Introducción a la Modelación Matemática

Pablo Aguirre
Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

IWG101 Introducción a la Ingeniería - 2019

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

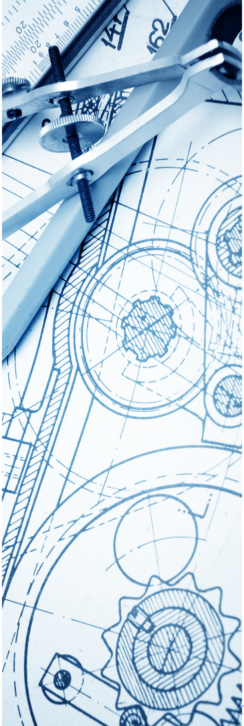
UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Matemáticas en Ingeniería

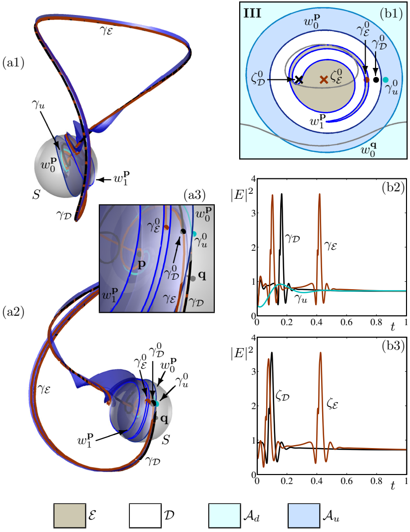
Ingeniería:

- Arte de crear y mejorar nuestro ambiente.

  - Planificación, diseño, construcción, control, etc.
  - Matemáticas presentes en ingeniería aeroespacial, electrónica, mecánica, informática, etc.
  - Matemática como nexo entre Ingeniería + otras disciplinas (medicina, biología, neurociencias).



¿Qué es la ingeniería matemática?

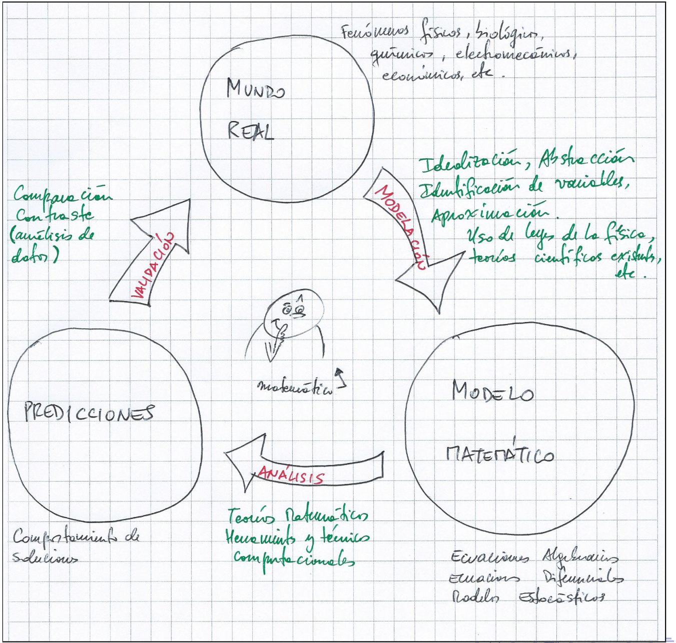


Ingeniería Matemática:

- "Arma secreta" para el diseño y análisis de sistemas del mundo real.
  - Puente a escala funciona perfectamente, pero oscila peligrosamente cuando se construye.
  - Mecanismos del motor de turbinas de viento se agitan y se desgastan de forma que no se pueden instalar a gran escala.
  - Redes de neuronas en el cerebro humano pueden oscilar en forma anormal provocando ataques epilépticos.

Ingeniería Matemática nos ayuda a entender, predecir y controlar estos comportamientos, y a crear soluciones originales e innovadoras.

¿Qué es lo que hace un ingeniero matemático?

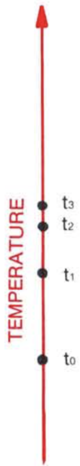


Pasos iniciales para modelar

1. Observar un sistema u organismo (físico, biológico, social, etc) en diferentes estados.
2. Los estados no se pueden describir/explicar tan solo con unas pocas variables o parámetros.
3. Pero pretendemos que sí se puede, pues resulta útil !!!
4. Idealización: Nos lleva a definir un espacio de estados del modelo. El conjunto de todos los posibles estados del sistema.
5. Diferentes modelos pueden tener distintos espacios de estado.

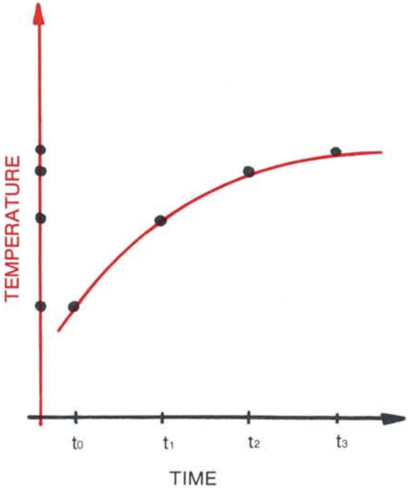
Recta real: el espacio de estados más sencillo

El sistema toma diferentes estados en el tiempo



Si observamos la Temperatura por un tiempo, probablemente cambiará.
Podemos etiquetar los diferentes valores según el instante de observación.
Decimos que el espacio de estados (y el modelo) es unidimensional.

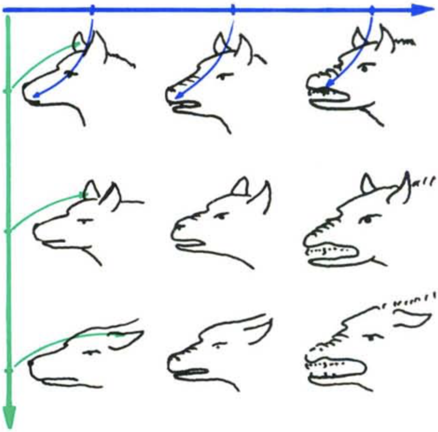
Serie temporal



Los datos forman una *serie temporal* de observaciones.
Gráfico: Espacio de estados (vertical) vs Tiempo (horizontal).

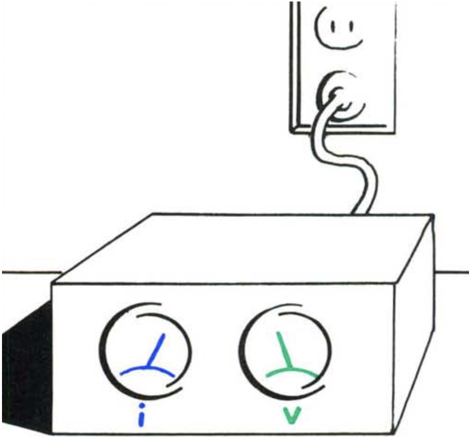
¿Y si un solo parámetro observado NO es suficiente para describir el fenómeno de interés?
Es decir, un modelo unidimensional no logra capturar todas las propiedades deseadas...

Estado emocional de un perro



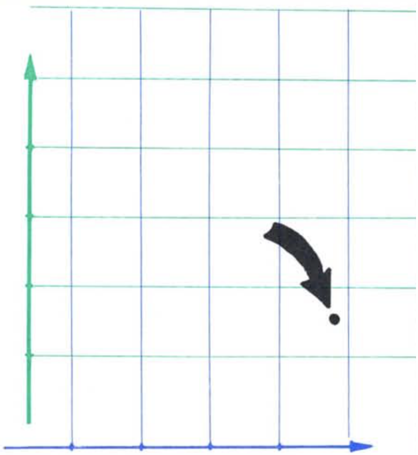
Dos variables observados:
Posición de las orejas (miedo) vs Exposición de colmillos (enojo).

Datos experimentales



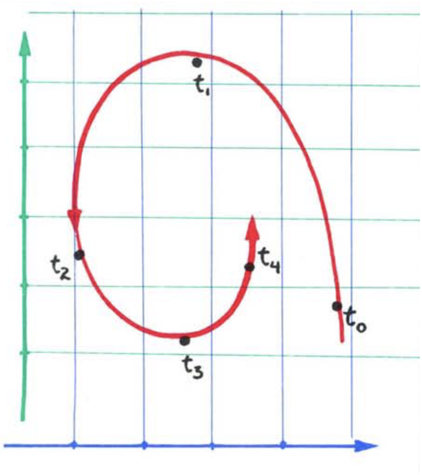
Aparato electrónico. Dos variables observadas que cambian en el tiempo: Corriente (i) vs Voltaje (V).

Trayectorias en espacio de estados



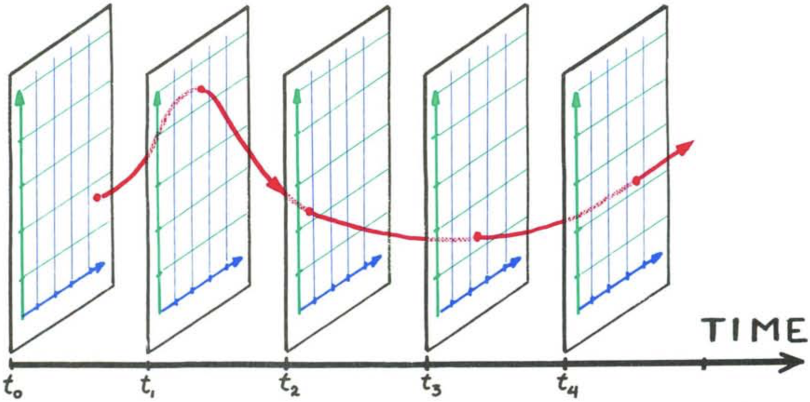
Los valores de dos variables numéricas se puede representar como **un punto** en un espacio de estados bidimensional:
El plano euclidiano o $\mathbb{R}^2$.

Espacio de estados: Plano $\mathbb{R}^2$ (modelo bidimensional)



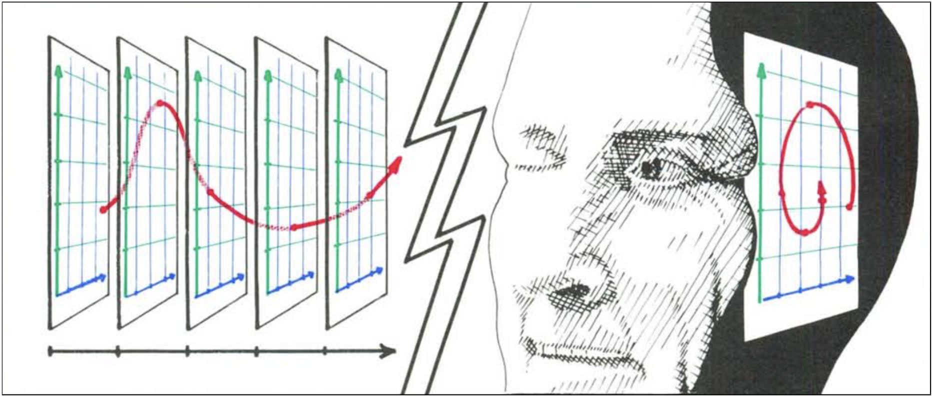
Si las dos variables se observan en tiempos sucesivos y se colocan en el espacio de estados, obtenemos una trayectoria del modelo.

Serie temporal de la trayectoria

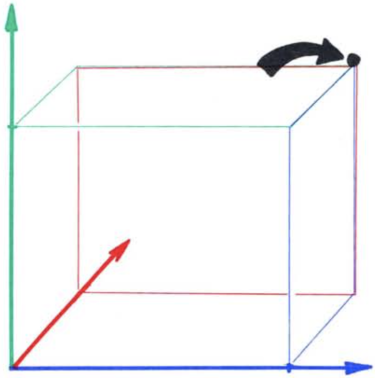


Espacio de estados (planos verticales) vs Tiempo (eje horizontal).

Representaciones equivalentes

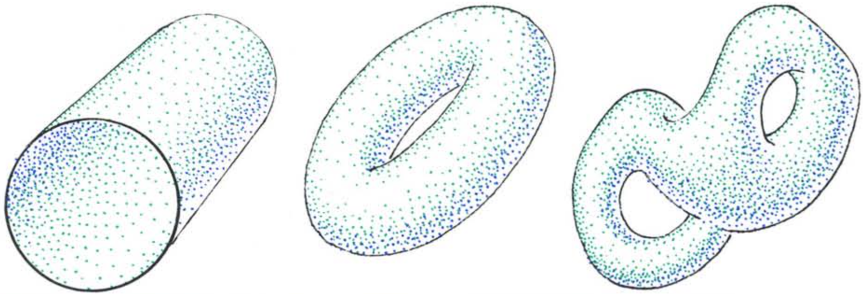


Espacio de estados: $\mathbb{R}^3$ (modelo tridimensional)



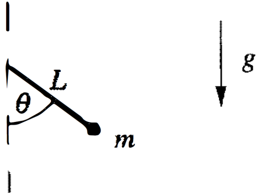
Observar más variables nos lleva a modelos en dimensiones mayores...

Espacios de estados "exóticos"



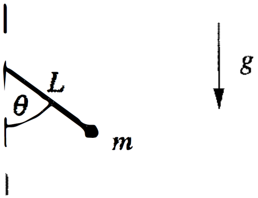
Muchos fenómenos requieren espacios de estado más "complicados", llamados **variedades** (manifolds).
Uno puede pensar en estas variedades como pedazos de espacios "planos" cortados, doblados, torcidos, y pegados nuevamente.

Ejemplo: El péndulo simple



- **Fenómeno:** Oscilaciones de un péndulo de largo L y masa m.

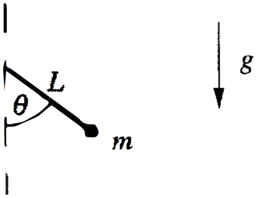
Modelación



- **2da Ley de Newton:** $\boxed{F = ma}$
  Fuerzas involucradas: Gravedad, Tensión.
  Variables: t Tiempo; θ Ángulo.
  Idealización: No hay roce con el aire. Varilla rígida (sin masa). Todo la masa está concentrada en el extremo.
- **Abstracción matemática:**
  Sea $\theta(t)$: Amplitud angular en el instante t.
  $\frac{d\theta}{dt}$: Velocidad angular. $\frac{d^2\theta}{dt^2}$: Aceleración.
- **Modelo:**
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0.$$

Incógnita: $\theta = \theta(t)$.

Análisis matemático



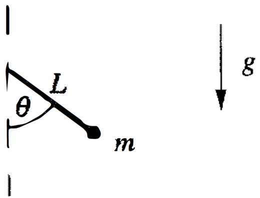
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0.$$

- Introducimos
  Frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$,
  Nueva escala temporal $\tau = \omega t$.
- La ecuación se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin(\theta) = 0.$$

Incógnita: $\theta = \theta(\tau)$.

Análisis matemático (cont.)



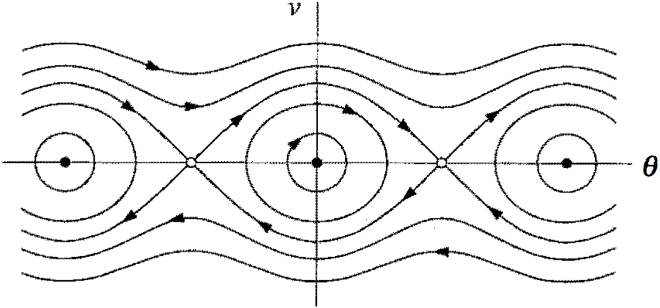
$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin(\theta) = 0.$$

- Introducimos
  Velocidad angular $v = \frac{d\theta}{d\tau}$.
- El modelo se transforma en un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} & = & v, \\ \frac{dv}{d\tau} & = & -\sin(\theta). \end{cases}$$

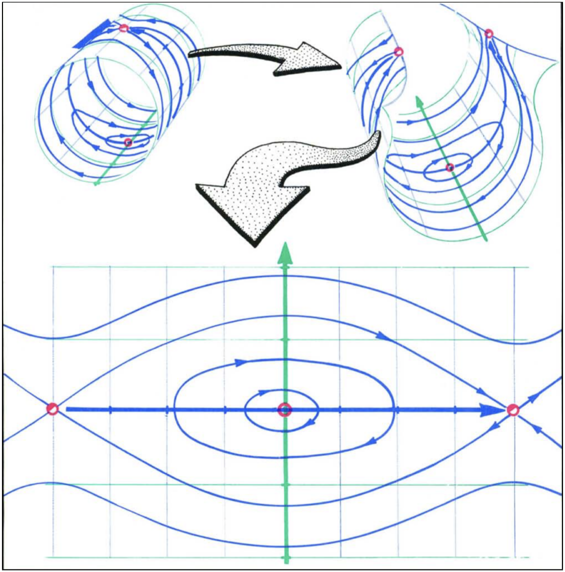
Incógnitas: $\theta = \theta(\tau), v = v(\tau)$.

Análisis del comportamiento de las soluciones



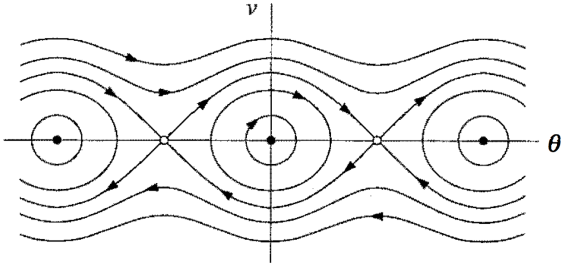
- **Representación de soluciones:**
  Retrato de fase,
  trayectorias en el plano (θ, v).

Espacio de estados es un cilindro!!!!



¡Un retrato de fase contiene mucha información!

Interpretación física



- **Punto central:** $(\theta, v) = (0, 0)$ Estado de equilibrio, péndulo en reposo colgando hacia abajo.
- **Órbitas cerradas alrededor del centro:** Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio. Movimientos periódicos de pequeña amplitud.
- **Puntos blancos:** $(\theta, v) = (\pm\pi, 0)$. Péndulo invertido.
- **Conexiones entre $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$:** Péndulo realiza una vuelta completa desde y hacia la posición invertida.
- **Órbitas exteriores:** Oscilaciones de gran amplitud por sobre la posición invertida.
- **Validación y generalización:** ¿Y si consideramos roce con el aire?

En conclusión...

Ingeniería Matemática: "Arma secreta" para el diseño, modelación y análisis de sistemas del mundo real.

El estudio de modelos matemáticos nos ayuda a entender, predecir y controlar estos sistemas, y a crear soluciones originales e innovadoras.

Misión: **Resolver problemas** transformando ideas abstractas en aplicaciones reales.

Imágenes tomadas de:
[**Abraham & Shaw,** *Dynamics: The Geometry of Behavior*, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1992.]
[**Strogatz,** *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd edition, CRC Press, 2014.]

Nuestro curso: Introducción a la Ingeniería Matemática IWG–101

Web oficial:
http://paguirre.mat.utfsm.cl/iwg101-2019.html

- Introducción elemental al mundo de la Ingeniería Matemática a través de la modelación matemática de sistemas dinámicos.
- Énfasis en la deducción y construcción de modelos simples, demostración de propiedades, resolución analítica y numérica, y comunicación de resultados.
- Pre-requisitos: Matemática escolar, incorporando las nuevas herramientas y técnicas aprendidas en paralelo en las asignaturas del primer semestre (Álgebra & Geometría, Introducción al Cálculo, Programación).
- Además, con la ayuda de una simple calculadora programable y/o una planilla de cálculo (excel), realizaremos nuestros propios experimentos con modelos de sistemas dinámicos.

Hashtags RRSS: #icmatusm #mathmodelling #appliedmaths #wearenotpure

Contenidos

1. **Introducción a la modelación matemática**: Hipótesis de modelación, identificación de variables y relaciones matemáticas, análisis y resolución del modelo, validación, generalización. Ejemplos en finanzas. Modelos estáticos vs sistemas que evolucionan en el tiempo (dinámicos).
2. **Modelos dinámicos discretos unidimensionales**: Iteración de funciones, órbitas, puntos fijos (equilibrios), órbitas periódicas. Análisis gráfico, estabilidad. Sucesiones, límites y convergencia. Principio de inducción. Ejemplos en ecología. Estimación de parámetros en un modelo. Ejemplos de caos.
3. **Modelos dinámicos discretos bidimensionales**: Ejemplos de modelos lineales y nolineales. Notación matricial, álgebra elemental de matrices, valores y vectores propios, estabilidad en modelos lineales.
4. **Modelos dinámicos unidimensionales a tiempo continuo**: Ecuaciones diferenciales, puntos de equilibrio, análisis cualitativo y estabilidad.
5. **Programación lineal**: Formulación de problemas de optimización lineal, aplicaciones. Resolución gráfica.

Bibliografía

Textos Primarios
- R. Devaney, *Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics*, Addison-Wesley, 1990.
- S. Grossman & J. J. Flores Godoy, *Álgebra Lineal*, 7ma edición, Editorial McGraw-Hill, 2012.
- E. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, volúmenes I y II, Editorial Limusa, 1994.
- J. T. Sandefur, *Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications*, Oxford University Press, 1990.

Textos Complementarios
- R. H. Abraham & C. D. Shaw, *Dynamics: The Geometry of Behavior*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1992.
- K. T. Alligood, T. Sauer & J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1996.
- R. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments*, Westview Press, 1992.
- R. H. Enns, *It's a Nonlinear World*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, 2011.
- P. Gajardo, *Modelando Fenómenos de Evolución*, JC. Saez Editor, 2011.
- G. James, *Advanced Modern Engineering Mathematics*, 4th edition, Prentice Hall, 2011.

Evaluación

Todas las evaluaciones se rendirán en horario de clases.

Certamen 1 (C_1): Miércoles 24 Abril.
Certamen 2 (C_2): Miércoles 26 Junio.
Exposiciones finales (E): Lunes 1 & Miércoles 3 Julio.

Nota final:

$$NF = \frac{C_1 + C_2 + E}{3}$$