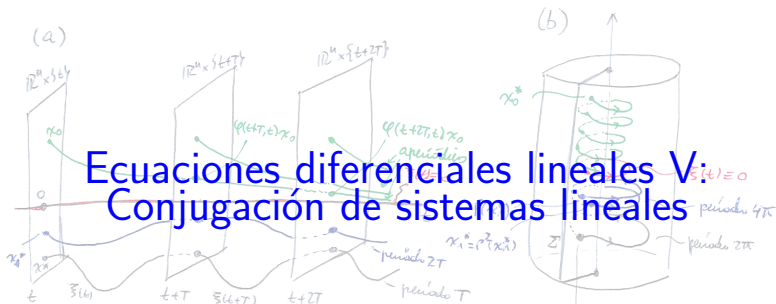




Pablo Aguirre

Departamento de Matemática

Universidad Técnica Federico Santa María

Valparaíso, Chile

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MAT-243

Álgebra lineal:

- * A, B Matrices similares
- * Mismos valores propios
- * Misma forma diagonal o misma forma canónica de Jordan.
- * Matrices son “equivalentes”.
(Relación de equivalencia, de hecho).

EDOs lineales: $x' = Ax$, $y' = By$.

- * Soluciones descritas completamente por matrices A, B .
- * ¿Idea de equivalencia entre soluciones de 2 EDOs?

Ejemplo

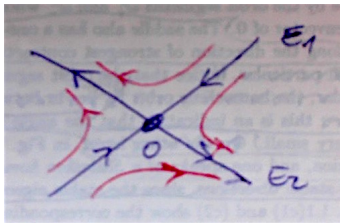
* $\boxed{x' = Ax}, \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$

* A : matriz real 2×2

* Valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

* Vectores propios v_1, v_2 .

* Sup. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: origen es un punto silla



* $P = [v_1 \ v_2]$: matriz cambio de base.

$$(y_1, y_2)^T = P^{-1}(x_1, x_2)^T$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2)^T = P(y_1, y_2)^T.$$

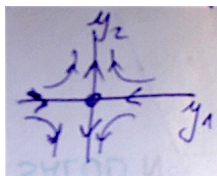
* $A = PDP^{-1}.$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

* A y D representan la misma aplicación lineal, pero en bases distintas de $\mathbb{R}^2$.

* $\boxed{x' = Ax}$ en las nuevas coordenadas $y = (y_1, y_2)^T \rightarrow \boxed{y' = Dy}$ (desacoplado):

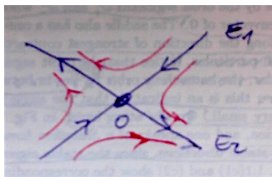
$$\begin{cases} y_1' &= \lambda_1 y_1, \\ y_2' &= \lambda_2 y_2. \end{cases}$$



Ejemplo (cont.)

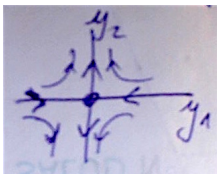
- * $x' = Ax$

- * $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.



- * $y' = Dy$

$$\begin{cases} y'_1 &= \lambda_1 y_1, \\ y'_2 &= \lambda_2 y_2. \end{cases}$$



* Los sistemas $x' = Ax$ y $y' = Dy$ son cualitativamente equivalentes

* Uno es una versión “distorsionada” del otro, luego de aplicar el cambio de coordenadas lineal invertible P .

* **Spoiler:** Para cada uno de los casos vistos en las clases anteriores, podemos hallar un cambio de coordenadas lineal P tal que $x' = Ax$ se pueda escribir en alguna de las siguientes formas equivalentes (¡y más simples!):

(i) $y' = Dy$ (D matriz diagonal de A),

(ii) $y' = Jy$ (J matriz de Jordan de A).

Conjugación: relación de equivalencia entre sistemas lineales

* Dos sistemas lineales

$$* \boxed{x' = Ax} \text{ y } \boxed{x' = Bx}.$$

* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$* \boxed{\varphi(t, x) = e^{tA}x} \text{ y } \boxed{\psi(t, x) = e^{tB}x}$$

soluciones por $(0, x)$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

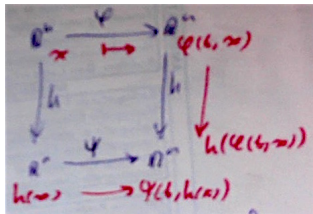
* φ y ψ son **conjugadas** si existe una biyección

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

(no necesariamente lineal), llamada **conjugación**, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, y para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Es decir, $h \circ \varphi = \psi \circ h$.



* Si h es un isomorfismo lineal, o un C^r -difeomorfismo, o un homeomorfismo $\rightarrow x' = Ax$ y $x' = Bx$ son **linealmente conjugados**, **C^r -conjugados**, o **topológicamente conjugados**, resp.

* h : cambio de coordenadas que preserva el parámetro t de cada curva solución.

* Una solución de $x' = Ax$ es llevada por h a una solución de $x' = Bx$ con las mismas propiedades dinámicas.

Ejemplos

1) $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, donde los valores propios de A son reales y distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Entonces, el sistema es linealmente conjugado al sistema desacoplado

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x.$$

2) Análogamente, si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ son los valores propios de A , entonces $x' = Ax$ es linealmente conjugado a

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x.$$

3) Por último, si los valores propios de A son reales e iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ con multiplicidad geométrica 1, entonces $x' = Ax$ es linealmente conjugado a

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x.$$

Más ejemplos

Un centro no puede ser conjugado a una silla.

Razón.

- * Centro: $\varphi(2\pi/\beta, x) = x$, pues todas las soluciones, excepto el origen, son periódicas con período $T = 2\pi/\beta$.
- * Sea $\psi(t, x)$ la solución del sistema con un punto silla.
- * Supongamos que existe una conjugación h . Luego:

$$\begin{aligned}h(x) &= h(\varphi(2\pi/\beta, x)) \\ &= \psi(2\pi/\beta, h(x)),\end{aligned}$$

es decir, $y = \psi(2\pi/\beta, y)$.

→ hay soluciones periódicas en una vecindad del punto silla, lo que es una contradicción (!).

Y otro más...

Los sistemas unidimensionales $\boxed{x' = x}$ y $\boxed{x' = \lambda x}$, con $\lambda > 0$, y $x \in \mathbb{R}$, son topológicamente conjugados.

Razón.

* Sean $\varphi(t, x) = e^t x$ y $\psi(t, x) = e^{\lambda t} x$ sus soluciones.

* Entonces

$$h(x) = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -(-x)^\lambda, & x < 0, \end{cases}$$

es una conjugación topológica.

* De hecho, para $x > 0$ se tiene

$$h(\varphi(t, x)) = h(e^t x) = e^{\lambda t} x^\lambda = e^{\lambda t} h(x) = \psi(t, h(x)).$$

* Para $x < 0$, es similar; y para $x = 0$, es trivial.

* Es claro que si $\lambda \neq 1$, h no es un difeomorfismo.

Gracias a que una conjugación define una clase de equivalencia entre sistemas lineales, las nociones de *atractor* o *repulsor* dadas en las clases anteriores están bien definidas y pueden formalizarse de una manera muy simple.

Definición

Sea un sistema lineal $x' = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^n$. El origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ se dice un **atractor** del sistema si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = \mathbf{0}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Análogamente, el origen se dice un **repulsor** del sistema si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA}x = \mathbf{0}.$$

Proposición

- * Sup. $x' = Ax$ y $x' = Bx$, con $x \in \mathbb{R}^n$, son topológicamente conjugados.
- * Entonces, $0 \in \mathbb{R}^n$ es un atractor de $x' = Ax$ (resp. repulsor) si y solo si también es un atractor (resp. repulsor) de $x' = Bx$.

DEMOSTRACIÓN.

Idea: Conjugación h

- lleva equilibrio de uno en equilibrio del otro,
- y preserva la orientación de las curvas solución, parametrizadas por la variable independiente t .
- * Si h es una conjugación, se tiene $e^{tA}x = h^{-1}(e^{tB}h(x))$.

- * Supongamos que $0 \in \mathbb{R}^n$ es un atractor de $x' = Ax$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = \lim_{t \rightarrow \infty} h^{-1}(e^{tB}h(x)) \\ &= h^{-1}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tB}h(x)\right), \end{aligned}$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, pues h es un homeomorfismo.

- * Sea $y = h(x)$, entonces, $0 = h(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{tB}y$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$.
- * Por lo tanto, $0 \in \mathbb{R}^n$ también es un atractor de $x' = Bx$.
- * Caso repulsor: Análogo.



Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *El origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ del sistema $x' = Ax$ es un atractor.*
2. *Todos los valores propios de A tienen parte real negativa.*
3. *Existen constantes $\mu > 0$ y $K \geq 1$ tales que $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.*
4. *El sistema $x' = Ax$ es topológicamente conjugado a $x' = -x$.*

Intuitivamente: Consecuencia natural de resultados y conceptos de esta clase y las anteriores.

Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *El origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ del sistema $x' = Ax$ es un repulsor.*
2. *Todos los valores propios de A tienen parte real positiva.*
3. *Existen constantes $\mu > 0$ y $K \geq 1$ tales que $|e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.*
4. *El sistema $x' = Ax$ es topológicamente conjugado a $x' = x$.*

Obs: Ambas demostraciones son análogas entre sí; y aunque no son difíciles de seguir, contienen pasos técnicos algo extensos y laboriosos, por lo que las omitimos. Pueden verse en las referencias del curso.