

UTFSM - Primer semestre 2024
MAT-437 - Modelos Biomatemáticos
PROFESOR: PABLO AGUIRRE

Guía de ejercicios 2

1. Ejemplos simples de oscilaciones de relajación ocurren en muchos contextos: hay ejemplos en propagación de impulsos nerviosos en neuronas (como vimos en clases), células excitables eléctricamente, sistemas mecánicos y eléctricos, aplicaciones bioquímicas, etc. Las amplitudes (o desplazamientos) de muchas de tales oscilaciones satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\epsilon \ddot{y} - F'(y)\dot{y} + y = 0$$

o equivalentemente, después de integrar, el sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \epsilon \dot{y} = F(y) - x. \end{cases}$$

(Para el caso $F(y) = y - \frac{1}{3}y^3$ obtenemos el oscilador de Van der Pol visto en clases.) Considere el oscilador de relajación al usar la función lineal a trozos

$$F(y) = \begin{cases} -2 - y, & y < -1, \\ y, & -1 \leq y \leq 1, \\ 2 - y, & y > 1. \end{cases}$$

- (a) Determine analíticamente el flujo rápido y el flujo lento del sistema en el límite singular $\epsilon \rightarrow 0$. Haga un bosquejo a mano del retrato de fase en el plano (x, y) para $\epsilon \rightarrow 0$, identificando la variedad crítica y sus ramas estables e inestables.
- (b) Con ayuda de un computador, obtenga los retratos de fase en el plano (x, y) del sistema para i) $\epsilon = 0.0001$, ii) $\epsilon = 0.001$, iii) $\epsilon = 0.01$, iv) $\epsilon = 0.1$. Comente sus resultados.
- (c) En cada caso de (b), grafique y vs t para la la oscilación resultante. ¿Qué le sucede al período de la solución a medida que ϵ aumenta?

Para las preguntas (b) y (c) puede aplicar cualquier método numérico, algoritmo, software, lenguaje o combinación de estos, que le sea más cómodo.

2. Las reacciones bioquímicas ocurren continuamente en todos los organismos vivos y la mayoría de ellas involucran proteínas llamadas enzimas, las cuales actúan como catalizadores del proceso. Las enzimas reaccionan selectivamente a ciertos compuestos llamados sustratos. Por ejemplo, la hemoglobina en la sangre es una enzima y el oxígeno, con el cual se combina, es un sustrato. Las enzimas son importantes reguladores de procesos biológicos, por ejemplo, como activadores o inhibidores en una reacción. El siguiente modelo adimensionalizado (Michaelis & Menten) representa una de las reacciones enzimáticas más básicas e involucra un sustrato (y) reaccionando con una enzima para formar un complejo (x) el cual a su vez es convertido en un producto y una enzima:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx}{d\tau} = (1 + \sigma)y - \sigma xy - x, \\ \frac{dy}{d\tau} = -(1 + \sigma)y + \sigma xy + \frac{\rho}{1 + \rho}x. \end{cases}$$

Aquí, $x, y \geq 0$, todos los parámetros son positivos y asuma que ϵ es un parámetro pequeño, i.e, $0 < \epsilon \ll 1$.

Considerando las distintas escalas de tiempo de las variables x e y , realice un estudio del modelo y determine el retrato de fase en el caso en que $\sigma(\rho + 1) > 1$ dando una interpretación de la evolución del sistema en el tiempo.

3. Considere el siguiente modelo poblacional adimensional con invasión o colonización territorial de una de las especies:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(u + v) + p[1 - (u + v)], \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (1 - p)(u + v)[1 - (u + v)], \end{cases}$$

donde $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$, $(t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}$ y $p > 0$ es un parámetro.

- (a) Busque soluciones estacionarias.
 (b) Busque soluciones acotadas de tipo onda viajera.
4. Las heridas en la epidermis de la piel son poco profundas y sin sangrado, típicamente en la forma de ampollas. El proceso natural de sanación de la herida se debe a un movimiento de células epiteliales. Estas células muestran una mayor división celular cerca del borde de la herida. Esta división celular es regulada por sustancias químicas producidas por las mismas células.

Si denotamos por $n(x, t)$ al número de células y $c(x, t)$ a la concentración del químico, un modelo que describe este movimiento viene dado por el sistema de ecuaciones de

reacción-difusión

$$\left\{ \begin{array}{l} n_t = \overbrace{Dn_{xx}}^{\text{movimiento de células}} + \overbrace{s(c)(N-n)n}^{\text{división celular}} - \overbrace{\delta n}^{\text{muerte de células}}, \\ c_t = \underbrace{D_c c_{xx}}_{\text{difusión del químico}} + \underbrace{An/(1+\alpha n^2)}_{\text{producción por células}} - \underbrace{\lambda c}_{\text{decaimiento}}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Aquí todos los parámetros son positivos.

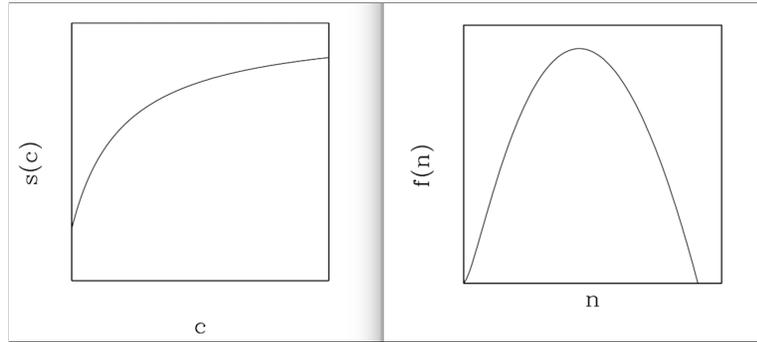
Si observamos que la cinética del químico es muy rápida comparada con la división celular, entonces podemos pensar que la concentración $c(x, t)$ alcanza rápidamente su valor de equilibrio $c = (A/\lambda)n/(1 + \alpha n^2)$. Esto nos permite reducir el sistema (3) a una sola ecuación:

$$n_t = Du_{xx} + f(n), \quad (2)$$

donde

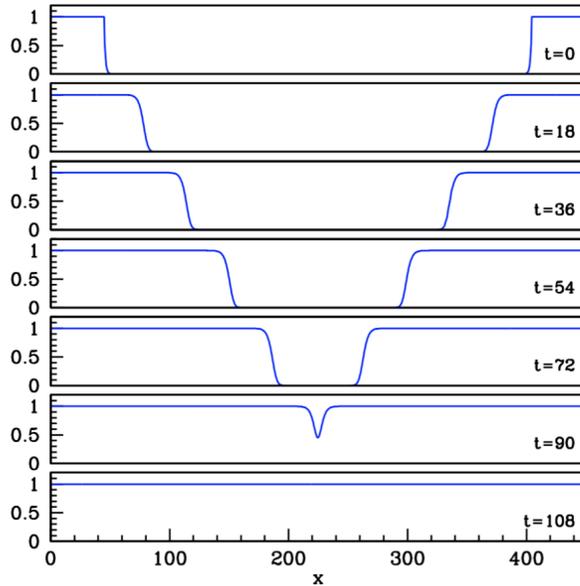
$$f(n) = s \left(\frac{An}{\lambda(1 + \alpha n^2)} \right) (N - n)n - \delta n.$$

En (2), la función $s(c)$ es cualitativamente como en la imagen siguiente, i.e., estrictamente positiva y creciente, y alcanza un valor de saturación para $c \rightarrow \infty$. La gráfica cualitativa resultante de f se muestra también en la imagen siguiente.



Se ha observado que durante la mayor parte de la sanación, las células se mueven como un frente de onda viajero con velocidad y forma constantes. En la imagen de abajo, se ven dos frentes de onda que se originan en los bordes de la herida; a medida que pasa el tiempo, las nuevas células (sanas) van avanzando hasta cubrir completamente la herida.

- (a) Muestre la existencia de soluciones de onda viajera para el modelo reducido (2). Puede ocupar herramientas analíticas, computacionales, argumentos geométricos, etc. Ocupe el/los método/s que usted quiera, y en todas las combinaciones y formas posibles! Si su comprobación es numérica, proponga una función $s(c)$ apropiada y valores de parámetros.



(b) Determine la velocidad mínima de propagación de las ondas.

5. El modelo de Fitzhugh-Nagumo con difusión espacial de impulsos nerviosos viene dado por el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u(a-u)(u-1) - v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = bu - \gamma v. \end{cases}$$

Aquí los parámetros $b, \gamma \geq 0$ y $0 < a < 1$. Asuma que estas ecuaciones admiten soluciones de onda viajera $u(x, t) = \phi(x - ct), v(x, t) = \psi(x - ct)$, con $z = x - ct$.

- (a) Defina $\varphi = \phi' = d\phi/dz$ y escriba el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que satisfacen ϕ, ψ y φ .
- (b) Si $b = \gamma = \psi(0) = 0$, verifique que existe una velocidad de onda $c = c^*$ tal que la función

$$\phi(z) = \frac{1}{1 + \exp(z/\sqrt{2})}$$

es una solución de onda viajera. ¿Cuál es el valor de c^* ? ¿Cómo viene dada $\psi(z)$?

- (c) Haga un bosquejo de la solución hallada en (b) en el espacio de fase tridimensional (ϕ, ψ, φ) . ¿A qué tipo de órbita corresponde? Justifique su respuesta.

- (d) Describa el comportamiento asintótico de la solución $u(x, t) = \phi(x - c^*t)$ a medida que $t \rightarrow \pm\infty$.
6. Un sistema reacción-difusión para la interacción y propagación espaciotemporal de dos compuestos químicos viene dado en forma adimensional por

$$\begin{cases} u_t = \frac{u^2}{v} - bu + u_{xx}, \\ v_t = u^2 - v + dv_{xx}, \end{cases} \quad (3)$$

donde b y d son constantes positivas.

- (a) Determine los estados estacionarios positivos y encuentre condiciones para que, en ausencia de difusión, exista un estado estacionario asintóticamente estable.
- (b) Determine las condiciones para que el estado estacionario sea inestable por difusión.
- (c) Muestre que el dominio en el espacio de parámetros para que exista inestabilidad de Turing viene dado por las condiciones $0 < b < 1$, $db > 3 + 2\sqrt{2}$; y bosqueje el conjunto de los parámetros en el plano (b, d) en el cual ocurre la inestabilidad de Turing.
- (d) Muestre que en la bifurcación de Turing para tal inestabilidad el número de onda crítico k_c viene dado por $k_c^2 = (1 + \sqrt{2})/d$.
7. Considere el sistema lineal

$$\mathbf{v}_t = J\mathbf{v} + D\mathbf{v}_{xx},$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Muestre que la solución estacionaria trivial de $\mathbf{u}_t = J\mathbf{u}$ es estable.
- (b) Considere la EDP en el dominio $0 < x < \pi$ con condiciones de borde Neumann homogéneas. ¿Existe algún modo espacial inestable para este problema? Si es así, ¿Cuáles?
8. Algunos sistemas depredador-presa (por ejemplo, en el plankton) exhiben distribuciones espaciales irregulares de las especies. El sistema Mimura-Murray es un modelo para tales irregularidades ecológicas. Viene dado por

$$u_t = u(f(u) - v) + D_1\Delta_1 u, \quad v_t = v(u - g(v)) + D_2\Delta_2 v,$$

donde g es una función creciente positiva, mientras que f se incrementa desde $f(0) > 0$ y luego decrece.

- (a) Bosqueje un posible plano de fase para el sistema en ausencia de difusión.
- (b) Muestre que el modelo es un sistema activador-inhibidor cruzado si la nulclina $u = g(v)$ corta la nulclina $v = f(u)$ a la izquierda del máximo de esta última.
- (c) Investigue la existencia de patrones de Turing.

9. El sistema reacción-difusión Gierer-Meinhardt viene dado por

$$u_t = a - bu + \frac{u^c}{v} + D_1 \Delta u, \quad v_t = u^c - v + D_2 \Delta v,$$

donde $a \geq 0$ y b, cD_1 y D_2 son constantes positivas.

- (a) Encuentre condiciones bajo las cuales este es un sistema activador-inhibidor puro cerca del estado estacionario espacialmente uniforme no-trivial.
- (b) Investigue la existencia de patrones de Turing.

10. Considere la ecuación

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = f(\tilde{u}) + D \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$$

en $(0, L)$ con condiciones de borde homogéneas de Dirichlet $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(L, t) = 0$.

- (a) Reescale la variable espacial y temporal para obtener una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en $(0, \pi)$, condiciones de borde de Dirichlet homogéneas.

- (b) Derive la ecuación linealizada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 f'(u^*) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en $(0, \pi)$, condiciones de borde de Dirichlet homogéneas.

- (c) Fije $f'(u^*) > 0$. ¿El aumentar la difusión resulta un proceso estabilizador o desestabilizador? ¿Al aumentar el tamaño del dominio resulta un efecto estabilizador o desestabilizador?