

El Modelo

- El efecto Allee es un fenómeno caracterizado por la propensión a la baja en la tasa de crecimiento de una población bajo un nivel crítico.
- El modelo estudiado viene dado por el sistema adimensionalizado de EDOs:

$$X : \begin{cases} \dot{u} = u(u - m)(1 - u)(u + v) - \alpha uv; \\ \dot{v} = \beta uv - \gamma v(u + v); \end{cases}$$

donde u y v representan las poblaciones de presas y depredadores respectivamente, con $t \geq 0$. Los parámetros $(\gamma, \alpha, \beta, m) \in \mathbb{R}_+^3 \times]0, 1[$ poseen interpretaciones biológicas. En particular, el parámetro m es el límite para el efecto Allee en la presa, en ausencia de depredador. Como $m > 0$, esta forma de efecto Allee se conoce como efecto Allee fuerte.

- Agregando a este sistema los términos de difusión espacial que fueron incluidos en este estudio, se tiene el sistema de EDPs:

$$Y : \begin{cases} u_t = u(u - m)(1 - u)(u + v) - \alpha uv + d_1 u_{xx}; \\ v_t = \beta uv - \gamma v(u + v) + d_2 v_{xx}; \end{cases}$$

donde $x \in [0, L]$ y los nuevos parámetros $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$

- En este sistema se realizó un cambio de variables en donde aparecen parámetros $(a, b, g, c, s, d) \in \mathbb{R}_+^6$, que definen relaciones entre los parámetros anteriores.
- Para analizar este sistema de manera dinámica, se consideran soluciones de tipo onda viajera:

$$U(z) = u(x, t); V(z) = v(x, t), z = x + ct, c > 0,$$

obteniendo el sistema:

$$Z : \begin{cases} \dot{U} = W; \\ \dot{V} = R; \\ \dot{W} = \frac{c}{d}W - (sU(U - m)(1 - U)(U + V) - aUV); \\ \dot{R} = cR - (bUV - gV(U + V)); \end{cases}$$

en el cual interesa buscar órbitas homoclínicas y heteroclínicas.

Coordenadas de los puntos de equilibrio

- Los puntos de equilibrio de Z sobre los ejes son $O := (0, 0, 0, 0)$, $eq_m := (m, 0, 0, 0)$ y $eq_1^* := (1, 0, 0, 0)$ y, dependiendo de los parámetros, existen hasta dos puntos de equilibrio $p_s = (x_+^0, y_+^0, 0, 0)$ y $p = (x_-^0, y_-^0, 0, 0)$ en $\text{Int}(\Omega)$, donde

$$x_{\pm}^0 = \frac{sb(1 + m) \pm \sqrt{bs\Delta}}{2bs}; y_{\pm}^0 = \frac{(b - g)(sb(1 + m) - \sqrt{bs\Delta})}{2bsg}; \text{ con}$$

$$\Delta = -4a(b - g) + b(m - 1)^2s,$$

donde, para que existan estos equilibrios, se debe tener $\Delta \geq 0$.

Equilibrios O , eq_m y eq_1^*

- **Lema 1 (Comportamiento de equilibrios)**

- Para cualquier valor de parámetros, el punto O es un equilibrio no hiperbólico, con 2 valores propios positivos y 2 nulos.
- Si $b < g$, el punto eq_m es una silla, con $\dim(W^s(eq_m)) = 1$ y $\dim(W^u(eq_m)) = 3$ y el punto eq_1^* es un punto silla con $\dim(W^s(eq_1^*)) = 1$ y $\dim(W^u(eq_1^*)) = 3$.
- Si $b > g$, el punto eq_m es un nodo repulsor y el punto eq_1^* es un punto silla con $\dim(W^s(eq_1^*)) = 2$ y $\dim(W^u(eq_1^*)) = 2$.

Equilibrios p y p_s

- Dentro de este estudio se consideró el vector de parámetros $(a, b, g, c, s) = (24, 19, 1, 1, 100)$ constante.
- Como $\Delta \geq 0$, se tendrá que $m \leq 0,0463367$.
- Para valores del parámetro $0 < m < 0,0463367$, p y p_s se encuentran en el conjunto $\Omega' = \{(U, V, W, R) \in \mathbb{R}^4 : U > 0, V > 0\}$
- **Lema 2 (Condiciones para colapso de puntos de equilibrio p y p_s)**
 - Si $m = 0,0463367$, entonces p colapsa con el punto p_s en una bifurcación silla-nodo.

Bifurcaciones y caos

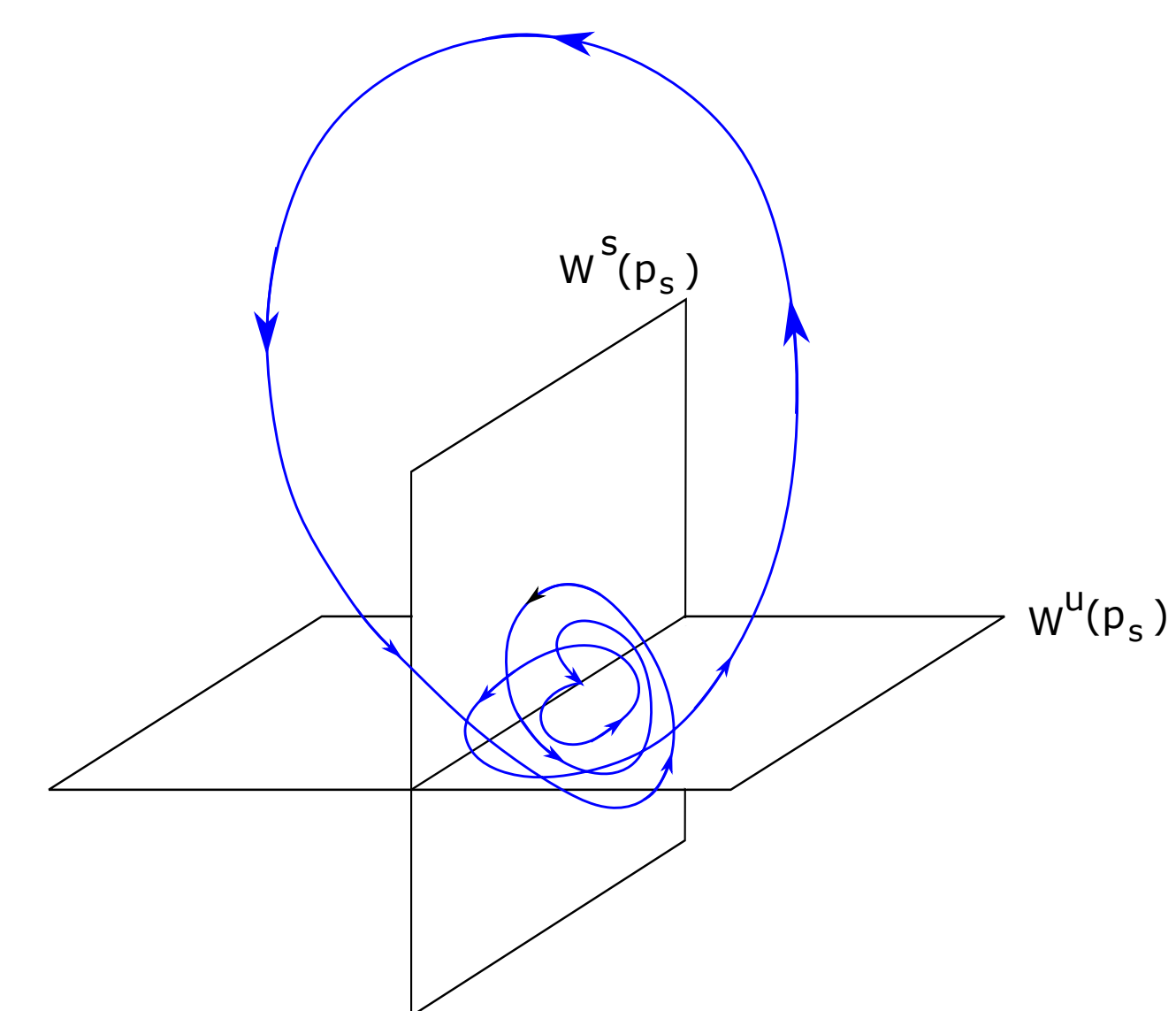
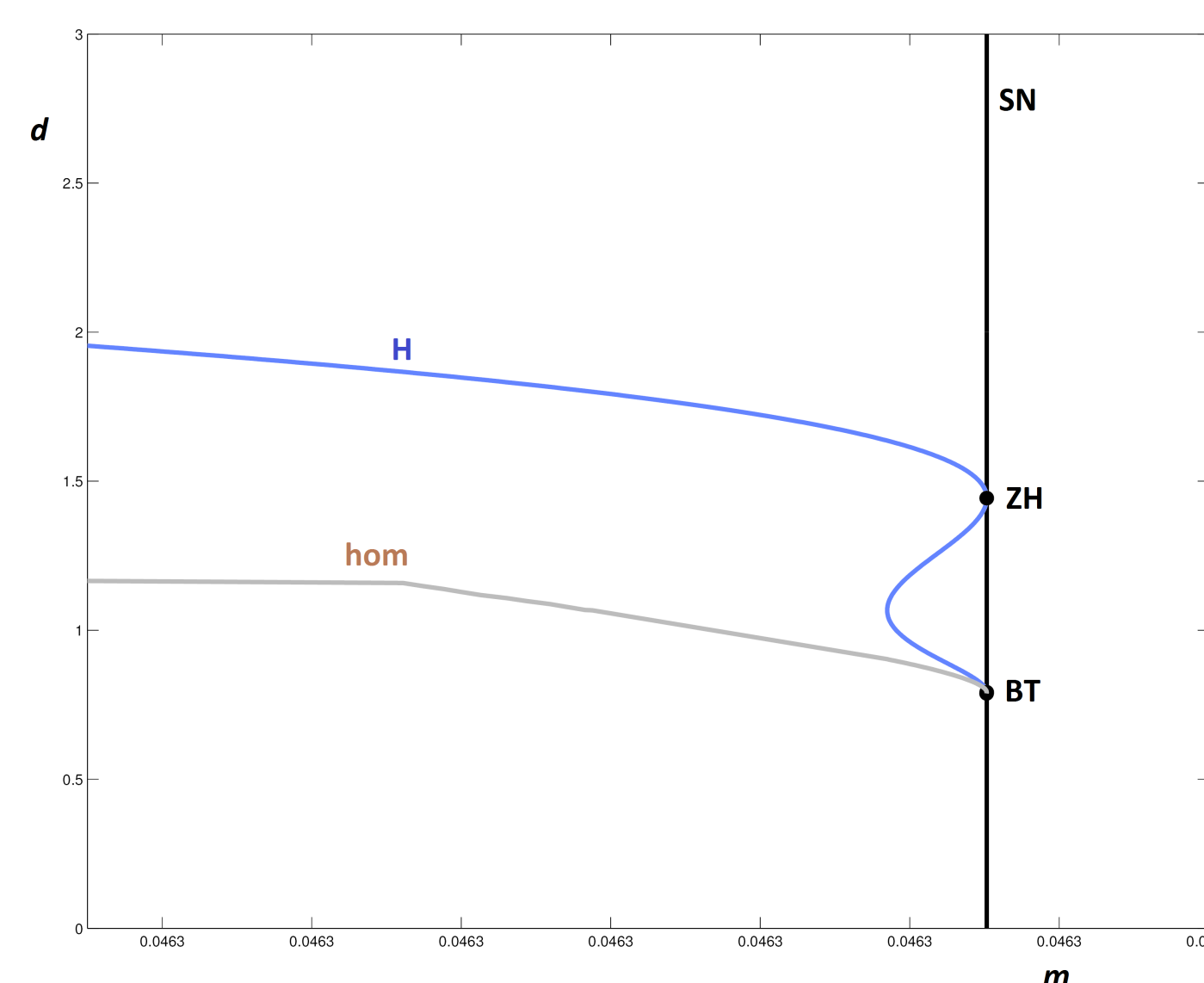


Figura 1: Diagrama de bifurcación de p y p_s en plano (m, d) , con $(a, b, g, c, s) = (24, 19, 1, 1, 100)$ fijo

Figura 2: Bosquejo de la órbita homoclínica

- Bifurcaciones locales de codimension 1: *Silla-nodo* (SN) y *Hopf supercrítica* (H).
- Bifurcaciones de codimension mayor: *Bogdanov-Takens* (BT) y *Bifurcación Zero Hopf* (ZH).
- Bifurcaciones globales: *Homoclínica* (hom), la cual da lugar a pulsos viajeros en el sistema.

Teorema 1 (Caos homoclínico de Shilnikov):
Para valores de parámetros

$$(m, d) = (0,046336594049, 0,88990094337) \in \text{hom},$$

los valores propios de $DZ(p_s)$ son:

$$\lambda_1 = -0,09677535596 + 0,8446316803i =: -\rho + \omega i,$$

$$\lambda_2 = -0,09677535596 - 0,8446316803i = -\rho - \omega i,$$

$$\lambda_3 = 1,158635643588 + 1,322533488i =: \gamma + \sigma i,$$

$$\lambda_4 = 1,158635643588 - 1,322533488i = \gamma - \sigma i.$$

Con lo que se tiene $\nu = \frac{\rho}{\gamma} < 1$. El teorema del caos homoclínico de Shilnikov asegura que bajo estas condiciones, se forma una herradura de Smale en vecindades de la órbita homoclínica.

- Valores propios de $DZ(p_s)$ en la homoclínica cumplen condición del Teorema 1.

Conclusiones

- Existencia de pulsos periódicos para valores de parámetros (m, d) bajo la curva (H) y pulsos viajeros para $(m, d) \in \text{hom}$.
- Existencia de caos en la órbita homoclínica para cualquier valor de parámetros en hom .

Referencias

- P. Aguirre, J D Flores and E Gonzalez-Olivares, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 16 (2014), pp. 235-249.
- L. P. Shilnikov and A. Shilnikov, "Shilnikov Bifurcation", Scholarpedia, (Febrero, 2016). http://www.scholarpedia.org/article/Shilnikov_bifurcation#Shilnikov_theorem