

## TAREA 5

1. Las heridas en la epidermis de la piel son poco profundas y sin sangrado, típicamente en la forma de ampollas. El proceso natural de sanación de la herida se debe a un movimiento de células epiteliales. Estas células muestran una mayor división celular cerca del borde de la herida. Esta división celular es regulada por sustancias químicas producidas por las mismas células.

Si denotamos por  $n(x, t)$  al número de células y  $c(x, t)$  a la concentración del químico, un modelo que describe este movimiento viene dado por el sistema de ecuaciones de reacción-difusión

$$\begin{cases} n_t = \overbrace{Dn_{xx}}^{\text{movimiento de células}} + \overbrace{s(c)(N-n)n}^{\text{división celular}} - \overbrace{\delta n}^{\text{muerte de células}}, \\ c_t = \overbrace{D_c c_{xx}}^{\text{difusión del químico}} + \overbrace{\frac{An}{(1+\alpha n^2)}}^{\text{producción por células}} - \underbrace{\lambda c}_{\text{decaimiento}}. \end{cases} \quad (1)$$

Aquí todos los parámetros son positivos.

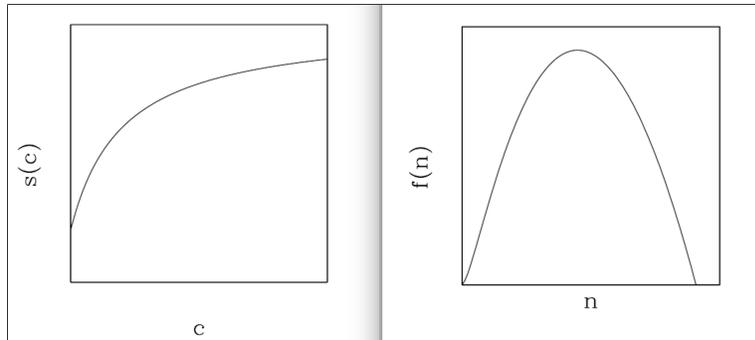
Si observamos que la cinética del químico es muy rápida comparada con la división celular, entonces podemos pensar que la concentración  $c(x, t)$  alcanza rápidamente su valor de equilibrio  $c = (A/\lambda)n/(1 + \alpha n^2)$ . Esto nos permite reducir el sistema (1) a una sola ecuación:

$$n_t = Du_{xx} + f(n), \quad (2)$$

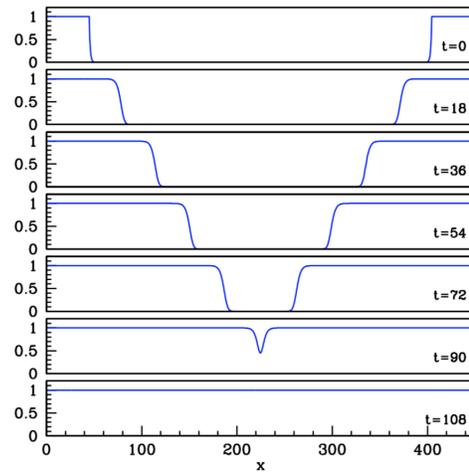
donde

$$f(n) = s\left(\frac{An}{\lambda(1 + \alpha n^2)}\right) (N - n)n - \delta n.$$

En (1) y (2), la función  $s(c)$  es cualitativamente como en la imagen, i.e., estrictamente positiva y creciente, y alcanza un valor de saturación para  $c \rightarrow \infty$ . La gráfica cualitativa resultante de  $f$  se muestra también en la imagen.



Se ha observado que durante la mayor parte de la sanación, las células se mueven como un frente de onda viajero con velocidad y forma constantes. En la imagen de abajo, se ven dos frentes de onda que se originan en los bordes de la herida; a medida que pasa el tiempo, las nuevas células (sanas) van avanzando hasta cubrir completamente la herida.



- (a) Muestre la existencia de soluciones de onda viajera para el modelo reducido (2). Puede ocupar herramientas analíticas, computacionales, argumentos geométricos, etc. Occupe el/los método/s que usted quiera, y en todas las combinaciones y formas posibles! Si su comprobación es numérica, proponga una función  $s(c)$  apropiada y valores de parámetros.
- (b) Determine la velocidad mínima de propagación de las ondas.