Oscilaciones de modelos de masas neuronales acoplados

Modelo de Jansen y Rit (1995)

Andrés Sandoval Abarca, Profesor Guía: Patricio Orio
Departamento de matemáticas, Universidad Técnica Federico Santa María
Laboratorio de Modelación, MAT-288, Primer semestre de 2016.
Profesor: Pablo Aguirre
Andres.sandoval@alumnos.usm.cl, Patricio.orio@uv.cl

Introducción

Jansen y Rit [1] desarrollaron un modelo matemático para simular las actividades eléctricas de las neuronas registradas en los Electroencefalogramas (EEGs). En este modelo poblaciones de neuronas interactuan por inhibición y exitación, la cinética de estas interacciones determinan las oscilaciones de las señales resultantes. El modelo desarrollado consta de muchos parámetros y es difícil determinar la influencia de cada uno de estos manteniendo el realismo que es necesario para evitar la abstracción en el sentido matemático y que se pierda el verdadero sentido de lo que se intenta explicar. Hay muchos valores estimados en la literatura en los cuales estos parámetros se pueden mover, los cuales han sido estimados usando las hipótesis más simplificadas posibles manteniendo los puntos claves como prioridad.

Modelo de una población

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_0(t)}{\partial t^2} = AaS(C_2y_1(t) - C_4y_2(t)) - 2a\frac{\partial y_0(t)}{\partial t} \\ \quad -a^2y_0(t) \\ \frac{\partial^2 y_1(t)}{\partial t^2} = Aa(p/C_2 + S(C_1y_0)) - 2a\frac{\partial y_1(t)}{\partial t} \\ \quad -a^2y_1(t) \\ \frac{\partial^2 y_2(t)}{\partial t^2} = BbS(C_3y_0)) - 2b\frac{\partial y_2(t)}{\partial t} - b^2y_2(t) \end{cases}$$

1. C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes de conectividad, las cuales representan el numero promedio de contactos sinápticos entre las poblaciones.
2. A y B representan la amplitud máxima de los potenciales postsinápticos excitatorios e inhibitorios respectivamente
3. a y b son retrasos.
4. $S(v)$ es una función sigmoidal dada por

$$S(v) = \frac{2e_0}{1 + \exp^{(r(v-v0)}}$$

5. $C2y_1 - C4y_2$, según Jansen es la contribución de la masa neuronal a la se´al de el EEG. Los valores estándar son $A = 3.25$, $B = 22$, $C1 = 135$, $C2 = 0.8C1$, $C_3 = C_4 = 0.25C_1$, $e_0 = 2.5$, $v_0 = 6$, $r = 0.56$ y p entre 120 y 300. y_0, y_1 e y_2 son densidades de pulso para las piramidales, excitatorias e inhibitorias respectivamente

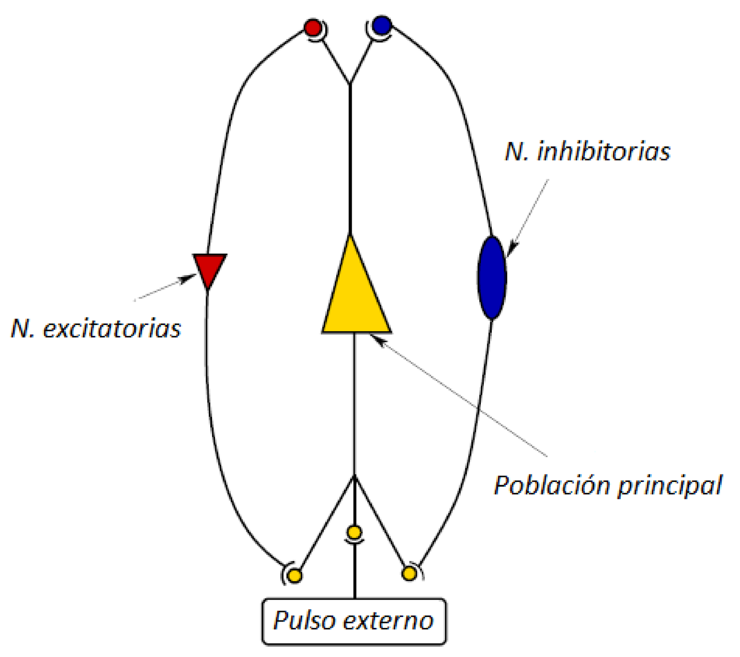

Figure 1: Modelo de Masa Nuronal

Objetivos

1. Comprender el modelo de Jansen y Rit de una población de neuronas.
2. Encontrar valores de parámetros donde existan cambios significativos en la frecuencia de los osciladores y que estos valores no estén lejos de los valores estimados en la literatura.
3. Encontrar formas de cálculo para los ángulos de fase de sistemas oscilantes
4. Caracterizar un problema de 2 poblaciones de neuronas, donde tenemos un contexto de *Amo y esclavo*,es decir, Hay un cierto tipo de sometimiento por parte de una población.

Resultados Matemáticos

Lema 1: Sea f una función periódica de variable real, esto es, $\exists T > 0 : f(t + T) = f(t)\ \forall t \in \mathcal{R}$ entonces esta es representable en series de Fourier de senos y cosenos, esto es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\omega_n x) + b_n sen(\omega_n x)$$

Con $\omega_n = \frac{n2\pi}{T}$, a_0, a_n y $b_n \in \mathcal{R}$. Cabe destacar el hecho de que $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
Definición 1: Dada una función $f \in L^1(\mathcal{R})$, se define la transformada de Fourier de f como la siguiente aplicación.

$$\Im\{f\} : \xi \to \hat{f}(\xi) = \int_{\mathcal{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$$

.
Lema 2: Sea f una función de variable real periódica de periódo T, entonces:

$$\arg\max_{\mathcal{R}^+} \hat{f}(\xi) = \omega = \frac{1}{T}$$

Mapas de Frecuencia

En la presente figura 2, se muestran las frecuencias calculadas usando transformada de Fourier de los ciclos originados al usar los valores de parámetros estándares, excepto para A y B, en donde estos varían de acuerdo a lo mostrado en la figura. La idea de esta parte del tabajo es encontrar zonas en que la frecuencia cambie (de manera creciente o de manera decreciente) para luego usar estos valores en el modelo de dos masas neuronales. Dejando para el amo (población dominante) estos valores de parámetros y ver la respuesta del esclavo (población sometida). Se puede apreciar en la figura 2 lo mencionado, por ejemplo, si nos fijamos en el valor $B = 24$ y recorremos A entre 2 y 5, obtenemos un cambio de frecuencia desde el valor $0Hz$ hasta aproximadamente el valor $6Hz$

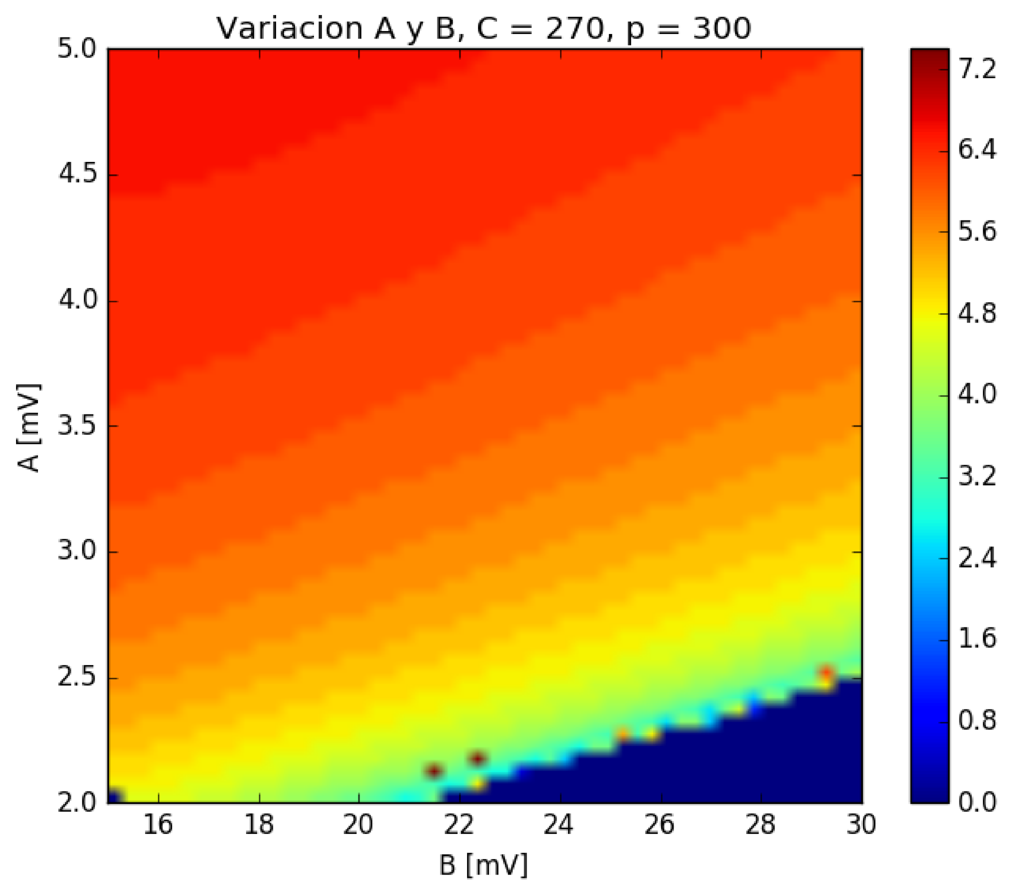

Figure 2: Mapa de Frecuencias

Sistemas Acoplados

Esta sección está inconclusa, hay diversos factores que dificultan este estudio. Primero cuando se tiene una onda totalmente sinusoidal, calcular la fase de la onda es totalmente sencillo. Cuando se tiene una función periódica, pero no sinusoidal, también resulta sencillo calcular la fase de la onda, por que usando el Lema 1 basta calcular la fase de la función sinusoidal del primer armónico. En la Figura 3 se aprecia este caso, para este gráfico se usaron los valores estándar para las dos poblaciones y se mantuvieron fijos los valores de los parámetros (no variaron en el tiempo). Se aprecia claramente que las ondas oscilan en fase, aquí la fase fue calculada usando el primer armónico.

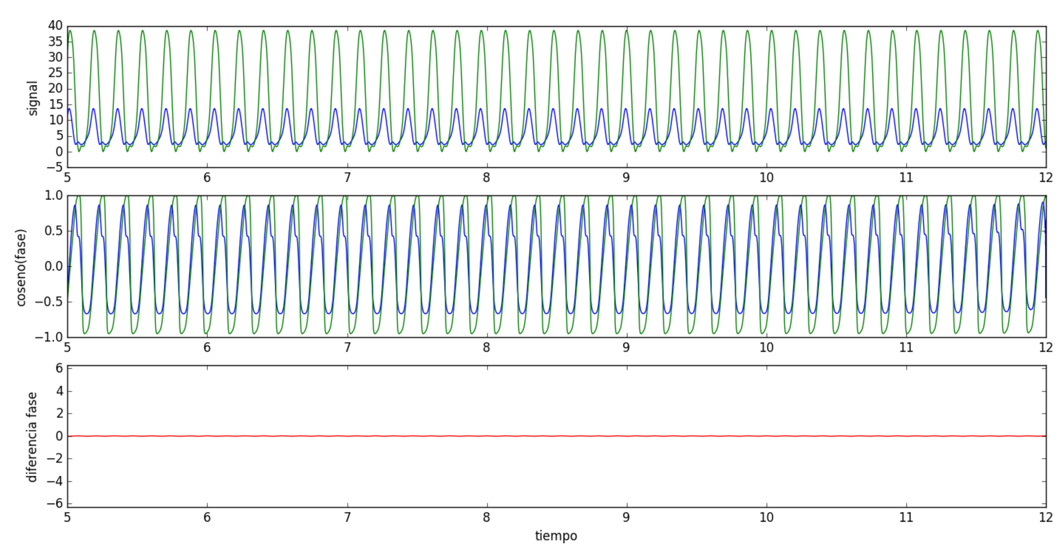

Figure 3: Sistemas acoplados en fase

La dificultad ahora se encuentra en la figura 4, se vario el parámetro A en el tiempo y en el rango $2 - 5$ para el amo, con todo lo demás fijo. Para el esclavo el valor de A se fijo en el valor estandar, 3.25. Se aprecia que al principio las señales estan totalmente desfasadas y poco a poco se comienzan a sincronizar, como se refleja en la diferencia (en valor absoluto) de la fase. Desarrollar un método para calcular la diferencia de fase de forma más exacta es el debe, pues para seales más raras (que las hay) no se entregan resultados correctos.

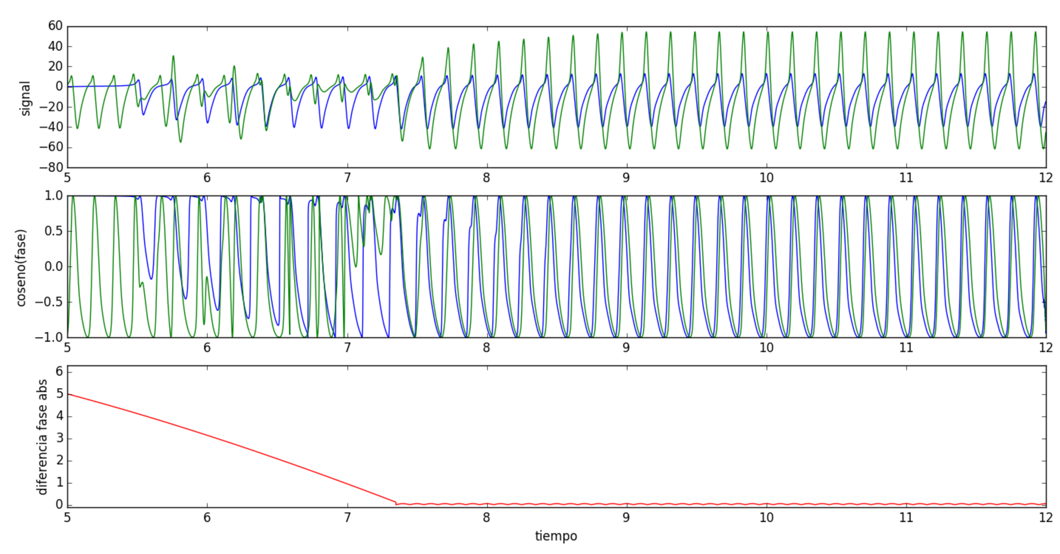

Figure 4: Sistema acoplado con diferencias de fase

Conclusiones y por realizar

- Se probaron una cantidad enorme de parámetros para encontrar zonas estables para la formación de seales periodicas.
- Para el pleno entendimiento de este problema, se debe analizar el problema de forma teórica.
- Se deben crear algoritmos para calcular fase de seales que varian su frecuencia en el tiempo (de periodo constante a tramos).

Referencias

1 Electroencephalogram and visual evoked potential generation in a mathematical model of coupled cortical columns, Jansen and Rit.
2 Activity types in a neural mass model, Jurgen Hebbink