UTFSM - Segundo semestre 2020
MAT–437 - Modelos Biomatemáticos
Profesor: Pablo Aguirre

GUÍA 1

1. Un modelo para las población del gusano de las yemas de abeto viene dado por
$$\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2},$$
donde r y q son parámetros adimensionales positivos. Los puntos de equilibrio no nulos viene dado por la intersección de las dos curvas
$$U(u) = r\left(1 - \frac{u}{q}\right), \quad V(u) = \frac{u}{1+u^2}.$$
Muestre que existe una curva que divide el espacio (r, q) en regiones abiertas donde hay 1 o 3 equilibrios positivos, y que viene dada paramétricamente por
$$r = \frac{2a^3}{(1+a^2)^2}, \; q = \frac{2a^3}{a^3-1}.$$
Bosqueje la curva en el espacio (r, q).

2. Determine el tipo de interacción entre dos especies con poblaciones N_1 y N_2 dado por el modelo
$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1 + b_{12} N_2}\right), \\[2ex] \dfrac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2 + b_{21} N_1}\right). \end{cases}$$
Dibuje las nulclinas y determine los estados de equilibrio y su estabilidad. Describa brevemente las implicancias ecológicas de los resultados de su análisis.

3. La interacción entre dos poblaciones con densidades N_1 y N_2 es modelada por
$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \dfrac{N_1}{K}\right) - aN_1 N_2 (1 - \exp(-bN_1)), \\[2ex] \dfrac{dN_2}{dt} &= -dN_2 + cN_2(1 - \exp(-bN_1)), \end{cases}$$

donde a, b, c, d, r y K son constantes positivas.
a) ¿Qué tipo de interacción existe entre N_1 y N_2? ¿Cuál es la interpretación ecológica de los distintos términos del modelo?
b) Adimensionalice el sistema mediante

$$u = \frac{N_1}{K},\ v = \frac{aN_2}{r},\ \tau = rt,\ \alpha = \frac{c}{r},\ \delta = \frac{d}{r},\ \beta = bK.$$

c) Determine los puntos de equilibrio expresando cualquier restricción sobre los parámetros.
d) Determine la estabilidad de los puntos de equilibrios. e) Muestre que una población N_2 no nula puede existir si $\beta > \beta^* = -\ln(1 - \delta/\alpha)$. Discuta el comportamiento de las soluciones a medida que β se incrementa y $0 < \delta/\alpha < 1$.

4. Un método para el control de pestes consiste en la liberación de individuos estériles en una población. Si una población n de insectos estériles es mantenida constante en una población, un posible modelo simple para la población de insectos fértiles $N(t)$ es

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{aN}{N+n} - b\right) N - kN(N+n),$$

donde $a > b > 0$ y $k > 0$ son constantes positivas.
a) Discuta brevemente los supuestos detrás del modelo.
b) Determine el número crítico de insectos estériles n_c que logra erradicar la peste de insectos y muestre que n_c es menor que un cuarto de la capacidad de carga del ambiente.
c) Suponga que se hace una sola liberación de insectos estériles, los cuales tienen la misma tasa de mortalidad que los insectos fértiles. Escriba un modelo para $N(t)$ y $n(t)$ y muestre que no es posible erradicar la peste de insectos con una única liberación de insectos estériles.
d) Si una fracción γ de los insectos nacen estériles, un modelo sugerido es

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{aN}{N+n} - b\right) N - kN(N+n), \quad \frac{dn}{dt} = \gamma N - bn.$$

Determine la condición sobre γ para la erradicación de la peste y discuta brevemente el realismo del resultado.

5. Considere un sistema depredador-presa en forma Kolmogorov

$$\frac{du}{dt} = uf(u,v), \quad \frac{dv}{dt} = vg(u,v).$$

Suponga que las funciones f y g satisfacen las siguientes condiciones:

- $f_v < 0$, $g_u > 0$.

- Para algún $v_1 > 0$, $f(0, v_1) = 0$, y para para algún $u_1 > 0$, $g(u_1, 0) = 0$.
- Existe $u_2^* > 0$ tal que $f(u_2^*, 0) = 0$.
- $f_u > 0$ para u pequeño, $f_u < 0$ para u grande, y $g_v < 0$.
- Existe un estado de equilibrio de coexistencia (u^*, v^*) que es inestable, y la pendiente de la nulclina $f(u.v) = 0$ en (u^*, v^*) es positiva.

(a) Interprete cada una de las condiciones anteriores.

(b) Con la información obtenida, haga un bosquejo del retrato de fase del sistema.

(c) Muestre que el sistema tiene un ciclo límite en el primer cuadrante.

(d) Proponga funciones f y g explícitas que satisfagan todas las condiciones anteriores (podrían depender de parámetros), interprete el modelo particular obtenido y, con la ayuda de un computador, grafique el retrato de fase. ¿Qué predicciones puede hacer a partir del modelo? ¿Son las predicciones consistentes con la interpretación del modelo? Justifique sus respuestas.