamientos versales

Con estas nociones podemos considerar el problema de clasificar todos los posibles diagramas de bifurcación de sistemas genéricos y que dependan de la menor cantidad de parámetros necesarios. La teoría comienza con un campo de vectores particular, digamos $f_0(x)$. Para estudiar la dependencia de la dinámica

con respecto a los parámetros, este campo de vectores es *desplegado* o *desdoblado* (del inglés *unfolded*):

Definición 5 Una familia de campos de vectores $f(x, \mu)$ que depende de un vector de parámetros $\mu \in \mathbb{R}^m$ es un **desdoblamiento** (o **deformación**) de $f_0(x)$ si $f(x, 0) = f_0(x)$.

Un desdoblamiento $f(x, \mu)$ puede entenderse como una perturbación parámetro-dependiente del sistema original $f_0(x)$. En lo que sigue nos enfocamos en una vecindad de un valor de bifurcación del parámetro el que, sin pérdida de generalidad, asumimos que es $\mu = 0$. Típicamente, asumiremos que el campo $f_0(x)$ posee una órbita degenerada en este valor del parámetro (por ejemplo, un equilibrio no hiperbólico); esto se llama una condición de *singularidad*. En todos los capítulos siguientes, excepto el último, nos restringiremos a bifurcaciones que son locales en el espacio de fase.

Por el momento, tampoco nos ocuparemos de cuál es el espacio de funciones que consideramos en un desdoblamiento ni de la definición rigurosa de la vecindad particular de f_0 . Diremos un poco sobre esto más adelante en la sección [1.6](#) y algo más a medida que tratemos con bifurcaciones específicas a partir del capítulo [3](#).

Aunque dos sistemas dinámicos equivalentes dependan de los mismos parámetros, es posible que algunos de estos aparezcan en uno de los sistemas en una manera trivial.

Ejemplo 7 Los campos de vectores $f(x; \mu_1, \mu_2) = \mu_1 + x^2$ y $g(x; \mu_1, \mu_2) = \mu_1/\mu_2 + \mu_2 y^2$ son conjugados —y por ende, topológicamente equivalentes— bajo la transformación $y = h(x; \mu_1, \mu_2) = x/\mu_2$ siempre que $\mu_2 \neq 0$. (Usando la notación de la definición [4](#), p es la identidad.) Luego, aunque f dependa formalmente de ambos parámetros, en realidad solo depende del primero. En otras palabras, el diagrama de bifurcación de g depende esencialmente de solo 1 parámetro y no de ambos.

Este ejemplo ilustra uno de los principales mecanismos para reducir un sistemas de EDOs a una llamada *forma normal* que contenga un número minimal de parámetros. Por tanto, es útil tener una noción de equivalencia que permita una reparametrización de los campos de vectores y que produzcan una reducción en el número de parámetros “activos” en una bifurcación.

Definición 6 Una familia $\dot{y} = g(y, \beta)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, se dice **inducida** por la familia $\dot{x} = f(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, si existe un mapeo continuo $\alpha = p(\beta)$, tal que $g(y, \beta) = f(y, p(\beta))$.

En esta definición, p es una reparametrización actuando sobre el parámetro β de g para transformar a este último en f . Luego, dos familias poseen la misma dinámica si una es inducida por un campo de vectores topológicamente equivalente a la segunda.

Ejemplo 8 El campo de vectores $g(x, \nu) = \nu_1 + \nu_2 - x^2$ con dos parámetros en \mathbb{R} es inducido por $f(x, \mu_1) = \mu_1 - x^2$ usando la reparametrización $\mu_1 = p(\nu) = \nu_1 + \nu_2^2$. Aunque g depende de dos parámetros, solo uno es esencial. Luego, f es una versión algebraicamente más simple de g .

Por otro lado, el campo de vectores $k(x, \lambda) = \lambda_1 + 2\lambda_2 x - x^2$ no es inducido por f ; más bien lo contrario — f es inducido por k a través del mapeo $\lambda = p(\mu_1) = (\mu_1, 0)$. En este sentido, f parece ser una versión “incompleta” de k .

Sin embargo, el campo k es conjugado a g usando la traslación $y = h(x, \lambda) = x - \lambda_2$, pues $g(y, \lambda) = k(y + \lambda_2, \lambda) = \lambda_1 + \lambda_2^2 - y^2$. Dado que g es inducido por f , podemos afirmar que el flujo de k es conjugado a un flujo inducido por f . Por lo tanto, f describe la dinámica de las dos familias a dos parámetros g y k .

En el ejemplo anterior, los campos f, g y k son todos desdoblamientos del campo singular $f_0(x) = -x^2$, pero la familia f era la más simple de ellas y presenta la misma dinámica que g y k . Sin embargo, también podríamos considerar otros desdoblamientos de f_0 más generales, por ejemplo de la forma $\tilde{f}(x, \alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 x + (\alpha_3 - 1)x^2 + O(x^3)$. De *todos los posibles* desdoblamientos de un sistema, buscamos uno que logre capturar *todas* las posibles dinámicas no equivalentes que pueden aparecer al perturbar el sistema singular.

Definición 7 Una familia de deformaciones $f(x; \mu)$ de f_0 se dice un **desdoblamiento versal** si todo otro desdoblamiento en alguna vecindad de f_0 es localmente topológicamente equivalente a una familia inducida por $f(x, \mu)$.

El término *versal* es una manera informal de decir *universal*. Denota el hecho que la familia versal $f(x; \mu)$ “despliega” o “desdobla” (del inglés *unfolds*) todos

los posibles retratos de fase no-equivalentes de sistemas vecinos a f_0 al mover apropiadamente μ en una vecindad de $\mu = 0$; luego, el diagrama de bifurcación resultante es “universal” para la bifurcación en cuestión.

Ejemplo 9 Supongamos que $x \in \mathbb{R}$ y que $f_0 = 0$. Consideremos el comportamiento del equilibrio no hiperbólico en $x_0 = 0$ (aún cuando todos los puntos en \mathbb{R} son equilibrios!). La familia $f(x, \mu) = -\mu_1 x + \mu_2 x^2$ es un desdoblamiento de f_0 , y siempre tiene un equilibrio en $x_0 = 0$ para todo valor de $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. Sin embargo, la familia f no es versal porque, por ejemplo, el campo de vectores $g(x, \nu) = \nu$ también es un desdoblamiento de f_0 y no tiene equilibrios cuando $\nu \neq 0$ y, luego, no puede ser equivalente a f .

Aún cuando f no es versal, el desdoblamiento f en algún sentido posee demasiados parámetros. En efecto, la conjugación $y = h(x) = \mu_2 x$ transforma f en el campo $k(y, \mu) = -\mu_1 y + y^2$, así que basta una familia uniparamétrica para describir la dinámica de f cuando $\mu_2 \neq 0$.