Reducción de Dimensión mediante Polynomial Chaos y PCA para Obtener Imágenes de Canales

Sebastián J. Villarroel V. - Laboratorio de Modelación 1

Univesidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Resumen

Este trabajo abarca de manera detallada y con aplicaciones métodos que son utilizados para la obtención de imágenes a partir de una base de datos dada, con el objetivo de lograr una versión simplificada de la base de datos en función de los componentes más representativos.
Primero se introduce la definición y aplicación del método **Polynomial Chaos** para la obtención de imágenes (80x80 pixeles) de canales que vienen establecidas por una base de datos de gran extensión (arreglo de 6400x1000), donde la construcción de coeficientes fue lo esencial para desarrollar el método que consiste en la "Expansión de Caos" mediante combinaciones entre estos coeficientes y polinomios de Hermite o Kravchuk, con el fin de explicar la estructura de una imagen con la menor cantidad de coeficientes posibles (con polinomios de Kravchuk se necesitaron menos coeficientes comparados con polinomios de Hermite).
De la misma forma el proceso se llevó a cabo con el método de **PCA** (Principal Component Analysis), el cual tiene un enfoque principalmente estadístico, ya que en la obtención de imágenes, la implementación necesitó de la media y la desviación estándar entre otros recursos de la estadística. Donde el principal objetivo es obtener un arreglo que contiene las componentes principales (conjunto de valores de variables linealmente no correlacionadas), los cuales generan las imágenes de interés (80x80 pixeles).
A partir de los resultados que se observaron al implementar los métodos, se verificó que en Polynomial Chaos (en polinomios de Hermite o Kravchuk), son necesarios pocos coeficientes (5 y 4 coeficientes representativos respectivamente) para representar la base de datos y obtener imágenes. Mientras que para PCA, se lograron buenos resultados mediante la implementación, obteniéndose imágenes de los canales.
La importancia de estos resultados redica en que la reducción de la dimensión de la base de datos permitiría resolver problemas como por ejemplo el reconocimiento facial o detección de defectos de fabricación en procesos industriales, etc.

Introducción

Polynomial Chaos Expansion: Este método tiene su base en la elección de un conjunto de una variable aleatoria distribuida normal estándar ξ, que pertenecen al espacio de probabilidad $\{\Omega, F, P\}$, para poder obtener una representación del proceso:

$$X(t,\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p(t)\Psi_p(\xi) \tag{1}$$

donde $X(t,\theta)$ es un proceso estocástico (base de datos de imágenes), Ψ_p es un polinomio de grado p y x_p son los coeficientes que se deben obtener mediante el siguiente procedimiento:

1. Los coeficientes se obtienen de la siguiente forma:

$$x_p = \frac{\langle X, \Psi_p(\xi)\rangle}{\langle \Psi_p^2(\xi)\rangle} = \frac{1}{\langle \Psi_p^2(\xi)\rangle}\int_\Omega X \cdot \Psi_p(\xi) dF_\xi \tag{2}$$

El problema que se presenta es que en el integrando las componentes no pertenecen al mismo espacio de probabilidad. Para resolver eso se utilizan las funciones inversas de las CDF de $X = C^{-1}(\theta)$ y $\xi = E^{-1}(\theta)$, donde $\theta \sim U(0,1)$, quedando una nueva expresión para los coeficientes:

$$x_p = \frac{1}{\langle \Psi_p^2(\xi)\rangle}\int_0^1 C^{-1}(\theta)\cdot\Psi_p(E^{-1}(\theta))d\theta \tag{3}$$

con:

$$\frac{1}{\langle \Psi_p^2(\xi)\rangle} = \frac{1}{p!} \tag{4}$$

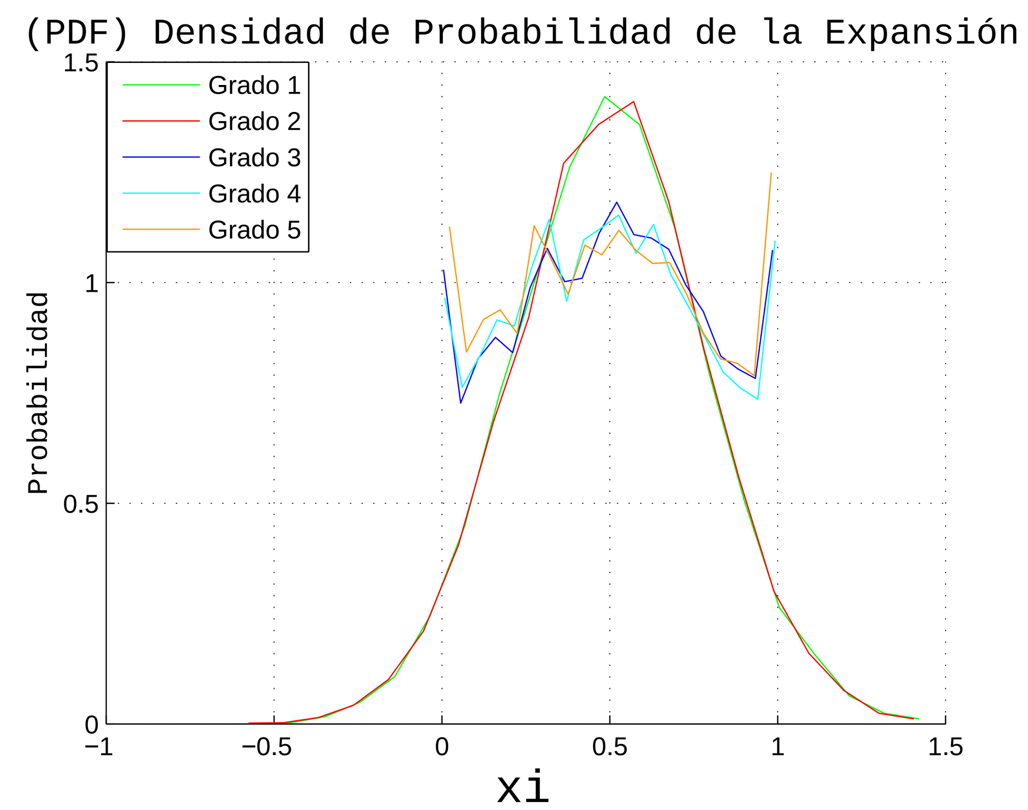
2. Ahora es posible resolver la integral mediante cuadratura gaussiana, la cual por su característica de tener un soporte compacto se utilizó la cuadratura de Gauss-Legendre con sus respectivos pesos (w_i) y nodos (z_i). Obteniendo finalmente para cada coeficiente la expresión:

$$x_p = \frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{N} w_i\left[C^{-1}\left(\frac{z_i+1}{2}\right)\Psi_p\left(E^{-1}\left(\frac{z_i+1}{2}\right)\right)\right] \tag{5}$$

3. **Ejemplo:** Suponer que $X \sim U(0,1)$, y utilizando los polinomios de Hermite con valores de $N = 10$ pesos, para una expansión de grado 7 se obtienen los siguientes coeficientes:

$$x_0 = 0{,}3522;\ x_1 = 0{,}3718;\ x_2 = 0{,}0660;\ x_3 = -0{,}0610$$
$$x_4 = -0{,}0224;\ x_5 = 0{,}0048;\ x_6 = 0{,}0025;\ x_7 = -0{,}0005$$

4. Ahora, para corroborar que existe convergecia en distribución de la expansión a continuación se muestra la PDF para expansiones desde el grado $n = 1$ hasta el grado $n = 5$:



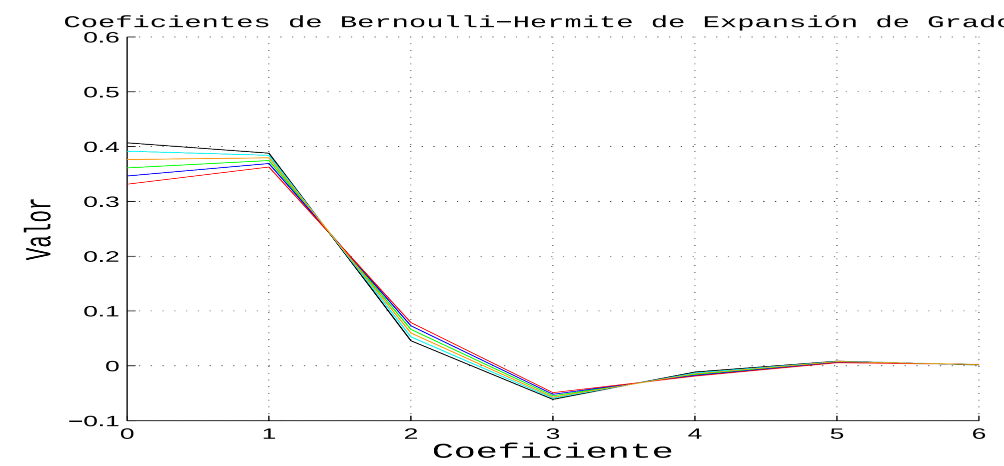
A continuación se enuncian los **Polinomios de Kravchuk** que según la literatura [1] mejoran la tasa de convergencia del sistema (con $X \sim Ber(p)$), y desarrollando el mismo proceso anterior para los coeficientes, se necesitan menos respecto a los polinomios de Hermite.

Resultados

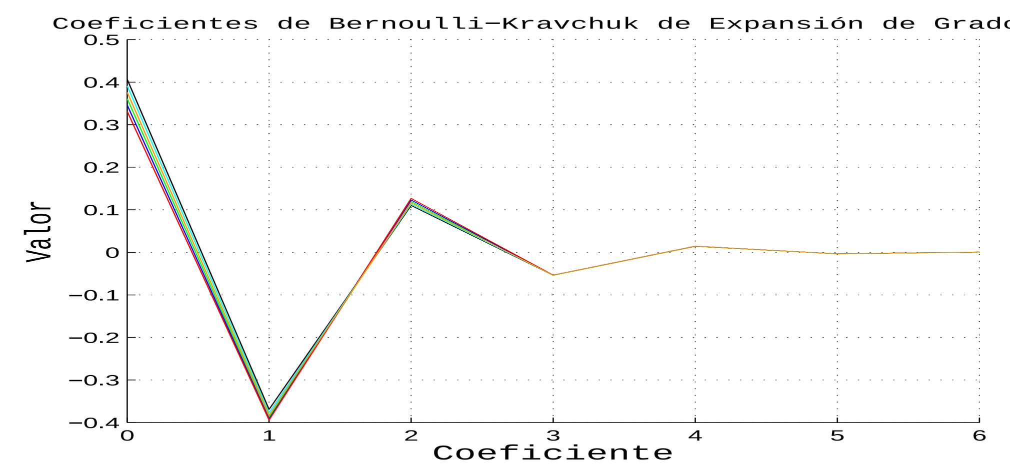
Se utiliza la base de datos de canales (dimensión 6400x1000), de la cual se obtienen las imágenes (80x80 pixeles):

Imagen Real 1 | Imagen Real 3 | Imagen Real 5

Utilizando el método descrito anteriormente se calcularon los coeficientes para todos los pixeles, donde cada pixel $\sim Ber(p)$. En el siguiente gráfico se muestran los valores de los coeficientes de 7 pixeles utilizando polinomios de Hermite:

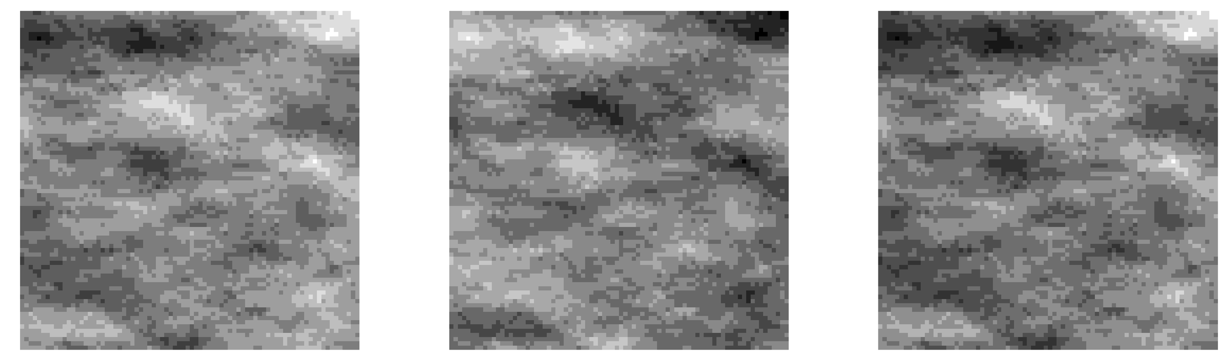


Ahora el mismo ejercicio, pero utilizando polinomios de Kravchuk se obtiene:



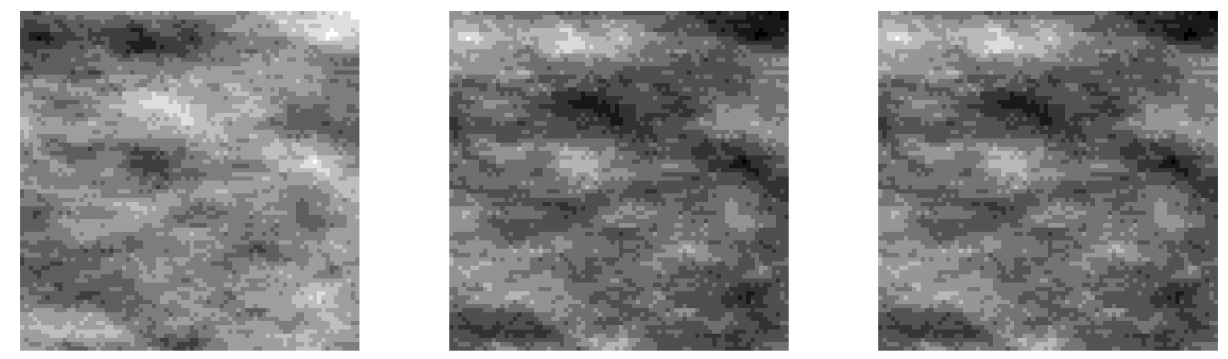
Si se utilizan los coeficientes x_p con $p \in \{0,2,4\}$ para generar imágenes implementando los diferentes polinomios. Se obtienen los siguietes resultados:

Hermite:



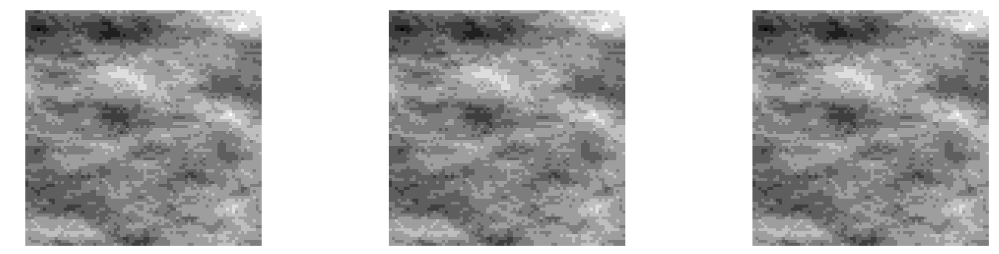
Coef. x_0 | Coef. x_2 | Coef. x_4

Kravchuk:



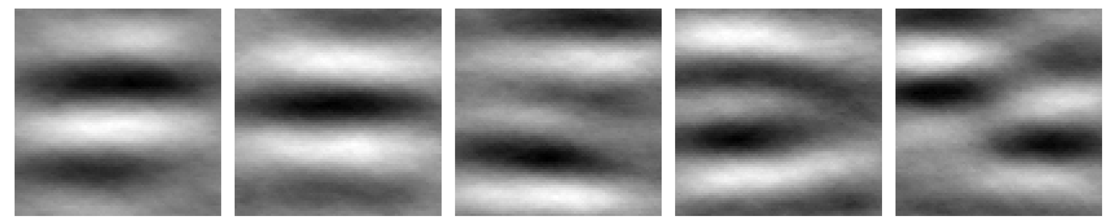
Coef. x_0 | Coef. x_2 | Coef. x_4

Observación La imagen de los x_0, obtenida con polinomios de Hermite o de Kravchuk, corresponde al promedio de las imágenes:



Promedio Imág. | Hermite x_0 | Kravchuk x_0

PCA: El método **"Principal Component Analysis"** es un procedimiento estadístico que utiliza una transformación ortogonal para convertir un conjunto de observaciones de variables correlacionadas en un conjunto de valores de variables linealmente no correlacionadas llamadas componentes principales (el número de componentes principales es menor o igual que el número de variables originales). Esta transformación se define de tal manera que el primer componente principal tiene la varianza más grande posible (representa la mayor parte de la variabilidad en los datos como sea posible), y cada nuevo componente tiene la varianza más alta posible bajo la restricción que sea ortogonal a los componentes precedentes [4].
Al implementar PCA en la base de datos entregada, se obtienen los siguientes resultados para los cinco primeros componentes principales:



1° Comp. | 2° Comp. | 3° Comp. | 4° Comp. | 5° Comp.

Conclusiones

- En base a la investigación y resultados obtenidos al implementar los diferentes métodos, se puede concluir que sí se cumplieron los objetivos, ya que se logró efectivamente reducir la base de datos en función de las componentes más representativas (Polynomial Chaos) y obtener las componentes principales correctamente (PCA) para generar las imágenes de canales.
- Se logró verificar que bajo el supuesto de pixeles $\sim Ber(p)$, los polinomios de Kravchuk mejoran la tasa de convergencia del método.
- Como trabajo futuro, se podría implementar el método de Polynomial Chaos para diferentes distribuciones de variables aleatorias ξ y diferentes familias de polinomios ortogonales (Laguerre, Jacobi, Legendre, etc.) y observar los resultados incluso para una base de datos diferente (por ejemplo caras).

Referencias

- [1] Xiu, Dongbin, and George Em Karniadakis, (2002). The Wiener–Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. SIAM.
- [2] Bedratyuk, Leonid., (2012). Derivations and identities for Kravchuk polynomials
- [3] Sakamoto, Shigehiro, and Roger Ghanem., (2002). Polynomial chaos decomposition for the simulation of non-Gaussian nonstationary stochastic processes.
- [4] Smith, Lindsay I., (2002). A tutorial on principal components analysis., Cornell University.