Modelando una epidemia zombie

4 modelos basados en la cultura popular zombie

O'Bryan Cárdenas Andaur

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

11 de diciembre de 2018

Introducción

Motivación: ¿Por qué modelar una epidemia zombie?

- Los zombies son uno de los monstruos más populares.
- Una epidemia zombie tiene la mayoría de las características de una epidemia real.
- Uso de diversas herramientas matemáticas: Estadística, Sistemas Dinámicos, etc.
- Como herramienta de divulgación.

Modelo 1: Lo básico

Hipótesis

- Los humanos susceptibles nacen a una tasa constante y pueden morir tanto por un ataque zombie como por causas naturales.
- Los muertos pueden revivir convertidos en zombies.
- Lo humanos susceptibles pueden transformarse en zombies mediante la transmisión de la enfermedad luego de un encuentro con uno de estos. Esta transformación es inmediata.
- Los zombies pueden ser asesinados por los humanos.
- Los zombies no se atacan entre ellos.

Ecuaciones

El modelo que cumple con las hipótesis hipótesis anteriores es:

$$X_1 : \begin{cases} \frac{dS}{dt} & = \pi - \beta S Z - \delta S \\ \frac{dZ}{dt} & = \beta S Z + \rho R - \alpha S Z \\ \frac{dR}{dt} & = \delta S + \alpha S Z - \rho R \end{cases}$$

donde S es la población susceptible, Z es la población zombie y R son los removidos. Por lo tanto $S, Z, R \in \mathbb{R}_0^+$. Y todos los parámetros son positivos.

Parámetros

- π : representa la tasa de nacimientos de población susceptible.
- α : representa la probabilidad de que un susceptible gane un combate contra un zombie y lo mate.
- β : representa la probabilidad de que un susceptible pierda un combate contra un zombie y sea contagiado.
- δ : representa la tasa de muerte natural de los susceptibles.
- ρ : representa la probabilidad de que un removido regrese como zombie.

Análisis

Notamos que $S' + Z' + R' = \pi$ y por lo tanto $S + Z + R \to \infty$ cuando $t \to \infty$ siempre y cuando $\pi \neq 0$.

Se puede asumir que el brote de zombies ocurre en una escala pequeña de tiempo, es posible ignorar los nacimientos y muertes naturales, es decir $\pi = \delta = 0$ y luego realizar el análisis estándar.

Análisis

Se iguala cada ecuación del sistema de EDOs a 0 en vías de encontrar los puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = -\beta S Z = 0 \\ \frac{dZ}{dt} & = \beta S Z + \rho R - \alpha S Z = 0 \\ \frac{dR}{dt} & = \alpha S Z - \rho R = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene que $S = 0$ o $Z = 0$:

(a) Si $S = 0$ entonces $R = 0$ y se tiene el equilibrio 'Doomsday': $(0, \bar{Z}, 0)$.

(b) Si $Z = 0$ entonces $R = 0$ y se tiene un equilibrio libre de enfermedad: $(N, 0, 0)$, donde N es el total de la población libre de enfermedad.

Análisis

Calculando la matriz Jacobiana jacobiana de X_1:

$$J(S,Z,R) = \begin{bmatrix} -\beta Z & -\beta S & 0 \\ (\beta-\alpha)Z & (\beta-\alpha)S & \rho \\ \alpha Z & \alpha S & -\rho \end{bmatrix}$$

y evaluando los puntos de equilibrio se concluye que para cualquier combinación de parámetros:

(a) El equilibrio 'Doomsday', $(0, \bar{Z}, 0)$, es estable.

(b) El equilibrio libre de enfermedad, $(N, 0, 0)$, es inestable.

Simulaciones

$$(S_0, Z_0, R_0) = (1, 0, 0) \text{ y } (\alpha, \beta, \rho) = (0{,}005; 0{,}095; 0{,}0001)$$

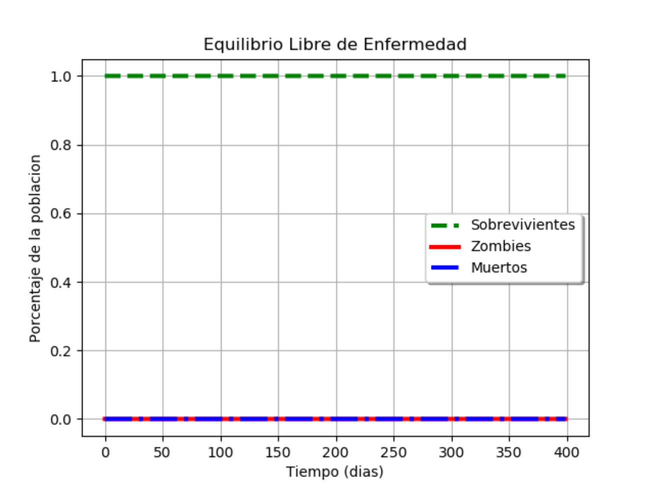


Figura: Equilibrio libre de enfermedad

Simulaciones

$$(S_0, Z_0, R_0) = (0{,}9999, 0{,}0001, 0) \text{ y } (\alpha, \beta, \rho) = (0{,}005; 0{,}095; 0{,}0001)$$

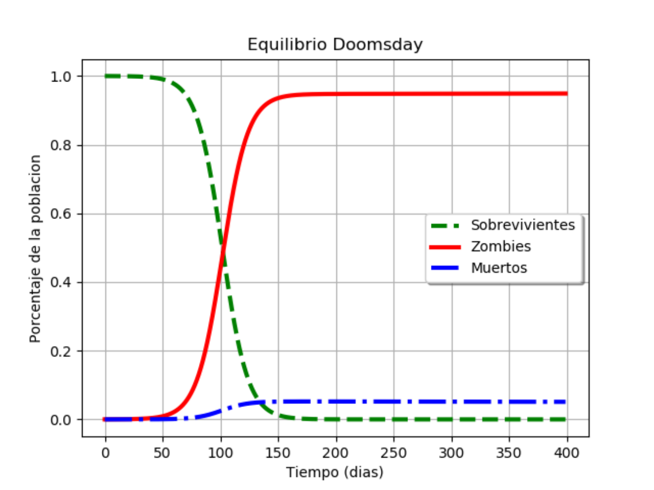
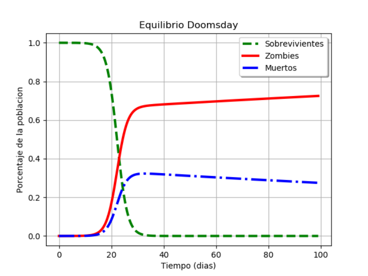


Figura: Equilibrio Doomsday (1)

Simulaciones

$$(S_0, Z_0, R_0) = (0{,}99999; 0, 00001; 0) \text{ y } (\alpha, \beta, \rho) = (0{,}25; 0{,}75; 0{,}0025)$$



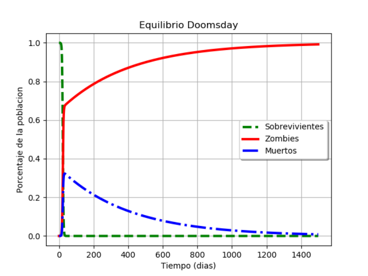


Figura: Equilibrio Doomsday (2)

Modelo 2: Zombies más 'Reales'

Hipótesis

- Mismas hipótesis del primer modelo excepto la conversión inmediata humano-zombie.
- Susceptibles pasan a infectados y luego a zombies.
- Infectados también pueden morir por causas naturales.

Ecuaciones

El modelo que cumple con las hipótesis hipótesis anteriores es:

$$X_2 : \begin{cases} \frac{dS}{dt} & = \pi - \beta SZ - \delta S \\ \frac{dI}{dt} & = \beta SZ - \mu I - \delta I \\ \frac{dZ}{dt} & = \mu I + \rho R - \alpha SZ \\ \frac{dR}{dt} & = \delta S + \delta I + \alpha SZ - \rho R \end{cases}$$

donde S es la población susceptible, I es la población infectada pero no convertida, Z es la población zombie y R son los removidos. Por lo tanto $S, I, Z, R \in \mathbb{R}_0^+$. Y todos los parámetros son positivos.

Parámetros

- π : representa la tasa de nacimientos de población susceptible.
- α : representa la probabilidad de que un susceptible gane un combate contra un zombie y lo mate.
- β : representa la probabilidad de que un susceptible pierda un combate contra un zombie y sea infectado.
- δ : representa la tasa de muerte natural de los susceptibles e infectados.
- ρ : representa la probabilidad de que un removido regrese como zombie.
- μ : representa la probabilidad de que un infectado se transforme en zombie.

Análisis

Se realiza el mismo supuesto que en el primer modelo e igualan todas las ecuaciones a cero:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = -\beta SZ = 0 \\ \frac{dI}{dt} & = \beta SZ - \mu I = 0 \\ \frac{dZ}{dt} & = \mu I + \rho R - \alpha SZ = 0 \\ \frac{dR}{dt} & = \alpha SZ - \rho R = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene que $S = 0$ o $Z = 0$:
(a) Si $S = 0$ entonces $R = I = 0$ y se tiene un nuevo equilibrio 'Doomsday': $(0, 0, \bar{Z}, 0)$.
(b) Si $Z = 0$ entonces $R = I = 0$ y se tiene un equilibrio libre de enfermedad: $(N, 0, 0, 0)$.

Análisis

Calculando la matriz Jacobiana jacobiana de X_2:

$$J(S,I,Z,R) = \begin{bmatrix} -\beta Z & 0 & -\beta S & 0 \\ \beta Z & -\mu & \beta S & 0 \\ -\alpha Z & \mu & -\alpha S & \rho \\ \alpha Z & 0 & \alpha S & -\rho \end{bmatrix}$$

y evaluando los puntos de equilibrio se concluye que para cualquier combinación de parámetros:

(a) El equilibrio 'Doomsday', $(0,0,\bar{Z},0)$, es estable.

(b) El equilibrio libre de enfermedad, $(N,0,0,0)$, es inestable.

Simulaciones

$$(S_0, I_0, Z_0, R_0) = (1, 0, 0, 0) \text{ y } (\alpha, \beta, \rho, \mu) = (0{,}25; 0{,}75; 0{,}0005; 0{,}005)$$

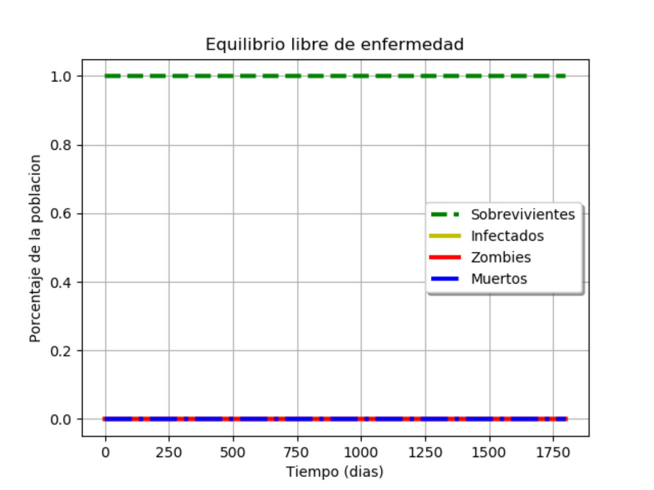


Figura: Equilibrio libre de enfermedad

Simulaciones

$$(S_0, I_0, Z_0, R_0) = (0{,}9999; 0; 0{,}0001; 0) \text{ y}$$
$$(\alpha, \beta, \rho, \mu) = (0{,}25; 0{,}75; 0{,}0005; 0{,}005)$$

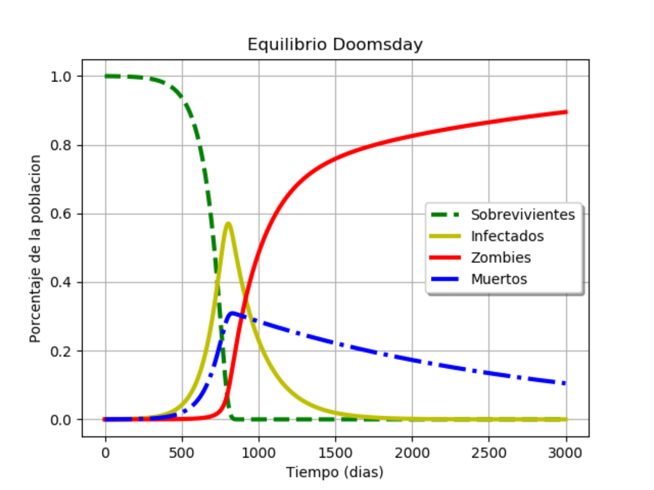


Figura: Equilibrio doomsday.

Modelo 2.1: Cuarentena

Hipótesis

- Mismas hipótesis del segundo modelo.
- Se incorpora una nueva población 'Cuarentena'.
- Solo infectados o zombies pasan a estado de cuarentena.
- Los individuos que intentan escapar del área de cuarentena son asesinados y pasan a ser removidos.
- De igual forma, estos removidos pueden revivir como zombies.

Ecuaciones

El modelo que cumple con las hipótesis hipótesis anteriores es:

$$X_3 : \begin{cases} \frac{dS}{dt} & = \pi - \beta S Z - \delta S \\ \frac{dI}{dt} & = \beta S Z - \mu I - \delta I - \kappa I \\ \frac{dZ}{dt} & = \mu I + \rho R - \alpha S Z - \sigma Z \\ \frac{dR}{dt} & = \delta S + \delta I + \alpha S Z - \rho R + \gamma Q \\ \frac{dQ}{dt} & = \kappa I + \sigma Z - \gamma Q \end{cases}$$

donde S es la población susceptible, I es la población infectada pero no convertida, Z es la población zombie, R son los removidos y Q es la población en cuarentena. Por lo tanto $S, I, Z, R, Q \in \mathbb{R}_0^+$. Y todos los parámetros son positivos.

Parámetros

- π : representa la tasa de nacimientos de población susceptible.
- α : representa la probabilidad de que un susceptible gane un combate contra un zombie y lo mate.
- β : representa la probabilidad de que un susceptible pierda un combate contra un zombie y sea infectado.
- δ : representa la tasa de muerte natural de los susceptibles e infectados.
- ρ : representa la probabilidad de que un removido regrese como zombie.
- μ : representa la probabilidad de que un infectado se transforme en zombie.
- κ : representa la tasa de infectados que pasan a cuarentena.
- σ : representa la tasa de zombies que pasan a cuarentena.
- γ : representa la probabilidad de que alguien en cuarentena intente escapar.

Análisis

Se realiza el mismo supuesto que en el primer modelo e igualan todas las ecuaciones a cero:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = -\beta SZ = 0 \\ \frac{dI}{dt} & = \beta SZ - \mu I - \kappa I = 0 \\ \frac{dZ}{dt} & = \mu I + \rho R - \alpha SZ - \sigma Z = 0 \\ \frac{dR}{dt} & = \alpha SZ - \rho R + \gamma Q = 0 \\ \frac{dQ}{dt} & = \kappa I + \sigma Z - \gamma Q = 0 \end{cases}$$

Análisis

De la primera ecuación se tiene que $S = 0$ o $Z = 0$:

(a) Si $S = 0$ entonces $I = 0$ y la tercera, cuarta y quinta ecuación quedan como sigue:

$$\begin{cases} \rho R & = \sigma Z \\ \rho R & = \gamma Q \\ \gamma Q & = \sigma Z \end{cases}$$

por lo que $R = \frac{\sigma}{\rho} Z$ y $Q = \frac{\sigma}{\gamma} Z$ y se tiene el equilibrio: $(0, 0, \bar{Z}, \dfrac{\sigma}{\rho}\bar{Z}, \dfrac{\sigma}{\gamma}\bar{Z})$.
(b) Si $Z = 0$ entonces $R = I = Q = 0$ y se tiene un equilibrio libre de enfermedad: $(N, 0, 0, 0, 0)$.

Análisis

Se calcula la matriz Jacobiana jacobiana de X_3:

$$J(S,I,Z,R,Q) = \begin{bmatrix} -\beta Z & 0 & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta Z & -\mu-\kappa & \beta S & 0 & 0 \\ -\alpha Z & \mu & -\alpha S-\sigma & \rho & 0 \\ \alpha Z & 0 & \alpha S & -\rho & \gamma \\ 0 & \kappa & \sigma & 0 & -\gamma \end{bmatrix}$$

y evalúan los puntos de equilibrio para determinar los valores propios. En este caso el análisis se vuelve más complicado para el equilibrio libre de enfermedad, no así para el el equilibrio Doomsday que sigue siendo estable.

Análisis

Para el equilibrio libre de enfermedad se obtiene el siguiente polinomio característico:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda(\mu+\kappa+\lambda)[\lambda^2+\lambda(\alpha N+\sigma+\rho+\gamma)+(\alpha N\gamma+\sigma(\rho+\gamma)+\rho\gamma)] - \beta N[\lambda^2\mu+\lambda(\mu\rho+\mu\gamma-\rho\kappa)+\rho(\mu\gamma-\rho\kappa)]) = \lambda P_4(\lambda)$$

$P_4(\lambda)$ es un polinomio de grado 4 con factor de λ^4 igual a 1 por ende:

$$\lim_{\lambda\to-\infty} = +\infty \text{ y } \lim_{\lambda\to+\infty} = +\infty$$

Su término libre es $-\beta N\rho(\mu\gamma-\rho\kappa)$, si este término es siempre negativo, entonces corta al eje Y en la parte negativa y por lo tanto podemos asegurar que al menos una de sus soluciones tiene parte real positiva.

Esto llevaría a conlcuir que el equilibrio es siempre inestable, análogamente a los otros modelos.

Análisis

Para asegurar lo anterior, requerimos que:

$$-\beta N\rho(\mu\gamma - \rho\kappa) < 0 \Leftrightarrow \mu\gamma - \rho\kappa > 0 \Leftrightarrow \mu\gamma > \rho\kappa \Leftrightarrow \frac{\mu\gamma}{\rho\kappa} > 1$$

Esto no siempre es cierto.

Segunda alternativa de análisis: número básico de reproducción de la infección R_0.

Análisis

Se propone utilizar el 'Método de Siguiente Generación' el cual define R_0 como el radio espectral de un producto de dos matrices F y V^{-1} definidas a continuación:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } V = \begin{bmatrix} \mu+\kappa & 0 & 0 \\ -\rho & \alpha N+\sigma & 0 \\ -\kappa & -\sigma & \gamma \end{bmatrix}$$

donde F es la matriz de nuevas infecciones y V es la matriz de transferencia entre las poblaciones I, Z, Q.

Así, se obtiene $R_0 = \frac{\beta N \mu}{(\mu+\kappa)(\alpha N+\sigma)}$.

Para grandes poblaciones, un buen R_0 podría aproximarse por $\frac{\beta\mu}{\alpha(\mu+\kappa)}$.

Simulaciones

$$(S_0, I_0, Z_0, R_0, Q_0) = (0{,}99999; 0; 0{,}0001; 0; 0) \text{ y}$$
$$(\alpha, \beta, \rho, \mu, \kappa, \sigma, \gamma) = (0{,}25; 0{,}75; 0{,}0005; 0{,}005; 0{,}025; 0{,}01; 0{,}05)$$

$$R_0 \sim \frac{0{,}75 * 0{,}005}{0{,}25 * (0{,}005 + 0{,}025)} = 0{,}5$$

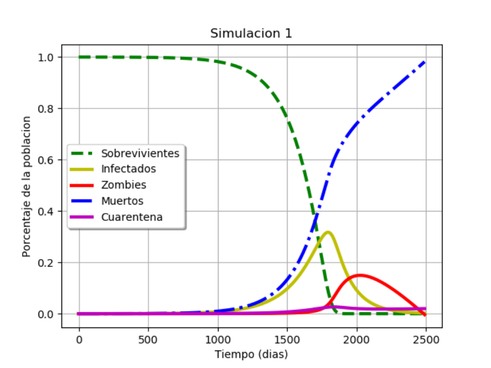


Figura: Simulación 1

Simulaciones

$$(S_0, I_0, Z_0, R_0, Q_0) = (0{,}99999; 0; 0{,}0001; 0; 0) \text{ y}$$
$$(\alpha, \beta, \rho, \mu, \kappa, \sigma, \gamma) = (0{,}25; 0{,}75; 0{,}0005; 0{,}005; 0{,}0025; 0{,}001; 0{,}05)$$

$$R_0 \sim \frac{0{,}75 * 0{,}005}{0{,}25 * (0{,}005 + 0{,}0025)} = 2$$

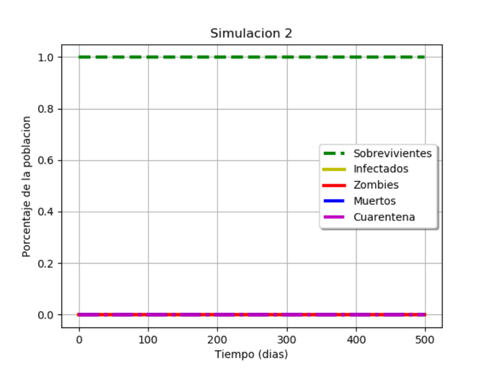


Figura: Simulación 2

Simulaciones

$$(S_0, I_0, Z_0, R_0, Q_0) = (0{,}99999; 0; 0{,}0001; 0; 0) \text{ y}$$
$$(\alpha, \beta, \rho, \mu, \kappa, \sigma, \gamma) = (0{,}1; 0{,}9; 0{,}005; 0{,}05; 0{,}001; 0{,}00001; 0{,}5)$$

$$R_0 \sim \frac{0{,}8 * 0{,}005}{0{,}2 * (0{,}005 + 0{,}01)} = 1{,}3$$

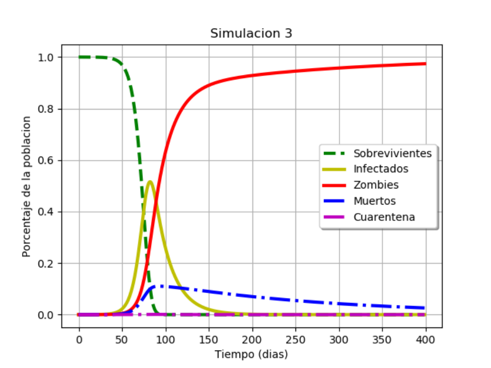


Figura: Simulación 3

Modelo 2.2: Una cura ha sido hallada!

Hipótesis

- Mismas hipótesis del segundo modelo.
- La cura regresa a los zombies a su forma humana original, independientemente de como hayan sido convertidos en zombies.
- Una vez curados, los humanos se vuelven susceptibles nuevamente, es decir, pueden volver a ser infectados.

Ecuaciones

El modelo que cumple con las hipótesis anteriores es:

$$X_4 : \begin{cases} \frac{dS}{dt} & = \pi - \beta SZ - \delta S + cZ \\ \frac{dI}{dt} & = \beta SZ - \mu I - \delta I \\ \frac{dZ}{dt} & = \mu I + \rho R - \alpha SZ - cZ \\ \frac{dR}{dt} & = \delta S + \delta I + \alpha SZ - \rho R \end{cases}$$

donde S es la población susceptible, I es la población infectada pero no convertida, Z es la población zombie y R son los removidos. Por lo tanto $S, I, Z, R \in \mathbb{R}_0^+$. Y todos los parámetros son positivos.

Parámetros

- π : representa la tasa de nacimientos de población susceptible.
- α : representa la probabilidad de que un susceptible gane un combate contra un zombie y lo mate.
- β : representa la probabilidad de que un susceptible pierda un combate contra un zombie y sea infectado.
- δ : representa la tasa de muerte natural de los susceptibles e infectados.
- ρ : representa la probabilidad de que un removido regrese como zombie.
- μ : representa la probabilidad de que un infectado se transforme en zombie.
- c : representa la tasa de zombies a los que se les aplica la cura.

Análisis

Se realiza el mismo supuesto que en el primer modelo e igualan todas las ecuaciones a cero:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = -\beta S Z + cZ = 0 \\ \frac{dI}{dt} & = \beta S Z - \mu I = 0 \\ \frac{dZ}{dt} & = \mu I + \rho R - \alpha S Z - cZ = 0 \\ \frac{dR}{dt} & = \alpha S Z - \rho R = 0 \end{cases}$$

Análisis

De la primera ecuación se tiene que $Z = 0$ o $S = c/\beta$:

(a) Si $Z = 0$ entonces $R = I = 0$ y se tiene el equilibrio libre de enfermedad: $(N, 0, 0, 0)$.
(b) Si $S = c/\beta$ entonces es posible sustituir este término en las demás ecuaciones para determinar el equilibrio endémico:

$$\begin{cases} cZ & = \mu I \\ \mu I + \rho R & = (\frac{\alpha c}{\beta} + c)Z \\ \frac{\alpha c}{\beta} Z & = \rho R \end{cases}$$

Dejando I, R en función de Z, se obtiene el equilibrio $(\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\mu}\bar{Z}, \bar{Z}, \frac{\alpha c}{\beta \rho}\bar{Z})$.

Análisis

Calculando la matriz Jacobiana jacobiana de X_4:

$$J(S,I,Z,R) = \begin{bmatrix} -\beta Z & 0 & -\beta S + c & 0 \\ \beta Z & -\mu & \beta S & 0 \\ -\alpha Z & \mu & -\alpha S - c & \rho \\ \alpha Z & 0 & \alpha S & -\rho \end{bmatrix}$$

y evaluando los puntos de equilibrio se tienen los siguientes polinomios carácterísticos

(a) $(N,0,0,0)$:
$P(\lambda) = \lambda[\lambda^3 + \lambda^2(c+\rho+\alpha N+\mu)+\lambda(c\rho+\mu(c+\rho+\alpha N)-\beta N\mu)+\mu\rho(c-\beta N)]$

(b) $(\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\mu}\bar{Z}, \bar{Z}, \frac{\alpha c}{\beta\rho}\bar{Z})$:
$P(\lambda) = \lambda(\beta\bar{Z}+\lambda)[\lambda^2 + \lambda(\rho + \frac{\alpha c}{\beta} + \mu + c) + \frac{\alpha c\mu}{\beta} + c\rho + \mu\rho]$

Análisis

Así, para

(a) $(N, 0, 0, 0)$: se tiene que $\lambda_1 = 0$. Además, se puede establecer que si $\mu\rho(c - \beta N) < 0$ entonces existe un valor propio positivo y por lo tanto el equilibrio es inestable.

(b) $(\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\mu}\bar{Z}, \bar{Z}, \frac{\alpha c}{\beta\rho}\bar{Z})$: se tienen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\beta\bar{Z}$ y
$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}[-(\rho + \frac{\alpha c}{\beta} + \mu + c) \pm \sqrt{(\rho + \frac{\alpha c}{\beta} + \mu + c)^2 - 4(\frac{\alpha c\mu}{\beta} + c\rho + \mu\rho)}]$.
En caso que el argumento de la raíz sea positivo, se tiene que $\lambda_{3,4} < 0$, en caso contrario, los valores propios son complejos conjugados pero con parte real negativa y por ende el equilibrio es siempre estable.

Simulaciones

$$(S_0, I_0, Z_0, R_0) = (0{,}9999; 0; 0{,}0001; 0) \text{ y}$$
$$(\alpha, \beta, \rho, \mu, c) = (0{,}005; 0{,}095; 0{,}0001; 0{,}005; 0{,}01)$$

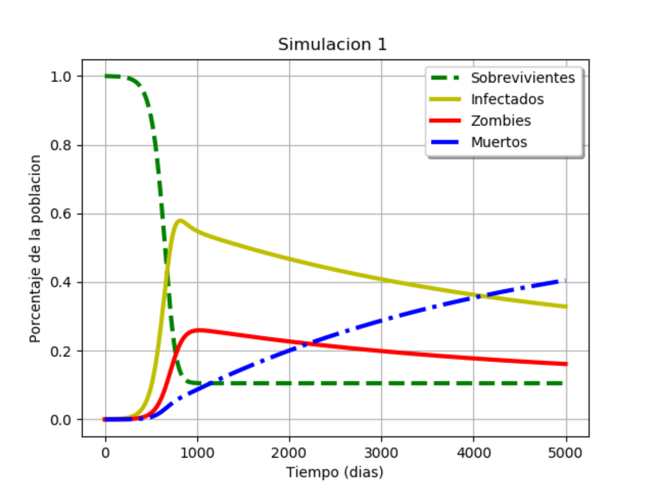


Figura: Simulación 1

Simulaciones

$$(S_0, I_0, Z_0, R_0) = (0{,}9999; 0; 0{,}0001; 0) \text{ y}$$
$$(\alpha, \beta, \rho, \mu, c) = (0{,}005; 0{,}095; 0{,}0001; 0{,}005; 0{,}05)$$

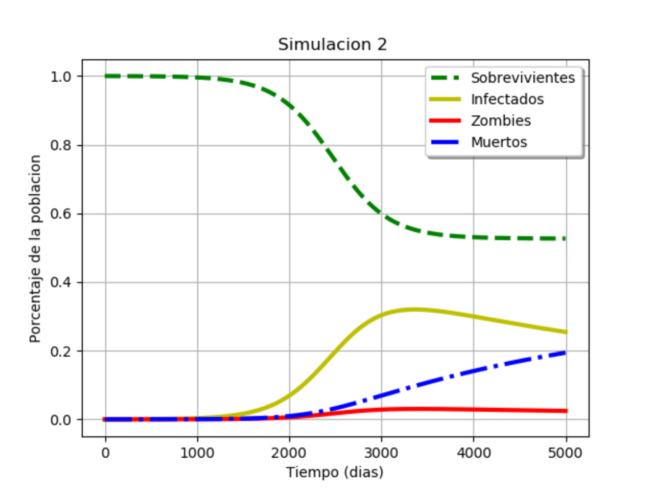


Figura: Simulación 2.

Extensiones posibles

- En estos modelos no hay muertos definitivos.
- Los zombies matan humanos.
- Los humanos pueden ser clasificados según su experiencia en combate o uso de armas de fuego.

Gracias por su atención