Introducción a la Modelación Matemática

Pablo Aguirre

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

MAT282 Laboratorio de Modelación I - 2019

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

EX UMBRA IN SOLEM
UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

¿Qué es un modelo matemático?

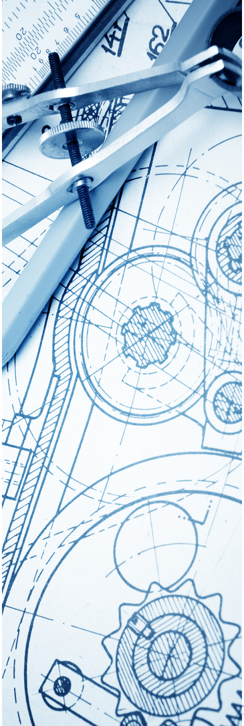
Representación en términos matemáticos de un sistema o fenómeno real.

Ventajas:

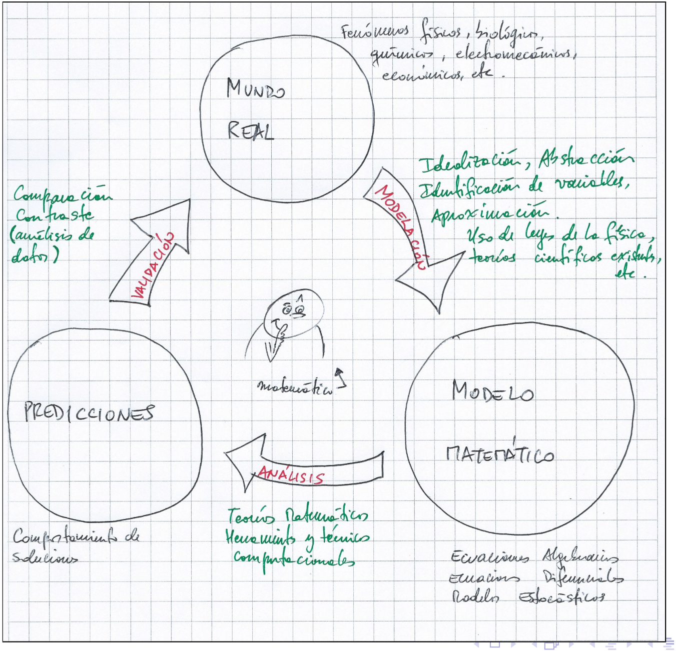
- Ayuda a desarrollar las ciencias e ingeniería.
- Pone a prueba el efecto de cambios en un sistema.
- Ayuda a tomar decisiones.

Clasificación:

- Determinísticos vs Estocásticos.
- Empíricos / Fenomenológicos vs Mecanísticos.
- Tiempo continuo vs Tiempo discreto.



Ciclo de la modelación matemática



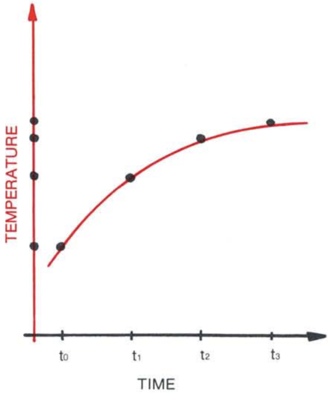
Etapas de la modelación matemática

1. Observación del fenómeno.
2. Formulación del modelo matemático.
3. Análisis del modelo.
4. Interpretación de soluciones: Comportamiento, predicciones.
5. Validación del modelo: Contraste o comparación con la realidad. Ajustes.

1. Observación del fenómeno

1. Observar un sistema u organismo (físico, biológico, social, etc) en diferentes estados.
2. Los estados no se pueden describir/explicar tan solo con unas pocas variables o parámetros.
3. Pero pretendemos que sí se puede, pues resulta útil !!!
4. Idealización: Nos lleva a definir un espacio de estados del modelo (abstracción!). El conjunto de todos los posibles estados del sistema.
5. Diferentes modelos pueden tener distintos espacios de estado.

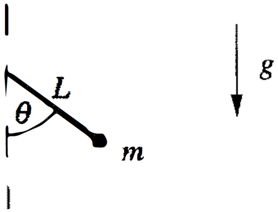
Evolución de la temperatura en el tiempo



Si observamos la Temperatura por un tiempo, probablemente cambiará.
Podemos etiquetar los diferentes valores según el instante de observación.
Decimos que el espacio de estados (y el modelo) es unidimensional.
Los datos forman una *serie temporal* de observaciones.

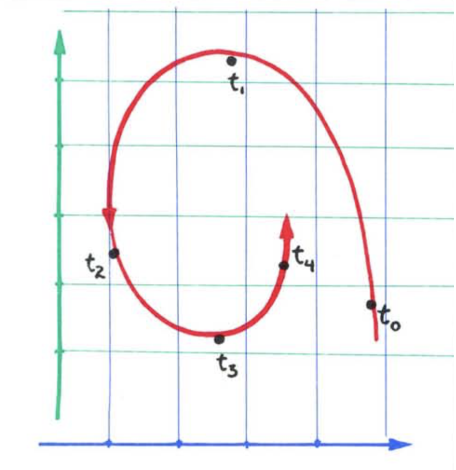
¿Y si una sola variable observada NO es suficiente para describir el fenómeno de interés?
Es decir, un modelo unidimensional no logra capturar todas las propiedades deseadas...

Datos experimentales



Oscilaciones de un péndulo de largo L y masa m.
Dos variables observadas que cambian en el tiempo:
Desplazamiento angular (θ) vs Velocidad angular (ω).

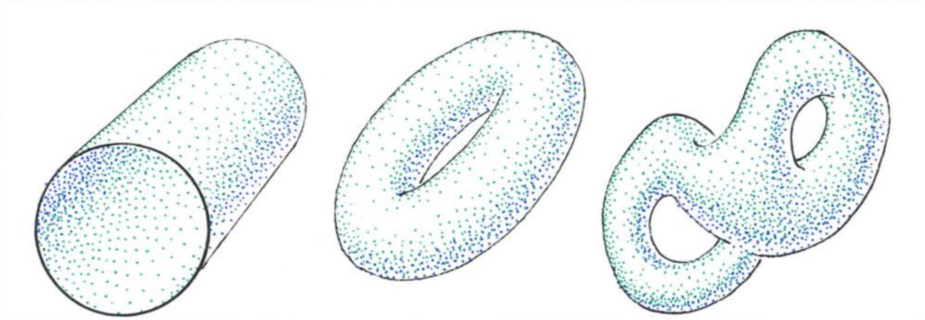
Trayectorias en espacio de estados bidimensional



Si las dos variables se observan en tiempos sucesivos y se colocan en el espacio de estados, obtenemos una trayectoria del modelo.

Ej: Desplazamiento angular y velocidad angular del péndulo.

Espacios de estados "exóticos"

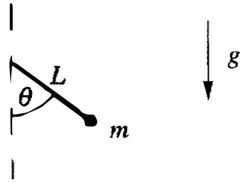


Muchos fenómenos requieren espacios de estado más "complicados", llamados **variedades** (manifolds).
Uno puede pensar en estas variedades como pedazos de espacios "planos" cortados, doblados, torcidos, y pegados nuevamente.

Etapas de la modelación matemática

1. Observación del fenómeno.
2. **Formulación del modelo matemático:**
Realizar supuestos, definir variables, elaborar diagramas de flujo, escoger ecuaciones (literatura, analogías de la física, exploración de datos, etc).
3. Análisis del modelo.
4. Interpretación de soluciones: Comportamiento, predicciones.
5. Validación del modelo: Contraste o comparación con la realidad. Ajustes.

Oscilaciones de un péndulo de largo L y masa m.



- **2da Ley de Newton:** $\boxed{F = ma}$
  Fuerzas involucradas: Gravedad, Tensión.
  Variables: t Tiempo; θ Ángulo.
  Idealización: No hay roce con el aire. Varilla rígida (sin masa). Todo la masa está concentrada en el extremo.
- **Abstracción matemática:**
  Sea $\theta(t)$: Amplitud angular en el instante t.
  $\frac{d\theta}{dt}$: Velocidad angular. $\frac{d^2\theta}{dt^2}$: Aceleración.
- **Modelo:**

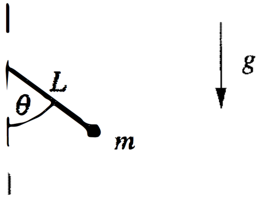
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0.$$

Incógnita: $\theta = \theta(t)$.

Etapas de la modelación matemática

1. Observación del fenómeno.
2. Formulación del modelo matemático.
3. **Análisis del modelo.**
Herramientas analíticas, computacionales, estadísticas, aproximaciones, simulaciones, adimensionalización, comportamiento asintótico, estabilidad, etc.
4. Interpretación de soluciones: Comportamiento, predicciones.
5. Validación del modelo: Contraste o comparación con la realidad. Ajustes.

Análisis matemático



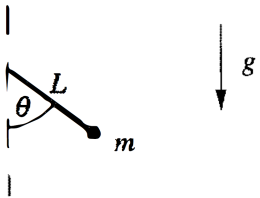
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0.$$

- Introducimos
  Frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$,
  Nueva escala temporal $\tau = \omega t$.
- La ecuación se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin(\theta) = 0.$$

Incógnita: $\theta = \theta(\tau)$.

Análisis matemático (cont.)



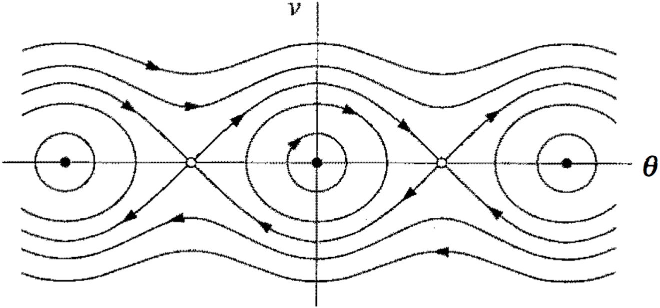
$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin(\theta) = 0.$$

- Introducimos
  Velocidad angular $v = \frac{d\theta}{d\tau}$.
- El modelo se transforma en un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} & = & v, \\ \frac{dv}{d\tau} & = & -\sin(\theta). \end{cases}$$

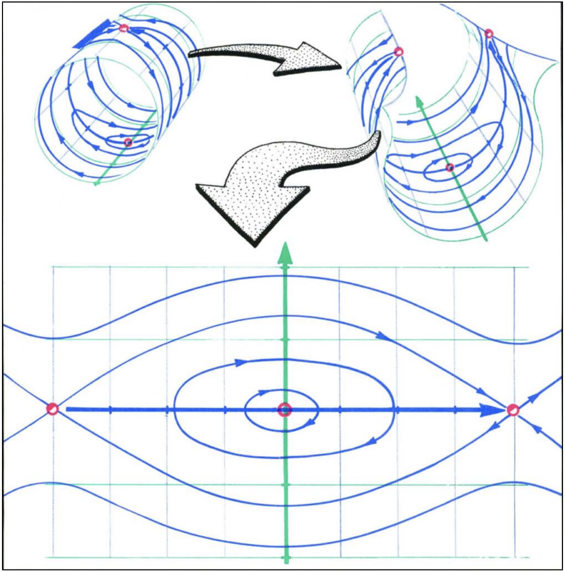
Incógnitas: $\theta = \theta(\tau), v = v(\tau)$.

Análisis del comportamiento de las soluciones



- **Representación de soluciones:**
  Retrato de fase,
  trayectorias en el plano (θ, v).

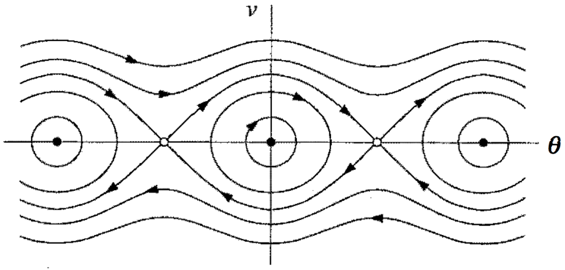
Espacio de estados es un cilindro!!!!



Etapas de la modelación matemática

1. Observación del fenómeno.
2. Formulación del modelo matemático.
3. Análisis del modelo.
4. **Interpretación de soluciones: Comportamiento, predicciones.**
5. Validación del modelo: Contraste o comparación con la realidad. Ajustes.

Interpretación física



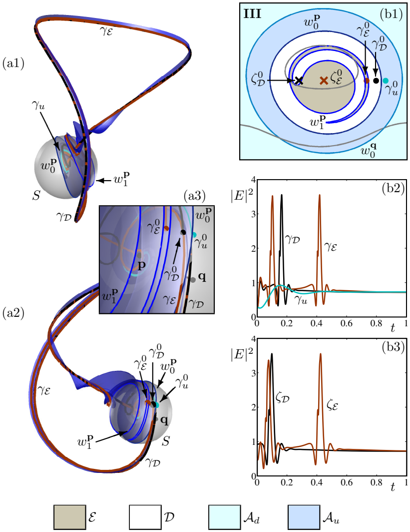
- **Punto central:** $(\theta, v) = (0,0)$ Estado de equilibrio, péndulo en reposo colgando hacia abajo.
- **Órbitas cerradas alrededor del centro:** Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio. Movimientos periódicos de pequeña amplitud.
- **Puntos blancos:** $(\theta, v) = (\pm\pi, 0)$. Péndulo invertido.
- **Conexiones entre $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$:** Péndulo realiza una vuelta completa desde y hacia la posición invertida.
- **Órbitas exteriores:** Oscilaciones de gran amplitud por sobre la posición invertida.

Etapas de la modelación matemática

1. Observación del fenómeno.
2. Formulación del modelo matemático.
3. Análisis del modelo.
4. Interpretación de soluciones: Comportamiento, predicciones.
5. **Validación del modelo: Contraste o comparación con la realidad. Ajustes.**

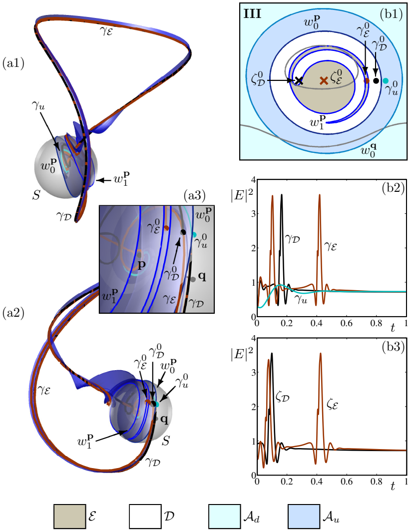
¿Los resultados predichos por el modelo están acorde con (o contradicen) los datos observados en la realidad?
¿Cuál es el efecto de los factores que hemos ignorado? ¿Y si consideramos roce con el aire? ¿Si la masa de la varilla no es despreciable y no se distribuye uniformemente? ¿Qué tan realistas son los valores de parámetros que utilizamos? ¿Qué tan sensibles son las soluciones con respecto a variaciones en los valores de los parámetros? ¿Son despreciables las perturbaciones debido a causas aleatorias o errores de medición? ¿Son suficientes las variables analizadas para describir el fenómeno?

Métodos de la modelación matemática



- Análisis dimensional.
- Abstracción.
- Escala.
- Principios de conservación o balance.
- Simplificación: linealización, reducción de dimensión, cambios de coordenadas.

Resumen



- ¿Por qué? ¿Qué es lo que estamos buscando? Identificar la necesidad del modelo.
- ¿Qué? ¿Qué es lo que queremos saber?
- ¿Qué es lo que sabemos? Identificar los datos relevantes disponibles.
- Asumir? ¿Qué podemos asumir? Identificar las circunstancias que aplican.
- ¿Cómo? ¿Cómo deberíamos enfocar el modelo? Identificar los principios físicos/biológicos/etc que gobiernan al fenómeno.
- Predecir? ¿Qué va a predecir nuestro modelo? Identificar las ecuaciones que se van a usar, los cálculos que se van a hacer, y las respuestas que van a resultar.
- Válido? ¿Son las predicciones válidas? Identificar qué tests se pueden hacer para validar que los resultados sean consistentes con los principios y supuestos.
- Verificado? ¿Son buenas las predicciones? Identificar qué tests se pueden hacer para verificar que el modelo es útil en términos de las razones iniciales para crearlo.
- Mejoras? Identificar valores de parámetro que no son conocidos con tanta precisión, variables que deberían ser incluidas y/o supuestos/restricciones que pueden descartarse.
- Uso? ¿Qué vamos a hacer con el modelo?

En conclusión...

El estudio de modelos matemáticos nos ayuda a entender, predecir y controlar sistemas que evolucionan en el tiempo, y a crear soluciones originales e innovadoras para problemas del mundo real a través del diseño, modelación y análisis matemático.

Misión: **Resolver problemas** transformando ideas abstractas en aplicaciones reales.

Imágenes tomadas de:
[**Abraham & Shaw,** *Dynamics: The Geometry of Behavior*, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1992.]
[**Strogatz,** *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd edition, CRC Press, 2014.]

Nuestro curso: Laboratorio de Modelación I MAT–282

Web oficial:
`http://paguirre.mat.utfsm.cl/mat282-2019-2.html`

- Introducción al mundo de la Modelación Matemática a través de problemas provenientes del mundo real.
- Énfasis en la deducción y construcción de modelos simples, demostración de propiedades, resolución analítica y numérica, y comunicación de resultados.
- Pre-requisitos: Cálculo diferencial e integral en varias variables, nociones de ecuaciones diferenciales, probabilidad y estadística, métodos numéricos, lenguajes y algoritmos de programación, inglés.

Hashtags RRSS: #icmatusm #mathmodelling #appliedmaths #wearenotpure

Bibliografía recomendada

Textos sobre modelación
- R. Aris, *Mathematical Modelling Techniques*, Dover, 1994.
- E. A. Bender, *An Introduction to Mathematical Modeling,* Wiley, 1978.
- D. Edwards & Mike Hamson, *Guide to Mathematical Modelling*, Palgrave, 2001.
- R. H. Enns, *It's a Nonlinear World*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, 2011.
- P. Gajardo, *Modelando Fenómenos de Evolución*, JC. Saez Editor, 2011.
- J. T. Sandefur, *Elementary Mathematical Modeling: A Dynamic Approach,* Brooks Cole, 2002.

Textos sobre comunicación de resultados científicos
- M. Alley, *The Craft of Scientific Presentations*, Springer, 2013.
- N. J. Higham, *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences*, SIAM, 1998.

Evaluación

Informe (50% nota): Miércoles 14 Octubre.
Presentación Final (50% nota): 16-18 Diciembre.