

Una relación entre física y matemática

Oscar Castillo-Felisola

USM

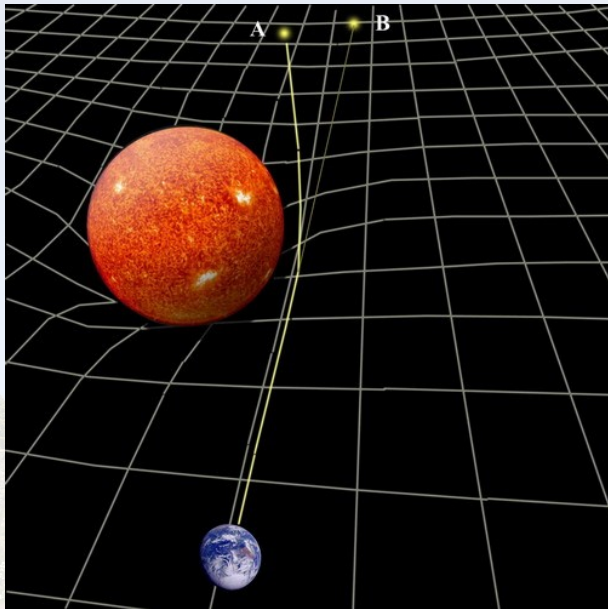
Outline

- 1 Geometrización de la física
- 2 Gravedad como geometría
- 3 El logro de Einstein
- 4 Proyecciones

Física y geometría diferencial

- Espacios curvos
 - ▶ Subespacios de $\mathbb{R}^3$ por Gauss (y Lovachevsky)
 - ▶ Generalizaciones a dimensiones mayores por Riemann
- Gravitación y geometría de Riemann
 - ▶ Teorías especial de la relatividad por Einstein.
 - ▶ Interpretación geométrica por Minkowsky.
 - ▶ Teoría general de la relatividad por Einstein.
- Otras interacciones fundamentales y espacios fibrados
Las teorías de gauge

¿Cómo interpretar geométricamente la gravedad?



Un poco de formalidad... por favor?

El espaciotiempo es métrico

- La métrica es el *objeto geométrico* que permite definir distancias en el espaciotiempo
- En la teoría de Einstein es el único objeto fundamental.

La conexión

- Es el *objeto geométrico* que relaciona (o conecta) cartas locales vecinas.
- Este define la curvatura.

Curvatura del espacio.

- Describe la *geometría* del espaciotiempo.
- Es un efecto local, i.e., no diferencia topologías.

Algunas ecuaciones (para Relatividad General)

- Métrica: $g_{\mu\nu}$
 - ▶ es un objeto bilineal (tensor de rango dos)
 - ▶ simétrico
- Conexión: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$
 - ▶ No es multilineal, es decir, transforma inhomogéneamente
 - ▶ Define el cambio de bases coordenadas punto a punto.

- Curvatura:

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\rho}$$

- ▶ Escencialmente mide como cambia la conexión punto a punto.
- ▶ Podría interpretarse como una especie de aceleración (segunda derivada) de la métrica.

Las ecuaciones de Einstein (.. and beyond)

Con la curvatura se pueden definir otros objetos geométricos al calcular su traza.

Tensor y escalar de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

- El tensor de Ricci mide (en cierto modo) el cambio en la medida de integración.

Ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}.$$

- El $T_{\mu\nu}$ codifica la información de materia (distribución, tipo, etc.)

¿Qué hacer con esto?

- Malas noticias:

- ▶ Las ecuaciones de Einstein son diez PDE.
- ▶ No-lineales y acopladas.
- ▶ Se complican al añadir materia.

- Buena noticia:

- ▶ Las simetrías son nuestras aliadas.
- ▶ Se puede *adivinar* la forma (genérica) de las soluciones.
- ▶ Existen métodos numéricos para resolverlas.

Posibles proyectos.

- Resolver las ecuaciones de Einstein numéricamente, y simular la evolución de ciertos tipos de materia en estos espacios.
- Encontrar soluciones para teorías no Einsteinianas, via simulaciones.
- Interés personal:
 - ▶ Polynomial Affine Gravity. Ref. 1 y 2
 - ▶ Teorías con torsión (parte no-simétrica de la conexión). Ref. 3
 - ▶ Inclusión de materia fermiónica (como el electrón o protón). Ref. 4