Mat 341 - Sistemas Dinámicos y Caos
Tarea 3

junio de 2020

Profesores: José Pablo Mujica - Pablo Aguirre.

1. **[15 ptos] Ciclo límite.** Considere una vecindad cuadrada de la silla hiperbólica que indica la figura 1. Acá, v_1 y v_2 son vectores propios con valores propios $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, respectivamente. Suponga que un ciclo límite entra a la vecindad cuadrada en el punto $a = I - I_b$, donde $I_b > 0$ es una constante e $I \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Determine el tiempo que la trayectoria está en la vecindad cuadrada en función de I. Discuta que ocurre con el ciclo límite cuando $I \to I_b$.

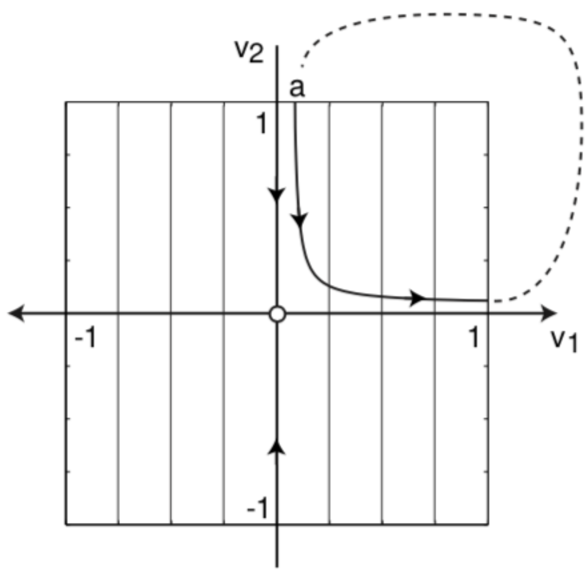

Figura 1: Ciclo límite entrando en la vecindad cuadrada.

2. **[20 ptos] Multiplicadores de Floquet.** Sea L una órbita periódica del campo de vectores $\dot{x} = f(x, \alpha)$ con $x \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y f suficientemente suave. Considere una aplicación de Poincaré P_α y el punto fijo p_α asociados a L. Suponga que para $\alpha = 0$, p_α posee multiplicadores $\mu_1(0) = -1$ y $\mu_2(0) < -1$.

   a) Haga bosquejos de todos los diagramas de bifurcación y todos los posibles retratos de fase no-equivalentes del campo vectorial f para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Justifique su respuesta.

b) Determine las dimensiones de las variedades estable e inestable de todas las órbitas periódicas hiperbólicas de f presentes en cada caso descrito en (a). Justifique su respuesta.

3. **[25 ptos] Región atrapadora y atractor periódico.** Sea $(r,\theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times S^1$ y considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 + a\cos\theta - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

donde $|a| < 1$.

a) Demuestre que el círculo $r = 0$ es una órbita periódica con período 2π.

b) Demuestre que los multiplicadores de Floquet de $r = 0$ son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{2\pi}$.

c) Demuestre que hay dos círculos $r = r_-$ y $r = r_+$ tales que si $0 < r < r_-$ entonces $\dot{r} > 0$; y si $r > r_+$ entonces $\dot{r} < 0$. Luego la región $N = \{(r,\theta) : r_- < r < r_+\}$ es una región atrapadora.

El objetivo es probar que el conjunto atractor en N es una órbita periódica. Para ello:

d) Sea S el rayo $\{(r,0), r > 0\}$. Argumente que S es una sección global, es decir, el campo de vectores es transversal en todos los puntos de S. Sea $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ el mapeo de Poincaré en S.

e) Supongamos que la órbita del punto $(r_L, 0)$ cumple que $0 < P(r_L) < r_-$. Argumente que $P(r_L) > r_L$. Alternativamente, suponga que la órbita del punto $(r_H, 0)$ cumple que $P(r_H) > r_+$ y entonces argumente que se debe tener $P(r_H) < r_H$.

f) Aplique el teorema del valor intermedio a $P(r)$ para probar que existe un punto $(r^*, 0)$ con $r_L < r^* < r_H$ cuya órbita es periódica.

g) Demuestre que los multiplicadores de Floquet de esta nueva órbita cerrada son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{-4\pi}$ y, en consecuencia, este ciclo límite es asintóticamente estable. *Ayuda:* Para calcular la integral $\int_0^{2\pi} r^2(t)dt$ use la ecuación diferencial para tener $r^2 = 1 + a\cos\theta - \dfrac{\dot{r}}{r}$.

4. **[25 ptos] Nulclinas continuas a tramos y relajación-oscilación.** Considere la ecuación $\ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} + x = 0$, donde $f(x) = -1$ para $|x| > 1$ y $f(x) = 1$ para $|x| \geq 1$.

a) Pruebe que el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu(y - F(x)), \\ \dot{y} &= -\dfrac{x}{\mu}, \end{cases}$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1 \\ -x, & |x| \leq 1 \\ x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Grafique las nulclinas.

c) Pruebe que el sistema exhibe oscilaciones de relajación para $\mu \gg 1$ y grafique el ciclo límite en el plano (x, y).

d) Estime el período del ciclo límite para $\mu \gg 1$.

5. **[15 ptos] Oscilador forzado periódicamente.** Considere el oscilador forzado periódicamente

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

con $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1$.

a) Verifique que la solución es de la forma $\Phi^t(x_0, \theta_0) = \left(\left(\frac{1}{x_0} - t \right)^{-1}, t + \theta_0 \right)$.

b) Considere la sección $\Sigma = \{(x, \theta) : \theta = 0\}$. Verifique que el mapeo de Poincaré para $x_0 \in \left(-\infty, \frac{1}{2\pi} \right)$.

c) Pruebe que las órbitas de Φ^t, con $x_0 \geq \frac{1}{2\pi}$, se escapan a ∞ en tiempo $t \leq 2\pi$. ¿Qué puede decir acerca de la aplicación de Poincaré definida en Σ?

Observaciones:

- Fecha límite de entrega: viernes 3 de julio, 20:00 hrs.
- La tarea se entrega vía email a jose.mujica@usm.cl.
- Formatos admitidos para entrega de tareas: **Latex** (preferente) o algún editor equivalente, tareas hechas a mano escaneadas o fotografiadas. En este último caso, el estudiante es responsable del orden y legibilidad del documento.
- Importante: Si decide hacer su tarea a mano, **enviar un solo archivo con sus desarrollos**.
- El nombre del archivo con sus desarrollos enviado por email debe tener el siguiente formato: **Tarea3_SD_Nombre_Apellido**.