Mat 341 - Sistemas Dinámicos y Caos
Tarea 1

27 de abril de 2020

Profesores: José Pablo Mujica - Pablo Aguirre.

1. **[25 ptos] Sistemas Hamiltonianos.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $H : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

se conoce como un *sistema Hamiltoniano* con *función Hamiltoniana* H. Es objetivo de este problema es conocer algunas propiedades de los sistemas Hamiltonianos.

a) Demuestre que las soluciones del sistema Hamiltoniano (1) corresponden a las curvas de nivel de su respectiva función Hamiltoniana H. Concluya que los puntos de equilibrio de (1) corresponden a los puntos críticos de H.

En lo que sigue, supondremos que el **origen es un punto de equilibrio** para (1).

b) Demuestre que si el origen es un foco o un nodo para (1), entonces no puede ser un máximo o un mínimo local (estricto) para H.

c) Demuestre que si el origen es un punto de equilibrio no-degenerado para (1), entonces es una silla topolgógica o un centro. Concluya que el origen es una silla para (1) si y sólo si es una silla para H, y que un mínimo o máximo local de H corresponde a un centro para (1).

2. **[30 ptos] Equivalencia Topológica entre un nodo y un foco atractor**. Considere los sistemas lineales en el plano

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y \end{cases} \tag{2}$$

y

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= x - y \end{cases} \tag{3}$$

a) Haga un bosquejo de los retratos de fase de ambos sistemas *b*) Escriba ambos sistemas en forma polar y escriba sus soluciones en forma explícita (también en forma polar).

c) Considere el abierto $U = \{(\rho, \theta) : \rho \leq 1\}$. Construiremos una equivalencia topológica $h : U \to U$ entre los sistemas (2) y (3). Para ello:

(c1) Sea $0 \neq x \in U$, con $x = (\rho_0, \theta_0)$. Considere el tiempo τ requerido para moverse desde el punto $(1, \theta_0) \in \partial U$ hasta $x = (\rho_0, \theta_0)$ a lo largo de una órbita del sistema (2). Notar que τ depende sólo de ρ_0. Escriba explícitamente $\tau = \tau(\rho_0)$

(c2) Considere la órbita de (3) partiendo desde el punto $(1, \theta_0)$, y sea $y = (\rho_1, \theta_1)$ el punto al cual llega dicha órbita después de un tiempo $\tau(\rho_0)$.

(c3) Pruebe que el mapeo $h : U \to U$ tal que $y = h(x)$, con y definida en el inciso anterior y $h(0) = 0$ es un homeomorfismo que mapea órbitas de (2) en órbitas de (3) preservando orientación (es decir, una equivalencia topológica entre (2) y (3)!). Escriba explícitamente h. ¿Es h diferenciable? justifique.

Observación: Geométricamente, h transforma al abierto U en sí mismo, rotando cada círculo de la forma $\rho_0 = k$ en un ángulo dependiente de ρ_0.

3. **[30 ptos] Dinámica en el péndulo**. Un péndulo planar amortiguado tiene la ecuación de movimiento

$$Ml\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + Mg \sin\theta = 0,$$

donde θ es un ángulo, M es la masa, l es la longitud del péndulo, g es la constante gravitacional y $c \geq 0$ es el coeficiente de amortiguación, el cual se asume pequeño.

a) Identifique el espacio de fase del sistema.

b) Reescalando el tiempo $t \to \sqrt{\frac{l}{g}}t$ y definiendo $x = \theta$, $y = \sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\theta}$, y $D = \frac{c}{M\sqrt{gl}}$, demuestre que la ecuación del péndulo se reduce al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -Dy - \sin x \end{cases}$$

c) Encuentre los puntos de equilibrio, determine su estabilidad y bosqueje los retratos de fase locales.

d) Bosqueje los retratos de fase globales en los casos $D = 0$ y $D > 0$, describa las variedades estable e inestable globales, y los conjuntos atractores para condiciones iniciales arbitrarias. Además, dé una interpretación física del movimiento del péndulo basada en sus resultados.

Observación: No es necesario realizar cálculos adicionales para responder esta pregunta.

4. **[15 ptos] Un poco de dinámica discreta**. Considere el mapeo $x \mapsto f(x) = x^2 - 2$.

   a) Encuentre los puntos fijos de f.

   b) Demuestre que $f^2(x) - x = (f(x) - x)q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio cuadrático.

   c) Encuentre los puntos periódicos de período 2 de f.

Observaciones:

- Fecha límite de entrega: viernes 8 de mayo, 12:00 hrs.
- La tarea se entrega vía email a jose.mujica@usm.cl.
- Formatos admitidos para entrega de tareas: **Latex** (preferente) o algún editor equivalente, tareas hechas a mano escaneadas o fotografiadas. En este último caso, el estudiante es responsable del orden y legibilidad del documento.
- Importante: Si decide hacer su tarea a mano, **enviar un solo archivo con sus desarrollos**.
- El nombre del archivo con sus desarrollos enviado por email debe tener el siguiente formato: **Tarea1_SD_Nombre_Apellido**.