Dependencia de un parámetro regulador de la depredación en un modelo tritrófico

Autor: Patricio Toledo patricio.toledo.14@sansano.usm.cl
Profesional externo:Viviana Rivera Profesor:Pablo Aguirre
Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemáticas

Motivación

- Estudiar la dependencia de un parámetro en la dinámica de un sistema tritrófico.Cuyo parámetro regula la depredación de una especie sobre la otra.

Definciones

- Consideremos un sistema dinámico de la forma $\dot{x} = f(x, \alpha)$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^n$ un vector de parámetros. La aparición de un retrato de fase topologicamente no equivalente al variar α, se denomina Bifurcación.El valor $\alpha = \alpha^*$ en el cuál el sistema sufre una bifurcación se denomina punto de bifurcación.
- Respuesta funcional:Se define la respuesta funcional como la tasa temporal a la que un individuo depredador mata a sus presas. Es decir, el número promedio de presas muertas por cada depredador individual por unidad de tiempo.
Existen diversos tipos de respuestas funcionales, en particular para el sistema a trabajar se analizará una respuesta funcional tipo Holling II, cuya forma es

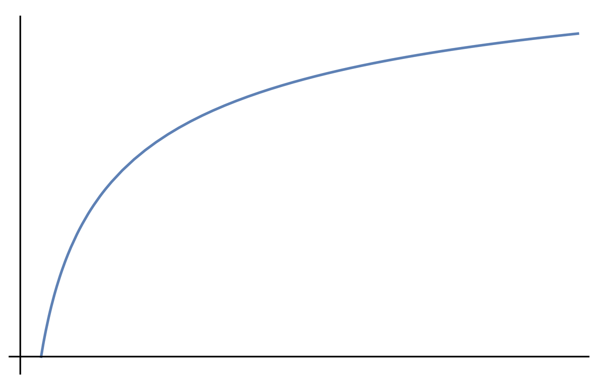


Fig. 1: Gráfico cualitativo de la respuesta funcional

$$h(x) = \frac{qx^\alpha}{x^\alpha + \alpha}$$

.

El modelo[1]

- Se estudiará un modelo tritrófico , con respuesta funcional no diferenciable tipo Holling II, donde las tres especies en conflicto presentan un crecimiento del tipo logístico. De esta manera el sistema esta representado por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx(1 - \frac{x}{K}) - (\frac{qx^\alpha}{x^\alpha + a})y - d_1xz \\ \dot{y} &= sy(1 - \frac{y}{nx}) - d_2yz \\ \dot{z} &= hz(1 - \frac{z}{c_1x + c_2y}) \end{cases}$$

donde $x(t), y(t), z(t)$ representan la densidad de las poblaciones, y $(x, y, z) \in \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y \leq 0, z \leq 0\}$,y $(r, k, q, a, d_1, s, n, d_2, h, c1, c2, , \alpha) \in \mathbb{R}^{11} \times]0, 1[$ son parámetros.
- Para poder estudiar de mejor manera el sistema, se lleva mediate un cambio de variable a:

$$\begin{cases} \dot{u} &= u(C_1u + C_2v)(u(1 - u)(u^\alpha + A) - Q(u^\alpha v - D_1u(u^\alpha + A)w) \\ \dot{v} &= S(u - v)(u^\alpha + A)(C_1u + C_2v)v - D_2uvw(u^\alpha + A)(C_1u + C_2v) \\ \dot{w} &= Huw(C_1u + C_2v - w)(u^\alpha + A) \end{cases}$$

donde $(u, v, w) \in \Omega = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u \leq 0, v \leq 0, w \leq 0\}$, y $(A, Q, S, H, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha) \in \mathbb{R}^8 \times]0, 1[$

Resultados Previos [2]

- Se pretende analizar, el comportamiento del sistema, variando el parámetro α, para ello, se utilizarán los equilibrios, que se obtuvieron, haciendo un diagrama de bifurcación en el espacio de parámetros (Q, S), fijando los valores de los otros parámetros en : $\alpha = 0.2, C_1 = 0.8, C_2 = 0.2, D_1 = 0.2, D_2 = 0.3, A = 1.5, H = 0.7$

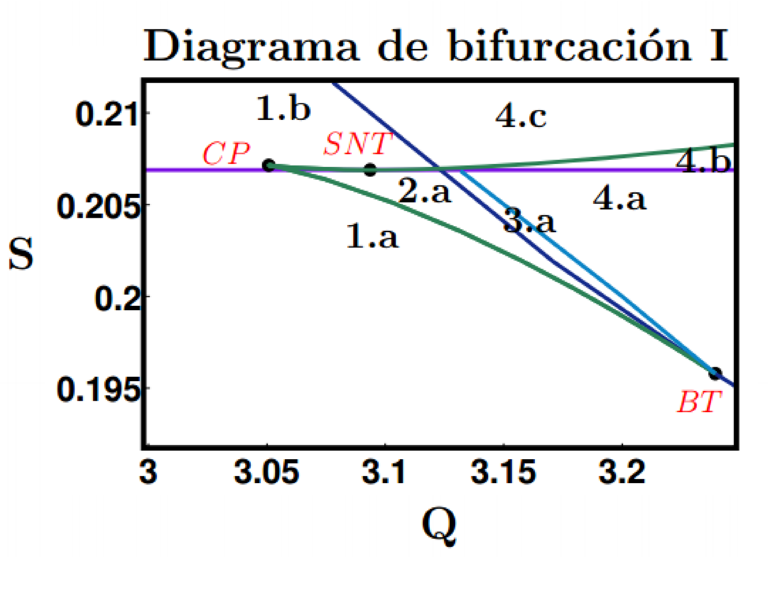
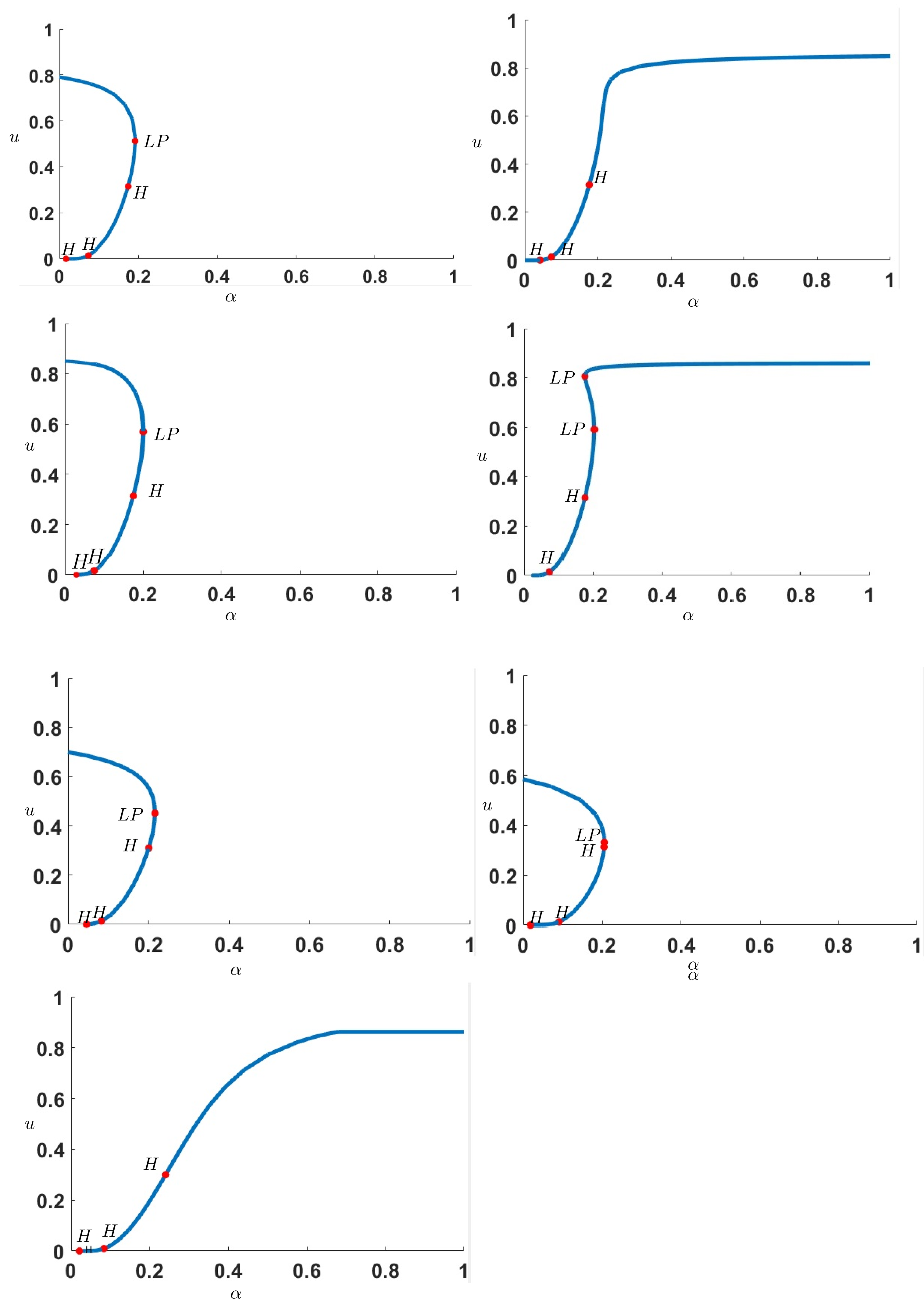


Fig. 2: Diagrama de bifurcación

Desarrollo

- Resultados computacionales
Con ayuda del Software Matcont, (una librería de Matlab) se realizaron diagramas para continuar los equilibrios obtenidos en cada una de las regiones anteriores, es decir $1.a, 1.b, 2.a, 2.b, 3.a, 3.b$



Observaciones

- Los digramas representan de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo las continuaciones del parámetro α vs u de las regiones $1a, 1b, 2a, 3a, 4a, 4b$.
- Los diagramas de las regiones $2c, 4c$, no se realizaron, pues son topológicamente equivalentes a las regiones $1b, 4b$ respectivamente.
- Los puntos H, LP denotan una bifurcación Hopf, y Silla-Nodo respectivamente.

Conclusiones

- Se puede apreciar que la dinámica del sistema es estable, pues no presenta caos.
- Se puede notar que para diferentes valores de α aparecen bifurcaciones silla-nodo, y Hopf.

Referencias

- [1]Viviana Rivera,Tesis para optar al grado de magíster (2016) pp 55,56
- [2]Viviana Rivera,Tesis para optar al grado de magíster (2016) pp 71