Medidas de fase y sincronía en osciladores neurales

Gabriel Vidal Aspée, Profesor Guía: Patricio Orio
Departamento de Matemáticas, UTFSM Profesor: Pablo Aguirre
Ingeniería Civil Matemática, Mat-282 Lab. de Modelación I, Semestre 2016 II
gabriel.vidal.14@sansano.usm.cl, patricio.orio@uv.cl, CINV

Resumen

Este estudio se basa en el modelo de **Jansen-Rit** de columnas neuronales corticales en el cual simula la actividad eléctrica del cerebro mediante un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales. Se busca obtener relaciones acerca del comportamiento de la columna neuronal cuando es sometido a un comportamiento de maestro-esclavo, el maestro sigue una frecuencia y se analiza si el esclavo está en fase con el maestro.

Introducción

La columna cortical está modelada por una población de *feedforward* células piramidales, que reciben un feedback inhibitorio y excitatorio proveniente de neuronas interconectadas localmente y recibe un *input* excitatorio proveniente de columnas distantes. Cada población de neuronas está modelada por bloques que transforman la tasa de disparos (FR) en un potencial post-sináptico (PSP). Luego los PSP son transformados por la función sigmoidea en la tasa de disparos:

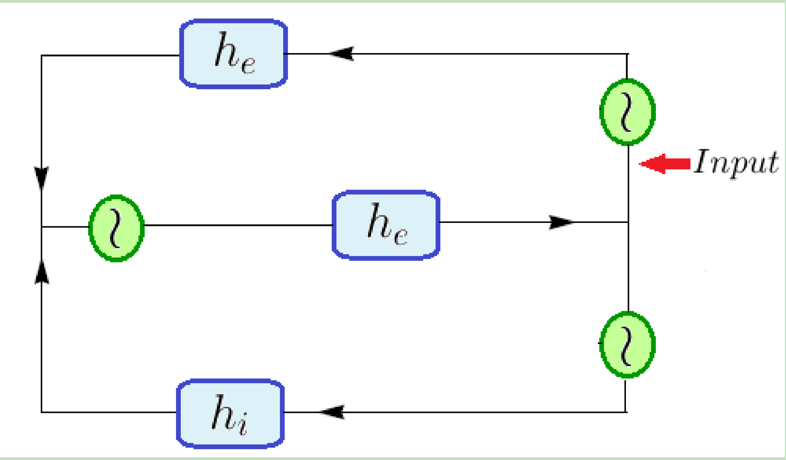

Figura 1: Sistema de columna cortical con input externo

El sistema de ecuaciones donde $y(t)$ representa el output de la señal:

$$\begin{cases} \ddot{y}_0(t) = AaSigm[C_1y_1 - C_4y_2] - 2a\dot{y}_0 - a^2y_0 \\ \ddot{y}_1(t) = Aa(p + Sigm[C_1y_0]) - 2a\dot{y}_1 - a^2y_1 \\ \ddot{y}_2(t) = BbSigm[C_3y_0] - 2b\dot{y}_2 - b^2y_2 \end{cases}$$

A : amplitud PSP excitatorio
B : amplitud PSP inhibitorio
C_1, C_2, C_3, C_4 : constantes de conectividad
p : input externo
S : función sigmoidea, $Sigm(v) = \frac{2e_0}{1+\exp^{r(v_0-v)}}$

Background Matemático

Para obtener el plano frecuencia-tiempo, se usa la transformada Wavelets. Sea la serie de tiempo x_n con un igual espaciamiento δt y n=0...N-1. Sea la función Morlet wavelet $\Psi_0(\eta)$ dependiente de un parámetro temporal η:

$$\Psi_0(\eta) = \pi^{-1/4}\exp^{i\omega_0\eta}\exp^{-\eta^2/2}$$

Que es una base ortogonal usada para la transformada continua Wavelet, que para x_n está definida como la convolución de x_n con una transformación de escala y traslación de $\Psi_0(\eta)$:

$$W_n(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'}\Psi^*[\frac{(n'-n)\delta t}{s}]$$

Donde $(*)$ indica el complejo conjugado. Si variamos la escala wavelet s y trasladamos el tiempo mediante el índice n, se puede construir una imagen de alguna variable versus la escala y cómo varía con el tiempo como su amplitud, $|W_n(s)|$, la fase, $\tan^{-1}[\Im(W_n(s))/\Re(W_n(s))]$ y el espectro de potencia wavelet $|W_n(s)|^2$.

Referencias

[1] Electroencephalogram and visual evoked potential generation in a mathematical model of coupled cortical columns,Ben H. Jansen, Vincent G. Rit.
[2] A Practical Guide to Wavelet Analysis,Christopher Torrence and Gilbert P. Compo, University of Colorado, Boulder, Colorado.

Input pulsátil

Variando el input(p) de forma pulsátil, con intervalo entre pulsos constantes con un valor de 0.05[s] y una duración del *input* de 0.005[s] con p entre 5 y 20, se obtiene que el sistema no cambia su frecuencia de oscilación para valores de $p \leq 11$, es decir, no está en sincronía con el pulso. Por otro lado el sistema para $p \geq 12$ se tiene que el sistema varía su frecuencia de oscilación a la del input.

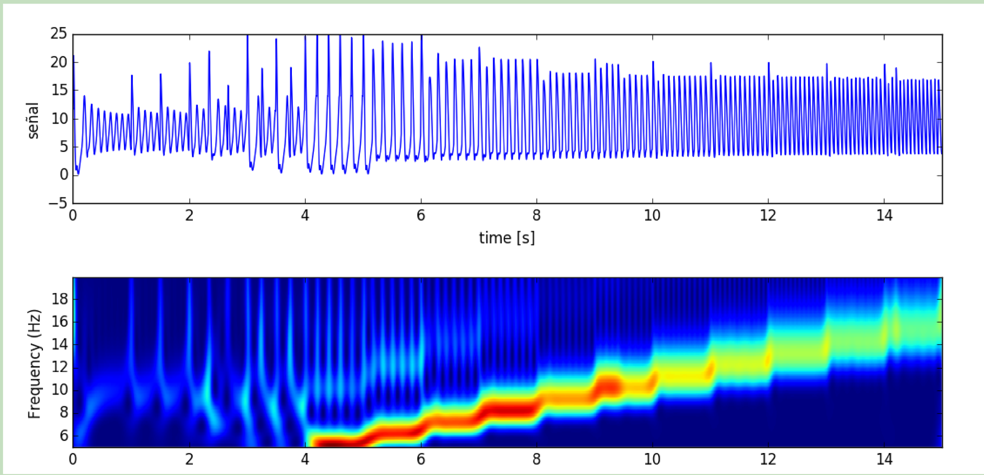

Figura 2: Input(20) pulsátil

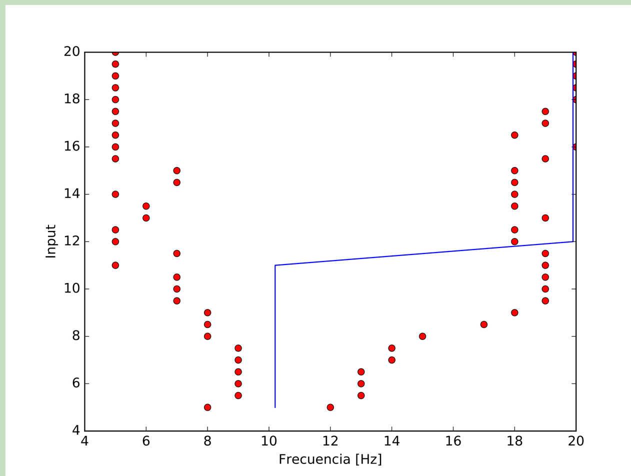

Figura 3: Frecuencias naturales

Ahora aumentando su frecuencia entre pulsos, se tiene que el sistema permanece para cada valor del input en un rango en el que sigue la frecuencia del pulso y que es más grande a medida que crece el input de la simulación, en este aspecto ocurre un *entrainment*, es decir existe un período de tiempo en el cual los dos osciladores tienen la misma frecuencia

Sistemas Acoplados

Considerando dos sistemas de masas neuronales por separado, el sistema 1(esclavo) oscila a amplitud constante, en cambio el sistema 2(maestro) tiene que A crece de forma continua en la simulación, ambas con sus propias frecuencias preferidas 10[Hz] y 7[Hz] respectivamente. Luego de conectar el sistema maestro-esclavo para cierto intervalo de tiempo(9[s]) el esclavo tiende a estar a la misma frecuencia con el maestro.

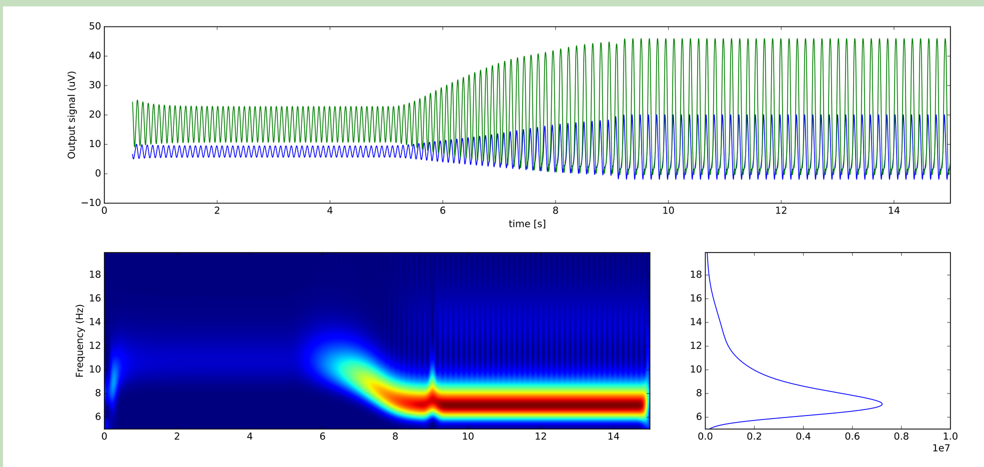

Figura 4: Sistemas acoplados

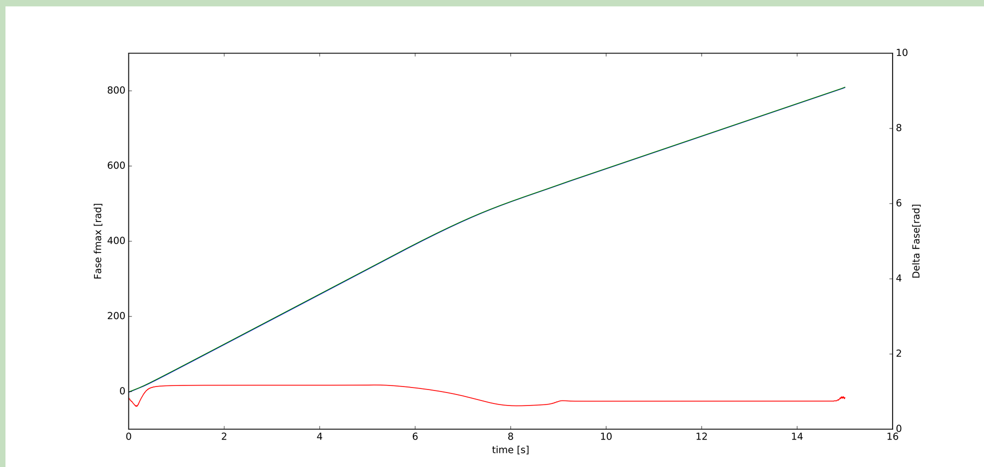

Figura 5: Diferencia de fase

Cuando la frecuencia del esclavo es mayor a la del maestro el esclavo sigue su propia frecuencia, pero si están en la misma frecuencia los sistemas se encuentran en fase. Por otro lado cuando el maestro tiene mayor frecuencia que la del esclavo, éste último tiende a seguir la oscilación del maestro.

Oscilador de Kuramoto

Este sistema se tiene que el sistema está en fase cuando ambas frecuencias naturales son idénticas, para frecuencias distintas aparece una diferencia de fase. Por otro lado las frecuencias de cada oscilador crecen linealmente, hasta cierto instante de tiempo para el cuál se hace constante, pero la diferencia de frecuencias sólo aparece en el intervalo de tiempo en que crece la frecuencia instantánea.

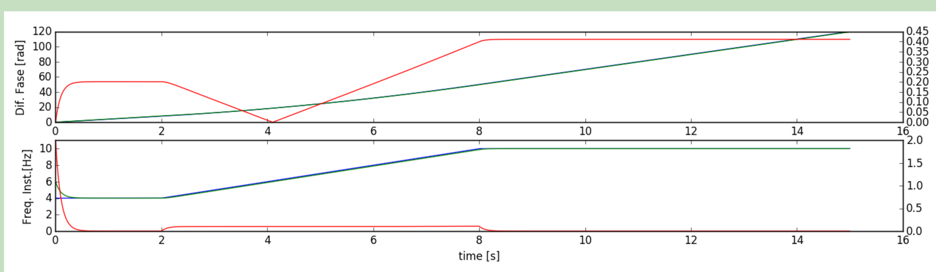

Figura 6: Oscilador de Kuramoto, (1) Fase, (2) Freq. instantánea

Conclusiones

- Si variamos p de forma pulsátil en intervalos constantes se llega que para valores del input mayores que 12 el sistema está en fase al input, por otro lado para valores menores que 11, el sistema no está en sincronía con el pulso.
- En sistemas acoplados si el maestro y el esclavo tienen igual frecuencia favorita la diferencia de fase es cero,pero a medida que la frecuencia de ambos sistemas es distinta, aparece una mínima diferencia de fase que es casi constante, es decir, el esclavo siempre está desfasado.
- El sistema neuronal al igual que el oscilador de Kuramoto, la diferencia de fase se hace igual a cero sólo en la misma frecuencia natural, en el caso contrario hay un desfase. Por otro lado en el sistema neuronal la diferencia de frecuencias es minima en todo instante de la simulación, a diferencia del oscilador de Kuramoto que sólo aparece una diferencia de frecuencias cuando van variando, y después son igual a cero.