Mat 341 - Sistemas Dinámicos y Caos
Tarea 2

mayo de 2020

Profesores: José Pablo Mujica - Pablo Aguirre.

1. **[20 puntos] (Bifurcación transcrítica)** Considere la ecuación de primer orden

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx}),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

   a) Pruebe que el origen $x = 0$ pasa por una bifurcación transcrítica cuando a y b están en cierta curva en el plano de parámetros (a, b). Determine dicha curva y grafíquelas en el plano (a, b).

   Observación: Esta curva en el plano (a, b) corresponde a una curva de bifurcación, es decir, entrega condiciones sobre los parámetros a y b en donde la bifurcación ocurre.

   b) Encuentre una fórmula aproximada para el punto de equilibrio (no nulo) que se bifurca desde $x = 0$, asumiendo que los parámetros son cercanos a la curva de bifurcación.

2. **[20 puntos] (Bifurcación de Hopf)** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{v} &= F(v) - u, \\ \dot{u} &= \mu(bv - u), \end{cases}$$

donde $\mu > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene suficiente diferenciabilidad. Pruebe que el sistema pasa por una bifurcación de Hopf, y que se verifica $F' = \mu$ y $b > \mu$. Pruebe además que el punto de bifurcación satisface

$$l_1 = \frac{1}{16}\left(F''' + \frac{(F'')^2}{b - \mu}\right),$$

donde l_1 corresponde a la primera cantidad de Lyapunov.

Observación: No es necesario probar la existencia del punto de equilibrio.

3. **[20 puntos] (Caso Particular)** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{v} &= I + v^2 - u, \\ \dot{u} &= a(bv - u), \end{cases} \tag{1}$$

con parámetros $I, b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Pruebe que (1) pasa por *a*) Una bifurcación silla-nodo cuando $b^2 = 4I$.

b) Una bifurcación de Hopf cuando $a < b$ y $a^2 - 2ab + 4I = 0$. Use el resultado del problema anterior para discutir acerca de la criticalidad de la bifurcación.

4. **[20 puntos] (Más bifurcaciones)** Considere el sistema planar en coordenadas polares

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5, \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{cases}$$

con $\omega > 0$ fijo. Describa la dinámica del sistema para los distintos valores del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$. Haga especial énfasis en bifurcaciones y aparición o desaparición de objetos relevantes. *Sugerencia: considere los valores críticos* $\mu = -\frac{1}{4}$ *y* $\mu = 0$ *(¿por qué ?).*

5. **[20 puntos] (Dinámica discreta)** Considere el sistema dinámico discreto $x \mapsto f(x)$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto k-periódico con órbita

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\}.$$

a) Demuestre que $O(x_0)$ es estable si $|f'(x_0) \cdot f'(f(x_0)) \cdot \ldots \cdot f'(f^{k-1}(x_0))| < 1$.

b) Demuestre que $O(x_0)$ es inestable si $|f'(x_0) \cdot f'(f(x_0)) \cdot \ldots \cdot f'(f^{k-1}(x_0))| > 1$.

c) Considere el mapeo $x \mapsto 1 - x^2$ definido para $x \in [-1, 1]$. Encuentre todos los 2-ciclos y determine su estabilidad.

Observaciones:

- Fecha límite de entrega: viernes 29 de mayo, 19:59 hrs.
- La tarea se entrega vía email a jose.mujica@usm.cl.
- Formatos admitidos para entrega de tareas: **Latex** (preferente) o algún editor equivalente, tareas hechas a mano escaneadas o fotografiadas. En este último caso, el estudiante es responsable del orden y legibilidad del documento.
- Importante: Si decide hacer su tarea a mano, **enviar un solo archivo con sus desarrollos**.
- El nombre del archivo con sus desarrollos enviado por email debe tener el siguiente formato: **Tarea2_SD_Nombre_Apellido**.