Ondas viajeras y caos en modelos poblacionales

Pablo Aguirre

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

Laboratorio de Modelación I MAT–282

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

EX UMBRA IN SOLEM
UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Indicaciones preliminares

En esta presentación se proponen dos proyectos...

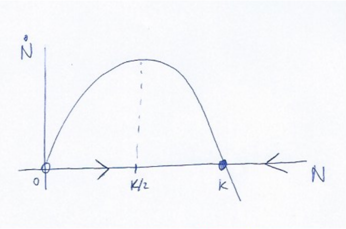
- **Proyecto 1:** Ondas viajeras en un modelo depredador-presa con efecto Allee y dispersión espacial.
- **Proyecto 2:** Caos en un modelo depredador-depresa discreto con efecto Allee.

Debe realizar solamente 1 informe para esta presentación.

Al indicar su preferencia (ranking) por esta presentación, señale cuál de los dos proyectos propuestos aquí le parece más atractivo. Ej: La ubicación de esta presentación en mi ranking es en el 5to lugar (de un total de 13 presentaciones), y de los dos proyectos propuestos aquí prefiero el 2do.

A cada proyecto se le asignará un estudiante.

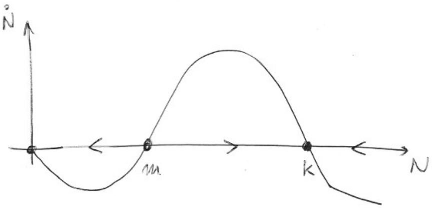
Introducción: Modelo de crecimiento logístico



$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right).$$

- Modelo a tiempo continuo.
- $N(t)$: Densidad de población especie N en el instante $t > 0$.
- $r > 0$: Tasa crecimiento intrínseco.
- $k > 0$: Capacidad de soporte del medioambiente.
- $N(0) = N_0 > k$ entonces $N(t) \to k$ para $t \to \infty$.
- $0 < N_0 < k$ entonces $N(t) \to k$ para $t \to \infty$.

Introducción: Modelo con efecto Allee



$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)(N - m).$$

- $0 < m < k$.
- $N(0) = N_0 > k$ entonces $N(t) \to k$ para $t \to \infty$.
- $m < N_0 < k$ entonces $N(t) \to k$ para $t \to \infty$.
- $0 < N_0 < m$ entonces $N(t) \to 0$ para $t \to \infty$. Extinción!
- Efecto Allee: Dificultad de una población para crecer cuando se encuentra a bajas densidades de población.
- Umbral Allee (m).
- Dificultad para encontrar pareja, baja eficiencia para agruparse ante amenaza de un depredador, etc.

Proyecto 1: Antecedentes

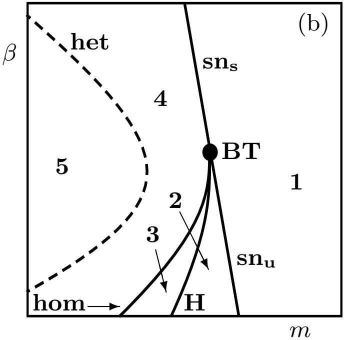
El siguiente modelo de depredación con efecto Allee

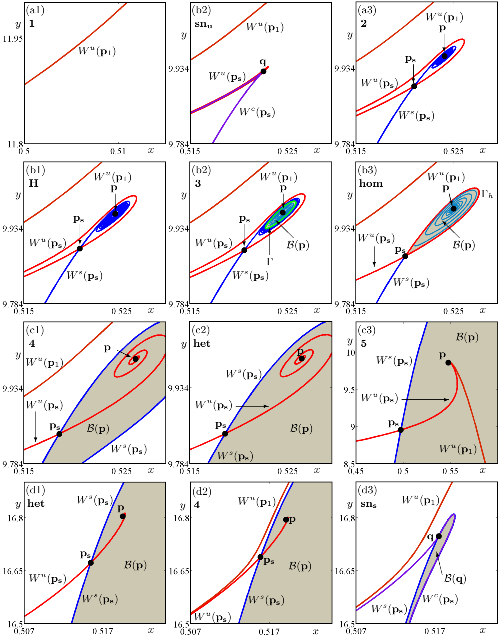
$$\mathbf{Y}: \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x(x-m)(1-x)(x+y)-\alpha xy; \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= \beta xy-\gamma y(x+y); \end{cases} \tag{1}$$

ha sido estudiado en

P Aguirre, J D Flores and E González-Olivares, "*Bifurcations and global dynamics in a predator-prey model with a strong Allee effect on prey, and a ratio-dependent functional response*," Nonlinear Analysis: Real World Applications **16** (2014), pp. 235–249. `http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.10.002`

Análisis de bifurcaciones





$W^s(p_s)$: Umbral Allee.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = u(u-m)(1-u)(u+v) - \alpha uv + D_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \beta uv - \gamma v(u+v) + D_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{cases} \tag{2}
$$

Poblaciones u, v varían en el tiempo $t > 0$, y en el espacio x.
Consideramos un dominio espacial unidimensional $-L < x < L$.
D_1, D_2: Coeficientes de difusión.

Tras reescalamientos de variables y reparametrizaciones:

$$
\boxed{
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = su(u-m)(1-u)(u+v) - auv + d \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial t} = buv - gv(u+v) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{cases} \qquad (3)
}
$$

Buscaremos soluciones muy “especiales” de este sistema.

Buscando ondas viajeras

Las **ondas viajeras** son soluciones de (3) de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(t,x) & = & U(z); \\ v(t,x) & = & V(z); \end{array} \right. \tag{4}$$

con $z = x + ct$, y donde $c > 0$ es una velocidad de onda (a priori) desconocida.

Las funciones $U(z)$ y $V(z)$ definen perfiles de onda. Al usar la regla de la cadena y sustituir (4) en (3) se obtiene

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} c\dfrac{dU}{dz} & = & sU(U-m)(1-U)(U+V) - aUV + d\dfrac{d^2U}{dz^2}; \\[2ex] c\dfrac{dV}{dz} & = & bUV - gV(U+V) + \dfrac{d^2V}{dz^2}. \end{array} \right. \qquad (5)}$$

Al introducir las nuevas variables (auxiliares) de estado $W = U'$ y $R = V'$ se obtiene el sistema *de onda*...

Sistema de Onda

$$\begin{cases} U' &= W; \\ V' &= R; \\ W' &= \dfrac{cW}{d} - (sU(U-m)(1-U)(U+V) - aUV); \\ R' &= cR - (bUV - gV(U+V)). \end{cases} \tag{6}$$

Sistema dinámico para $(U, V, W, R) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2$.

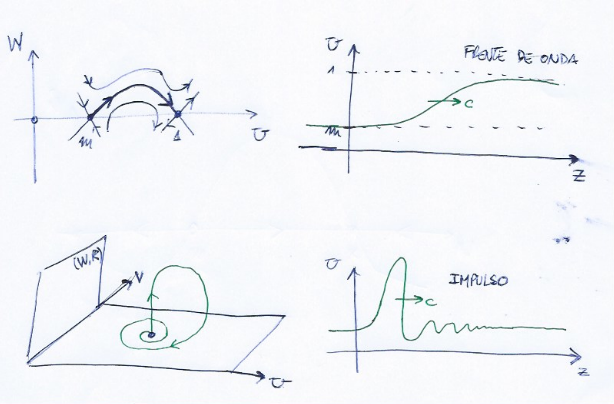
Las coordenadas (U, V) de órbitas de (6) son ondas viajeras del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= su(u-m)(1-u)(u+v) - auv + d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= buv - gv(u+v) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{cases} \tag{7}$$

que se propagan en el espacio a velocidad c.

¿Qué tipo de órbita de (6) es relevante?

Objetivos Proyecto 1



- Buscar Frentes de Onda: conexiones heteroclínicas de equilibrios de (6).
- Buscar Impulsos: conexiones homoclínicas en (6).
- Uso de herramientas analíticas y computacionales de sistemas dinámicos.
- Principal tarea: Para valores de parámetros dados, identificar puntos de equilibrio, las dimensiones de sus variedades (in)estables y calcular órbitas en estas variedades.

Proyecto 2: Antecedentes

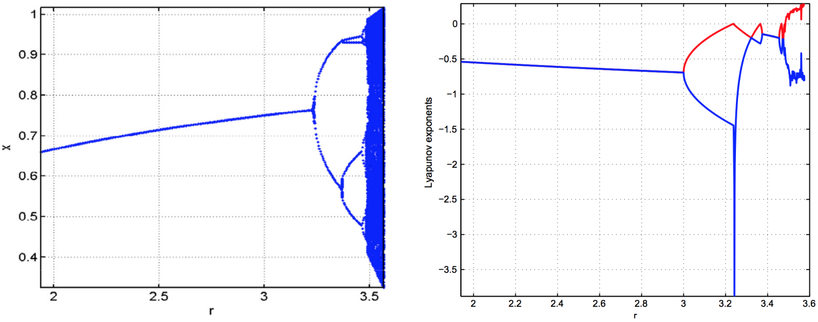
Modelo de depredación con efecto Allee a tiempo discreto

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t + rN_t(1 - N_t)\dfrac{N_t}{m + N_t} - aN_tP_t; \\ P_{t+1} = P_t + aP_t(N_t - P_t); \end{cases} \tag{8}$$

- $\dfrac{N_t}{m+N_t}$: Término que modela el efecto Allee.
- Condiciones analíticas para estabilidad local de punto fijo positivo:
  Si $2 - \frac{4r(m+1)}{(r-ma)^2} < a\left(\frac{r-ma}{a+r}\right) < 1$ entonces (N^*, P^*) es estable.
  Si $2 - \frac{4r(m+1)}{(r-ma)^2} > a\left(\frac{r-ma}{a+r}\right)$ o $a\left(\frac{r-ma}{a+r}\right) > 1$, entonces (N^*, P^*) es inestable.
- ¿Qué bifurcaciones causan estas transiciones? ¿Consecuencias?

C. Celik and O. Duman, "*Allee effect in a discrete-time predator prey system*," Chaos, Solitons and Fractals, **40** (2009), pp. 1956–1962. http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2007.09.077

Proyecto 2: Sin efecto Allee

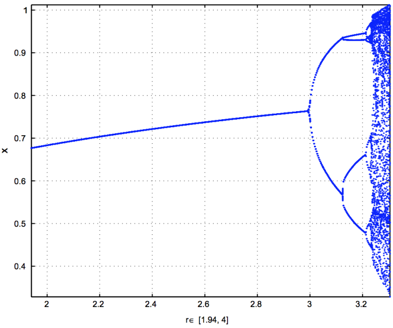


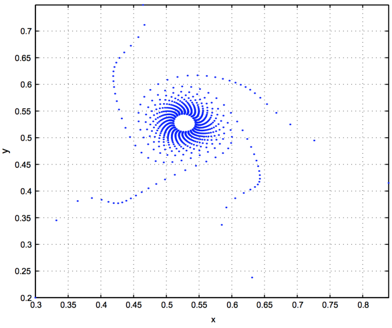
(a) (b)

- $m = 0$: No hay efecto Allee.
- (a) Ruta al caos via duplicación de período.
- (b) Exponente de Lyapunov positivo: Evidencia de caos.
- Estudio analítico de bifurcación flip, Neimarck-Sacker, etc.

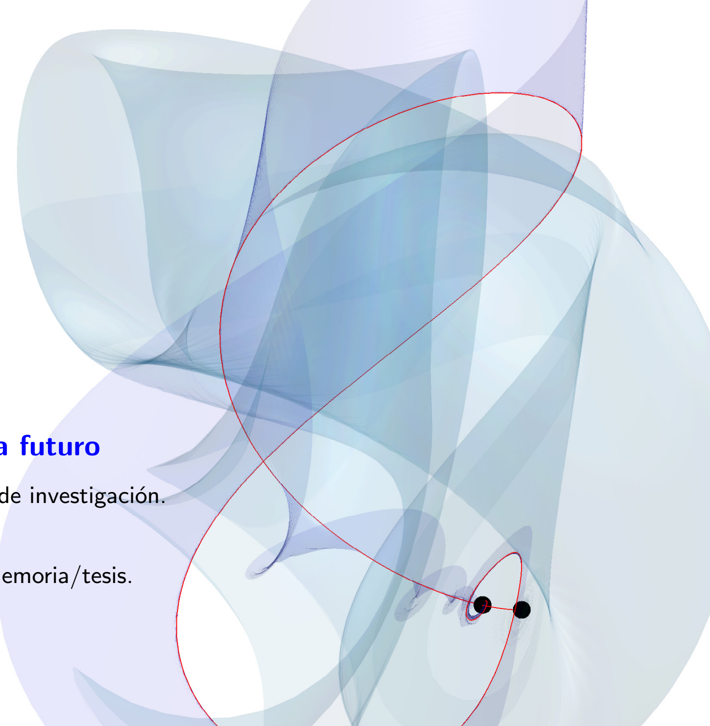
L.-G. Yuan and Q.-G. Yang, "*Bifurcation, invariant curve and hybrid control in a discrete-time predator-prey system*," Applied Mathematical Modelling, **39** (2015), pp. 2345–2362.
http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.040

Objetivos Proyecto 2





- Buscar bifurcaciones en modelo con efecto Allee ($m > 0$).
- Buscar posibles rutas al caos vía bifurcaciones o evidencia de caos vía exponentes de Lyapunov.
- Identificar la influencia del parámetro m.
- Largo plazo: Identificar los atractores del modelo, sus cuencas de atracción, y separatrices
  (Colaboración con Stefanie Hittmeyer
  `https://www.math.auckland.ac.nz/~sthi942/`).



Perspectivas a futuro

- Ayudantías de investigación.
- Prácticas.
- Temas de memoria/tesis.