Mat 341 - Sistemas Dinámicos y Caos
Tarea 3

Julio de 2020

Profesores: José Pablo Mujica - Pablo Aguirre.

1.- [33 pts.] Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una aplicación del círculo unitario dada por $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$, o equivalentemente, por $f(\theta) = 2\theta$, con $\theta = \theta + 2n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

a) Demuestre que los puntos k-periódicos de f vienen dados en la forma $x(n) = e^{i2n\pi/(2^k-1)}$, con $n = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 2$.

b) Demuestre que el mapeo f es caótico en $\mathbb{S}^1$. Es decir, pruebe que: (i) El conjunto de puntos periódicos es denso en $\mathbb{S}^1$; (ii) f es transitiva en $\mathbb{S}^1$; (c) f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

2.- [33 pts.] Considere una órbita periódica estable Γ de un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ y la aplicación de retorno de Poincaré $P : \Sigma \to \Sigma$ definida en una sección Σ transversal a Γ. Suponga que P pasa por una *cascada de duplicaciones de período al caos*.

a) Haga un bosquejo (dibujo esquemático) de la dinámica en el espacio de fase **tridimensional** antes y después de la primera duplicación de período.

b) Bosqueje la dinámica **del mapeo de Poincaré** P antes y después de la **primera** duplicación de período indicando los puntos fijos y puntos periódicos. ¿Cuál es el conjunto atractor del mapeo de Poincaré en cada caso? Describa brevemente el bosquejo.

c) Bosqueje la secuencia de **atractores** del mapeo de Poincaré **a lo largo de la ruta al caos**, i.e., a medida que el parámetro de bifurcación va pasando por toda la secuencia de valores de bifurcación. Describa brevemente el bosquejo. ¿Cómo es el conjunto atractor al final de la ruta al caos?

d) Explique en términos de estirar y doblar ¿por qué la dinámica del sistema es caótica después de la secuencia de duplicación de período?

3.- **[34 pts.]** Considere el mapeo unidimensional

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 1/2; \\ 4 - 4x, & x > 1/2; \end{cases}$$

y el conjunto

$$\Lambda = \{x \in [0,1] : \ f^n(x) \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}\}$$

de puntos que nunca abandonan el intervalo $[0,1]$ bajo iteración de f. Defina el itinerario $s(x)$ de un punto $x \in \Lambda$ como $s(x) = (a_0 a_1 a_2 \ldots)$ donde

$$a_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq f^i(x) < 1/2; \\ 1, & 1/2 < f^i(x) \leq 1. \end{cases}$$

a) Muestre mediante una iteración gráfica (o diagrama de telaraña) que cualquier condición inicial $x_0 \notin [0,1]$ se escapa a $-\infty$ bajo iteración de f. Es decir, si $x_0 \notin [0,1]$, entonces $f^n(x_0) \to -\infty$ a medida que $n \to \infty$.

b) Calcule la órbita de $\frac{1}{65}$ (*Sugerencia*: Use fracciones!) y bosquéjela como diagrama de telaraña. ¿Cuál es el itinerario de $\frac{1}{65}$?

c) Muestre que $p_k = \frac{1}{4^k+1}$ converge a una órbita periódica de período k para cualquier entero $k \geq 1$. ¿Cuál es el itinerario de $p_k = \frac{1}{4^k+1}$?

d) Dé un argumento que muestre que Λ es un conjunto de Cantor y que la dinámica de f restringida a Λ es caótica.

Observaciones:

- Fecha límite de entrega: viernes 24 de julio, 20:00 hrs.
- La tarea se entrega vía email a jose.mujica@usm.cl.
- Formatos admitidos para entrega de tareas: **Latex** (preferente) o algún editor equivalente, tareas hechas a mano escaneadas o fotografiadas. En este último caso, el estudiante es responsable del orden y legibilidad del documento.
- Importante: Si decide hacer su tarea a mano, **enviar un solo archivo con sus desarrollos**.
- El nombre del archivo con sus desarrollos enviado por email debe tener el siguiente formato: **Tarea4_SD_Nombre_Apellido**.