

# MODELO DISCRETO DE PREDADOR-PRESA CON EFECTO ALLEE



JOSÉ CARLOS FUENTEALBA SUNQUILLA JOSE.FUENTEALBA.14@SANSANO.USM.CL  
 PABLO AGUIRRE LABORATORIO DE MODELACIÓN I  
 INGENIERÍA CIVIL MATEMÁTICA UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

## RESUMEN

En este póster estudiaremos un modelo a tiempo discreto depredador-presa con Efecto Allee. Específicamente a partir de un par de resultados seremos capaces de dividir el espacio de parámetros identificando distintas regiones en las cuales las soluciones del modelo tienen una dinámica diferente. También veremos algunas formas en que un punto fijo estable se vuelve inestable. Se mostrarán simulaciones numéricas de las soluciones hechas en **MATCONTM**, en conjunto con los diagramas de bifurcación para diferentes valores de parámetros.

## INTRODUCCIÓN

El **Efecto Allee** es un fenómeno biológico que describe la relación entre la densidad de población y la tasa de crecimiento de esta. Concretamente se expresa como la dificultad del crecimiento de la población a bajas densidades de ella, ya sea por la imposibilidad de encontrar pareja, de agruparse ante el ataque de un depredador, etc. Un sistema discreto depredador-presa con Efecto Allee describe la relación entre las densidades de la población de cada especie mientras que una de ellas está sometida al Efecto Allee. El objetivo es entender como se expresa el Efecto Allee en la dinámica del sistema, simular soluciones para diferentes valores de parámetros y obtener resultados concretos que caractericen la estabilidad de los puntos fijos.

## CONCEPTOS PREVIOS

- 1) Dado un sistema discreto bidimensional  $x_{n+1} = f(x_n)$ , se dice que  $x^*$  es un **punto fijo** del sistema si  $x^* = f(x^*)$ .
- 2) Sean  $\lambda_k$  valores propios de  $Df(x^*)$ , si  $|\lambda_k| < 1 \forall k$  entonces  $x^*$  es **localmente asintóticamente estable**. Si  $|\lambda_k| > 1$  para algún  $k$ , entonces será **inestable**.
- 3) Entenderemos por **bifurcación** al cambio de estabilidad de un punto fijo, pudiendo distinguir diferentes tipos de bifurcaciones como:
  - a) **Neimark-Sacker**:  $\lambda_k = e^{\pm i\theta}$ ,  $0 < \theta < \pi$ .
  - b) **Flip**:  $\lambda_k = -1$  para algún  $k$ .

## CONCLUSIONES

Es posible caracterizar la estabilidad de los puntos fijos del sistema. Para el punto fijo  $(N^*, P^*)$  se pudo encontrar una división del espacio de parámetros con la cual identificar las diferentes dinámicas del sistema. Del análisis de las simulaciones concluimos que la superficie azul y roja corresponden al conjunto de parámetros para los cuales  $(N^*, P^*)$  sufre una bif. Flip y Neimark-Sacker respectivamente. Como trabajo posterior sería interesante obtener más información de las regiones de inestabilidad del sistema para por ejemplo hallar indicios de una dinámica caótica o estudiar que ocurre con las poblaciones cuando las iteraciones tienden a infinito, es decir analizar si las poblaciones tienden a la extinción o al sobrepoblamiento y como se relaciona esto con la estabilidad de los puntos fijos.

## REFERENCIAS

- 1) *Allee effect in a discrete-time predator-prey system*, Canan Celik, Oktay Duman.
- 2) *Animal aggregations, a study in general sociology*, W.C. Allee, University of Chicago.
- 3) *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney.

## MODELO

El siguiente es un modelo discreto depredador-presa con Efecto Allee

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t + rN_t(1 - N_t) \frac{N_t}{u + N_t} - aN_tP_t \\ P_{t+1} = P_t + aP_t(N_t - P_t) \end{cases}$$

donde  $\frac{N_t}{u + N_t}$  se llama función de Allee y  $a, r, u > 0$  son parámetros del sistema.  $a$  representa la tasa de crecimiento del depredador,  $r$  la tasa de crecimiento de la presa y  $u$  se llama parámetro de Allee. Los puntos fijos del sistema son  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(N^*, P^*)$ , donde  $N^* = P^* = \frac{r - ua}{a + r}$ .

## ESTABILIDAD

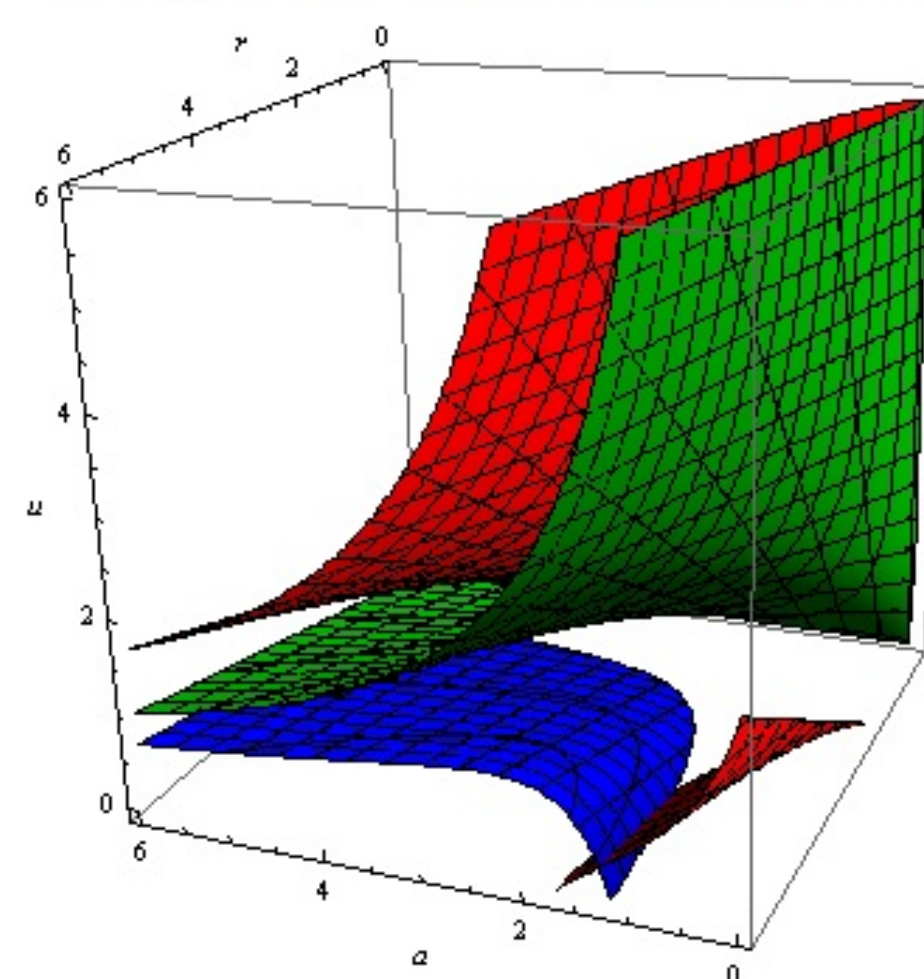
- 1) El  $(0, 0)$  es un punto fijo no hiperbólico inestable.
- 2) Sean  $\lambda_1 = 1 + a$  y  $\lambda_2 = \frac{1 + u - r}{1 + u}$  los valores propios de  $Df(1, 0)$ . Notamos que:
 
$$|\lambda_1| > 1 \quad (1)$$

$$|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow 2 + 2u - r > 0, \quad (2)$$
 por lo tanto el  $(1, 0)$  es inestable. Más aún  $\lambda_2 \neq 1$ , por ende si  $2 + 2u - r = 0$ , entonces  $|\lambda_2| = 1$  y  $\lambda_2 = -1$ . En consecuencia la única bifurcación que puede sufrir el  $(1, 0)$  es de tipo Flip.
- 3) Suponiendo que  $0 < u < \frac{r}{a}$ .  $(N^*, P^*)$  es localmente asintóticamente estable si

$$2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2} < a \left( \frac{r-ua}{a+r} \right) < 1. \quad (3)$$

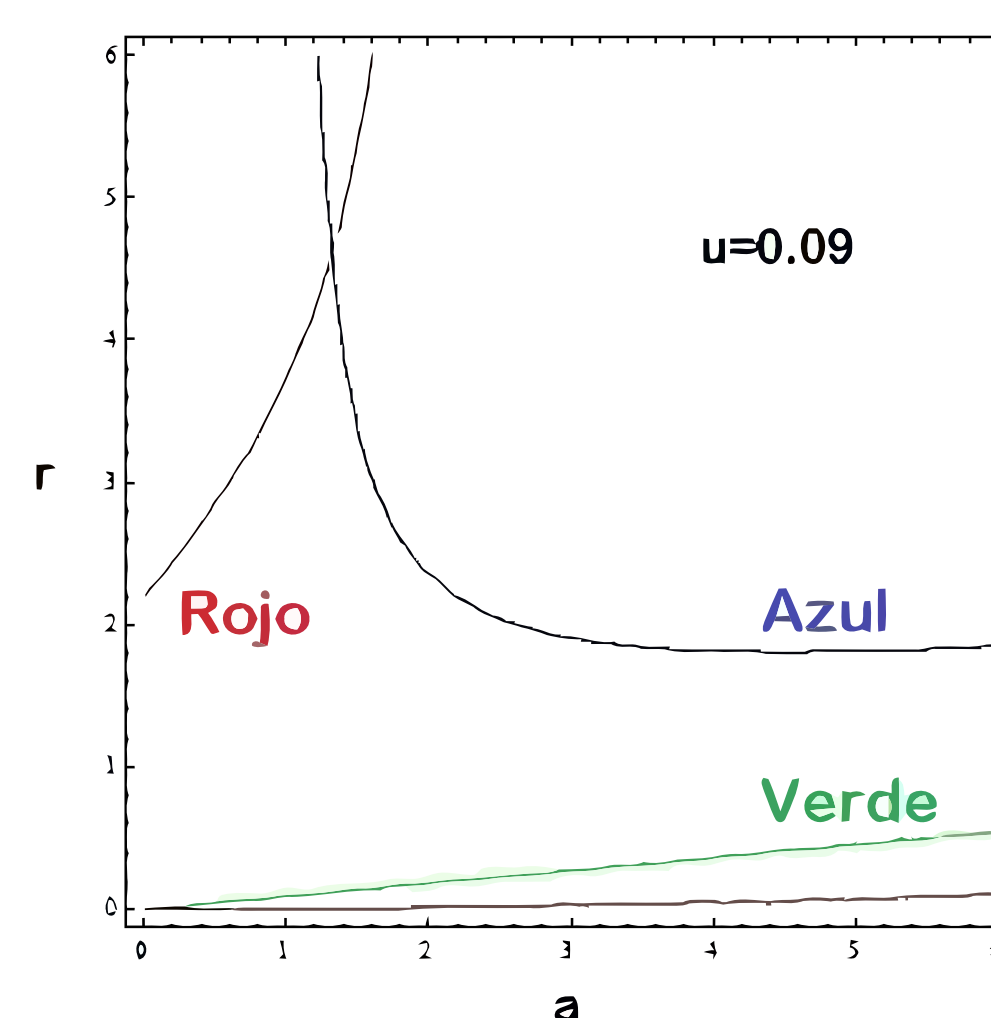
En cualquier otro caso  $(N^*, P^*)$  será inestable.

### Espacio de Parámetros



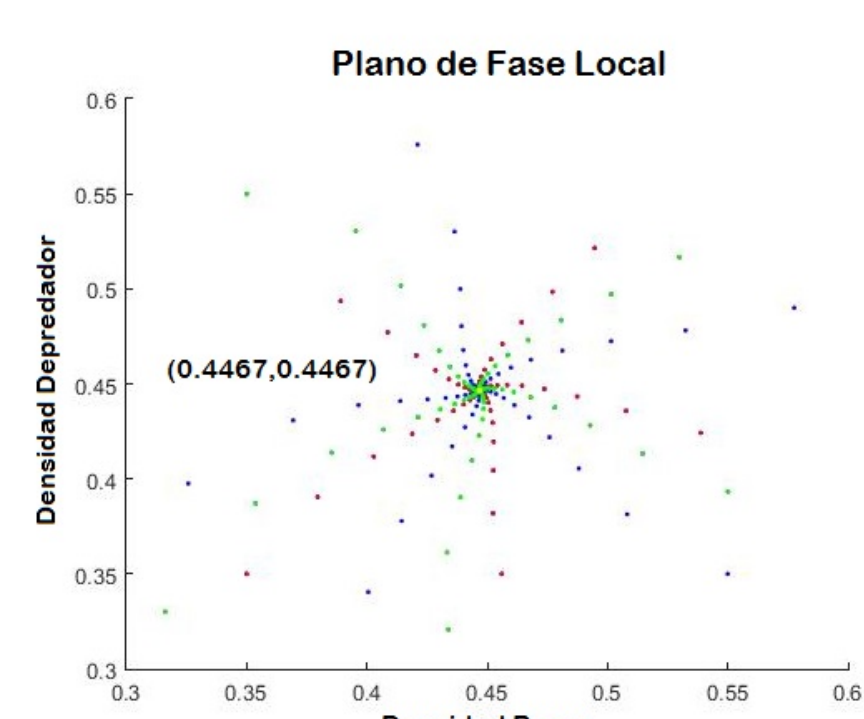
Gráfica de las superficies  $2 - \frac{4r(u+1)}{(r-ua)^2} - a \left( \frac{r-ua}{a+r} \right) = 0$  (rojo),  $a \left( \frac{r-ua}{a+r} \right) = 1$  (azul) y  $u - \frac{r}{a} = 0$  (verde).

### Perfil del espacio de Parámetros



Perfil del espacio de parámetros en el plano  $u = 0.09$ .

## SIMULACIONES



Retrato de fase para el trío de parámetros  $(a = 2, r = 1.94, u = 0.09)$  pertenecientes a la región estable donde se aprecia la presencia de un **foco estable**.

## SIMULACIONES

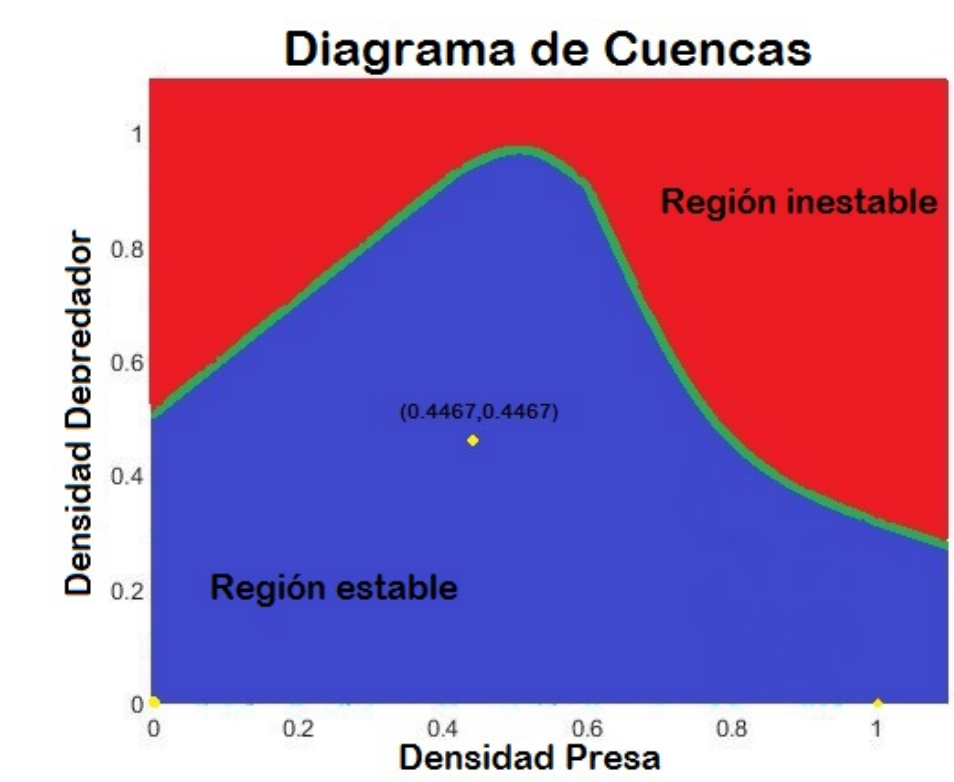


Diagrama de cuencas para el trío de parámetros  $(a = 2, r = 1.94, u = 0.09)$  pertenecientes a la región estable.

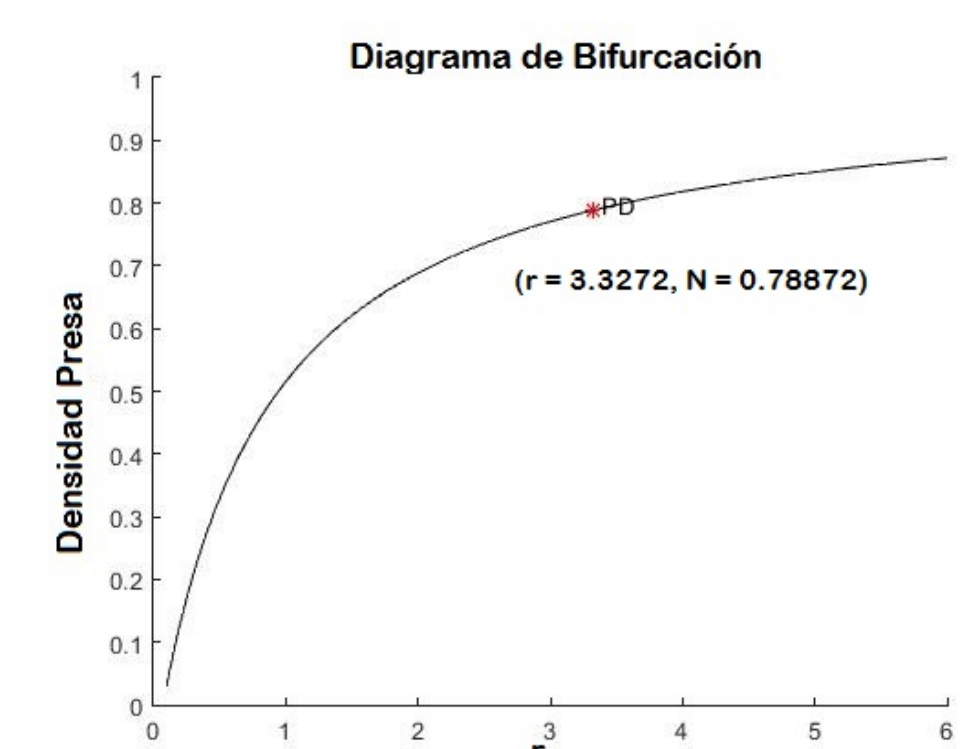
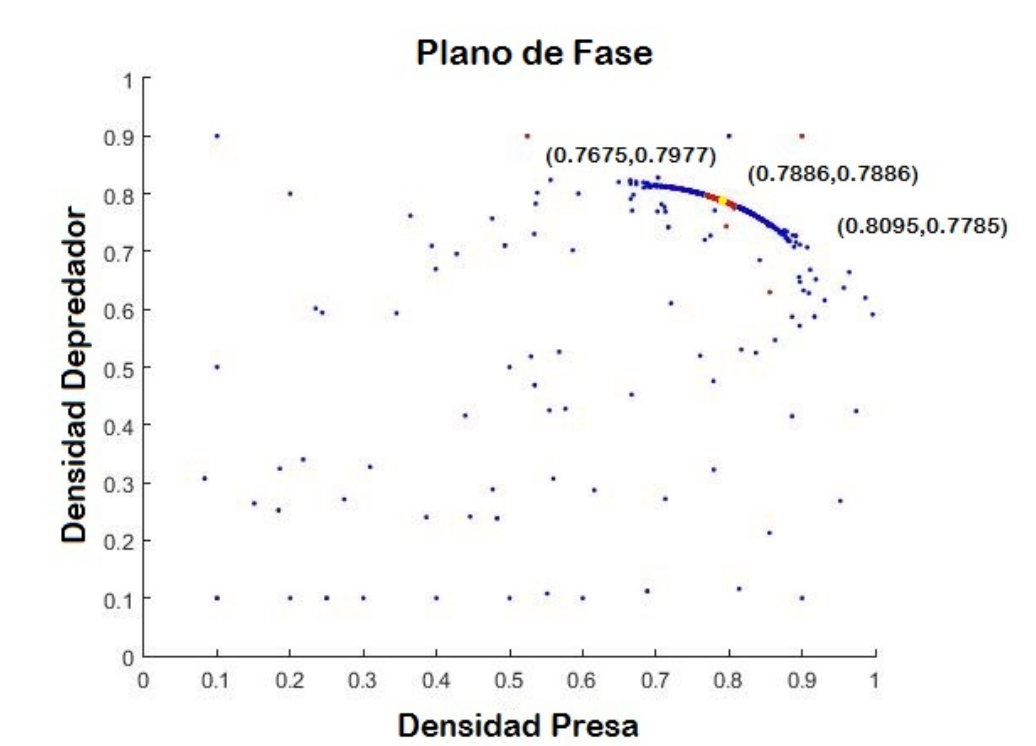


Diagrama de bifurcación desde los parámetros  $(a = 0.8, r = 0.1, u = 0.09)$ . En  $r = 3.3272$  se encontró una bifurcación Flip.



Retrato de fase del sistema para el trío de parámetros  $(a = 0.8, r = 3.33, u = 0.09)$ . Aquí es posible apreciar la aparición de un 2-ciclo inestable.

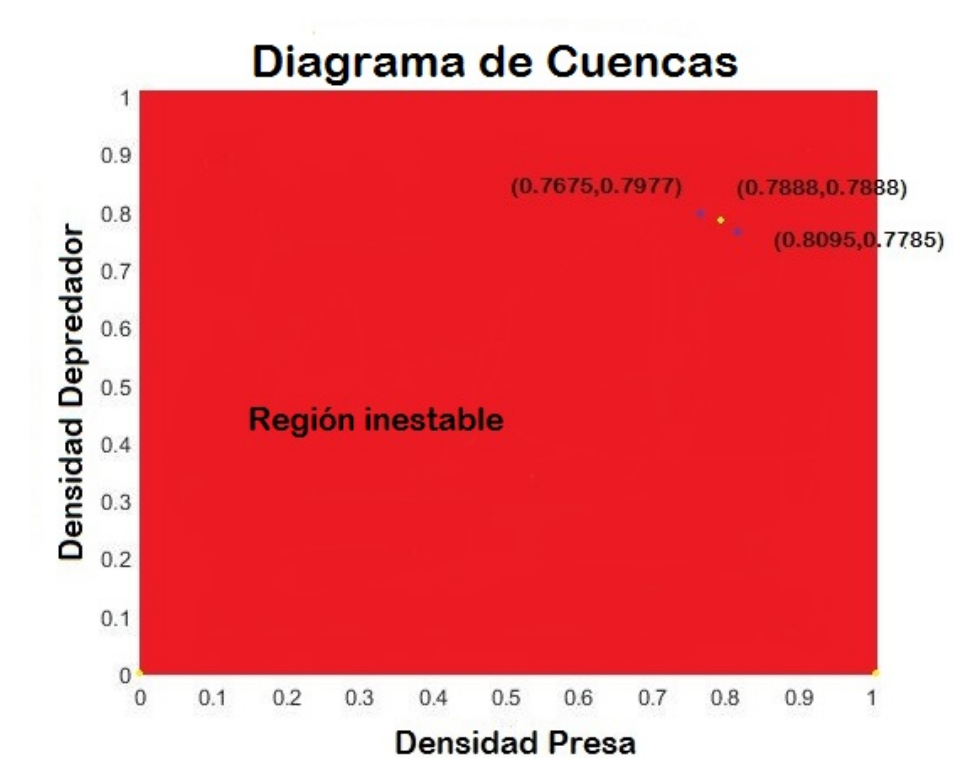


Diagrama de cuencas para el trío de parámetros  $(a = 0.8, r = 3.33, u = 0.09)$ . Se puede apreciar que todo el primer cuadrante corresponde a la región inestable para el 2-ciclo.

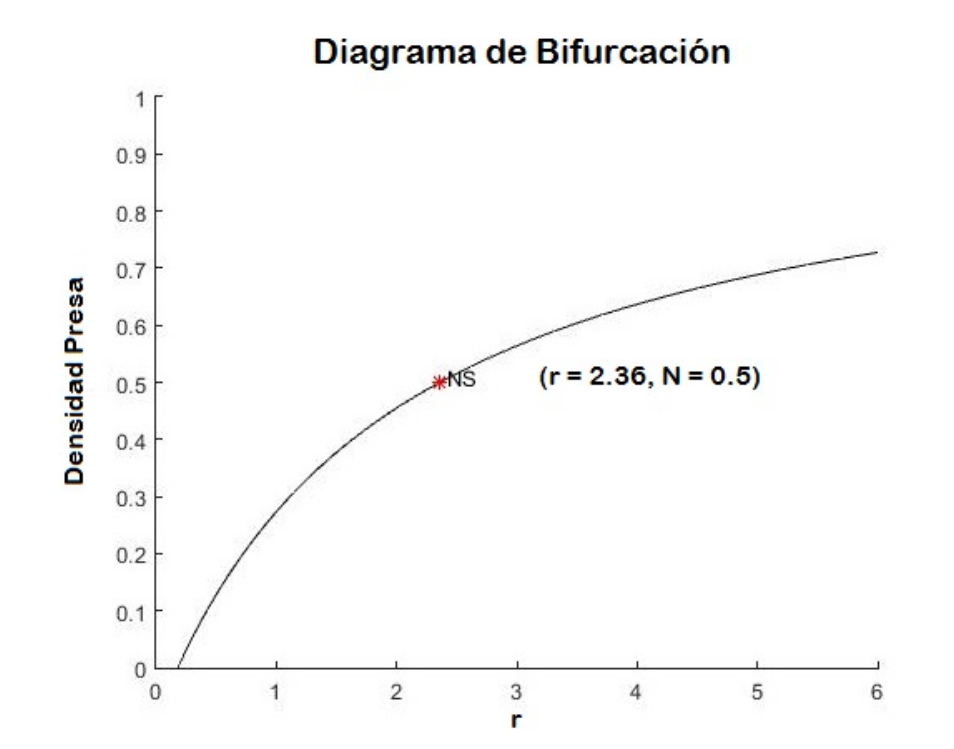
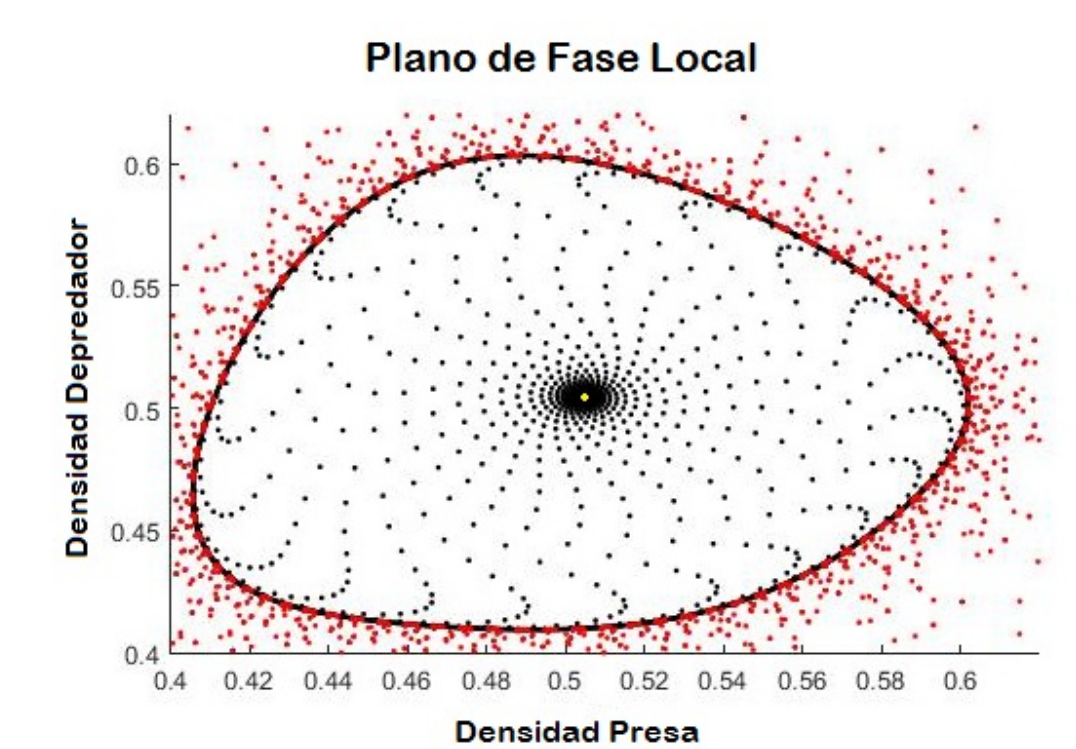


Diagrama de bifurcación a partir de los parámetros  $(a = 2, r = 0.185, u = 0.09)$ . Se puede observar que se encontró una bifurcación Neimark-Sacker en  $r = 2.36$ .



Retrato de fase para el trío de parámetros  $(a = 2, r = 2.4, u = 0.09)$ . Se puede apreciar la aparición de una órbita invariante alrededor del punto fijo.

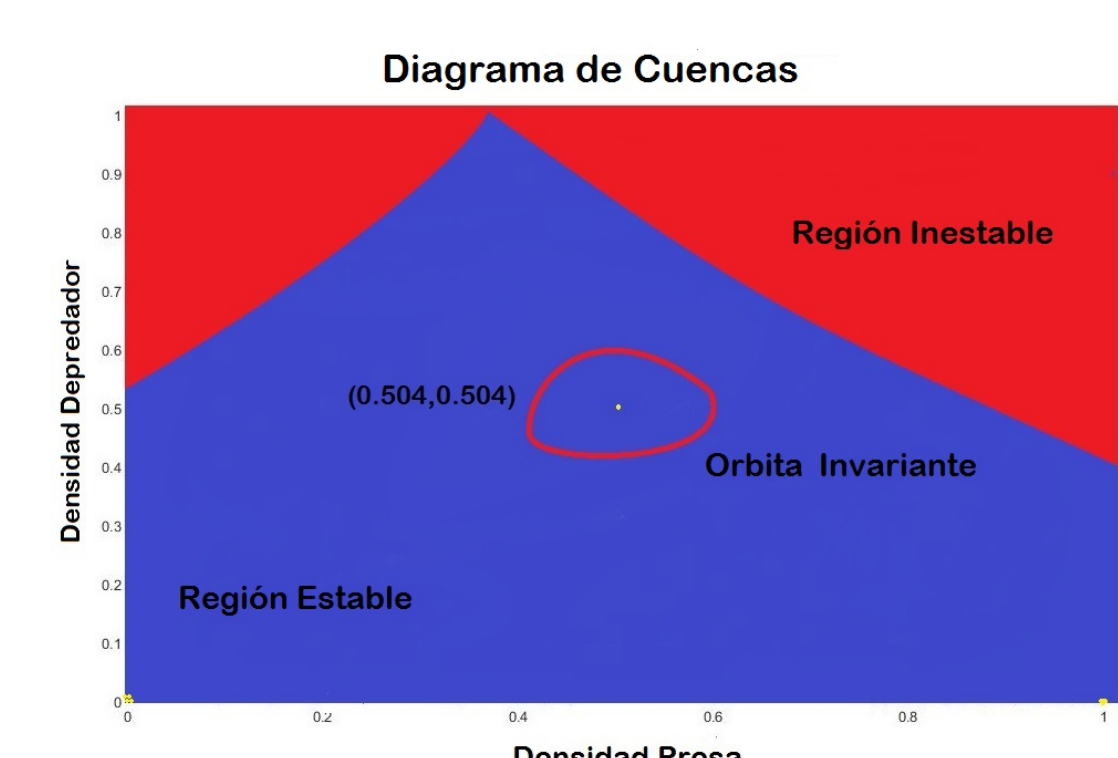


Diagrama de cuencas para los parámetros  $(a = 2, r = 2.4, u = 0.09)$ .