La Función de Melnikov asociada a Funciones Polinomiales de Morse Real

Marco Uribe S.,

Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de la Ssma. Concepción

Encuentro de Sistemas Dinámicos
Universidad Técnica Federico Santa María
12 y 13 Septiembre , 2013

Contents

Outline

CAMPO DE VECTORES HAMILTONIANO

Consideremos una perturbación del Campo de Vectores Hamiltoniana en el plano siguiente:

$$X_\varepsilon : \begin{cases} \dot{x} = H_y(x,y) + \varepsilon P(x,y,\varepsilon), \\ \dot{y} = -H_x(x,y) + \varepsilon Q(x,y,\varepsilon), \end{cases}$$

H, P, Q : polinomios reales , ε : pequeño parámetro real

$\sum \subseteq \mathbb{R}$: intervalo abierto, en el conjunto de niveles de H.

$\{H = t\}, t \in \sum$: contiene una familia continua de órbitas periódicas.

CAMPO DE VECTORES HAMILTONIANO

Consideremos una perturbación del Campo de Vectores Hamiltoniana en el plano siguiente:

$$X_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & H_y(x,y) + \varepsilon P(x,y,\varepsilon), \\ \dot{y} & = & -H_x(x,y) + \varepsilon Q(x,y,\varepsilon), \end{array} \right.$$

H, P, Q : polinomios reales , ε : pequeño parámetro real

$\sum \subseteq \mathbb{R}$: intervalo abierto, en el conjunto de niveles de H.

$\{H = t\}, t \in \sum$: contiene una familia continua de órbitas periódicas.

CAMPO DE VECTORES HAMILTONIANO

Consideremos una perturbación del Campo de Vectores Hamiltoniana en el plano siguiente:

$$X_\varepsilon : \begin{cases} \dot{x} & = & H_y(x,y) + \varepsilon P(x,y,\varepsilon), \\ \dot{y} & = & -H_x(x,y) + \varepsilon Q(x,y,\varepsilon), \end{cases}$$

H, P, Q : polinomios reales , ε : pequeño parámetro real

$\sum \subseteq \mathbb{R}$: intervalo abierto, en el conjunto de niveles de H.

$\{H = t\}, t \in \sum$: contiene una familia continua de órbitas periódicas.

Outline

PROBLEMA 16 DE HILBERT Cuál es el número de ciclos límites y la posición relativa de ellos para el sistema perturbado X_ε.

Aplicación Primer Retorno

La aplicación primer retorno de Poincaré es:

$$\begin{array}{rccl} P_\varepsilon : & \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ & t & \longmapsto & P_\varepsilon(t) = \text{El primer retorno en } \Sigma \\ & & & \text{de la órbita } \delta_\varepsilon(t) \end{array}$$

y la función desplazamiento asociada a P_ε es:

$$\Delta_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t) - t$$

Problema 16 de Hilbert Cuál es el número de ciclos límites y la posición relativa de ellos para el sistema perturbado X_ε.

Aplicación Primer Retorno

La aplicación primer retorno de Poincaré es:

$$\begin{array}{rccl} P_\varepsilon : & \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ & t & \longmapsto & P_\varepsilon(t) = \text{El primer retorno en } \Sigma \\ & & & \text{de la órbita } \delta_\varepsilon(t) \end{array}$$

y la función desplazamiento asociada a P_ε es:

$$\Delta_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t) - t$$

Problema 16 de Hilbert Cuál es el número de ciclos límites y la posición relativa de ellos para el sistema perturbado X_ε.

Aplicación Primer Retorno

La aplicación primer retorno de Poincaré es:

$$\begin{array}{rccl} P_\varepsilon : & \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ & t & \longmapsto & P_\varepsilon(t) = \text{El primer retorno en } \Sigma \\ & & & \text{de la órbita } \delta_\varepsilon(t) \end{array}$$

y la función desplazamiento asociada a P_ε es:

$$\Delta_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t) - t$$

Problema 16 de Hilbert Cuál es el número de ciclos límites y la posición relativa de ellos para el sistema perturbado X_ε.

Aplicación Primer Retorno

La aplicación primer retorno de Poincaré es:

$$\begin{array}{rccl} P_\varepsilon : & \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ & t & \longmapsto & P_\varepsilon(t) = \text{El primer retorno en } \Sigma \\ & & & \text{de la órbita } \delta_\varepsilon(t) \end{array}$$

y la función desplazamiento asociada a P_ε es:

$$\Delta_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t) - t$$

PROPOSICIÓN

La función desplazamiento cerca de valores regulares de t tienen un desarrollo asintótico para pequeños valores del parámetro t

$$\Delta_\varepsilon(t) = \varepsilon M_1(t) + \varepsilon^2 M_2(t) + \varepsilon^3 M_3(t) + \ldots,$$

Las funciones $M_\ell(t)$ son llamadas funciones de Melnikov

La primera función no nula $M_k(t)$ es llamada la Parte Principal.

Corolario

Si $t \sim t_0$, con t_0 un valor regular de H y si la función desplazamiento Δ_ε no es idénticamente nula, entonces $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta_\varepsilon(t) = \varepsilon^k M_k(t) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Si $k = 1$, entonces $M_1(t) = -\int_{\delta(t)} \omega_{P,Q}$ que es una intergral abeliana.

Si $k \neq 1$, entonces $M_k(t)$, en general, no es una integral abeliana.

COROLARIO

Si $t \sim t_0$, con t_0 un valor regular de H y si la función desplazamiento Δ_ε no es idénticamente nula, entonces $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta_\varepsilon(t) = \varepsilon^k M_k(t) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Si $k = 1$, entonces $M_1(t) = -\int_{\delta(t)} \omega_{P,Q}$ que es una intergral abeliana.

Si $k \neq 1$, entonces $M_k(t)$, en general, no es una integral abeliana.

Corolario

Si $t \sim t_0$, con t_0 un valor regular de H y si la función desplazamiento Δ_ε no es idénticamente nula, entonces $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta_\varepsilon(t) = \varepsilon^k M_k(t) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Si $k = 1$, entonces $M_1(t) = -\int_{\delta(t)} \omega_{P,Q}$ que es una intergral abeliana.

Si $k \neq 1$, entonces $M_k(t)$, en general, no es una integral abeliana.

Theorem (Gavrilov- Iliev 2005)

El número k y la función Parte Principal $M_k(t)$ depende de la foliación X_ε y de la clase de homotopía libre del óvalo $\delta(t)$. Además $M_k(t)$ es una extensión analítica sobre $\mathbb{C} \setminus \triangle$, donde $\triangle$ es el conjunto de valores atípicos del Hamiltoniano H.

Theorem (Gavrilov- Iliev 2005)

- Si $H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ es de dimensión finita, entonces la función parte principal $M_k(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

donde $n \leq dim H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ y $a_i(t)$ son funciones analíticas en $\mathbb{C} \setminus \triangle$.

- Si, además, $M_k(t)$ es una función a crecimiento moderado en $t_i \in \triangle$ y en $t = \infty$, entonces la ecuación es de tipo Fuchs.
- Si agregamos la hipótesis que, la aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z}) \to H_1(F_t, \mathbb{Z})$$

es inyectiva, entonces $M_k(t)$ es una integral abeliana

Theorem (Gavrilov- Iliev 2005)

- Si $H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ es de dimensión finita, entonces la función parte principal $M_k(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

donde $n \leq dim H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ y $a_i(t)$ son funciones analíticas en $\mathbb{C} \setminus \triangle$.

- Si, además, $M_k(t)$ es una función a crecimiento moderado en $t_i \in \triangle$ y en $t = \infty$, entonces la ecuación es de tipo Fuchs.
- Si agregamos la hipótesis que, la aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z}) \to H_1(F_t, \mathbb{Z})$$

es inyectiva, entonces $M_k(t)$ es una integral abeliana

Theorem (Gavrilov- Iliev 2005)

- Si $H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ es de dimensión finita, entonces la función parte principal $M_k(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

donde $n \leq dim H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ y $a_i(t)$ son funciones analíticas en $\mathbb{C} \setminus \triangle$.

- Si, además, $M_k(t)$ es una función a crecimiento moderado en $t_i \in \triangle$ y en $t = \infty$, entonces la ecuación es de tipo Fuchs.
- Si agregamos la hipótesis que, la aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z}) \to H_1(F_t, \mathbb{Z})$$

es inyectiva, entonces $M_k(t)$ es una integral abeliana

Theorem (Gavrilov- Iliev 2005)

- Si $H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ es de dimensión finita, entonces la función parte principal $M_k(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

  donde $n \leq dim H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z})$ y $a_i(t)$ son funciones analíticas en $\mathbb{C} \setminus \triangle$.
- Si, además, $M_k(t)$ es una función a crecimiento moderado en $t_i \in \triangle$ y en $t = \infty$, entonces la ecuación es de tipo Fuchs.
- Si agregamos la hipótesis que, la aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(F_t, \mathbb{Z}) \to H_1(F_t, \mathbb{Z})$$

  es inyectiva, entonces $M_k(t)$ es una integral abeliana

Ejemplo 1: Consideremos la función Hamiltoniana

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{(x^2-1)^2}{4}$$

y denotemos por $\delta_e(t)$, $\delta_l(t)$, $\delta_r(t)$ las familias continuas exterior, izquierda y derecha de la fibra general.

Proposición

- $H_1^{\delta_l(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1^{\delta_r(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^3$.
- $H_1^{\delta_e(t)}(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^2$.
- La aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(H_t,\mathbb{Z})\to H_1(H_t,\mathbb{Z})$$

es inyectiva.

Ejemplo 1: Consideremos la función Hamiltoniana

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{(x^2-1)^2}{4}$$

y denotemos por $\delta_e(t)$, $\delta_l(t)$, $\delta_r(t)$ las familias continuas exterior, izquierda y derecha de la fibra general.

Proposición

- $H_1^{\delta_l(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1^{\delta_r(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^3$.
- $H_1^{\delta_e(t)}(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^2$.
- La aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(H_t,\mathbb{Z})\to H_1(H_t,\mathbb{Z})$$

es inyectiva.

Ejemplo 1: Consideremos la función Hamiltoniana

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{(x^2-1)^2}{4}$$

y denotemos por $\delta_e(t)$, $\delta_l(t)$, $\delta_r(t)$ las familias continuas exterior, izquierda y derecha de la fibra general.

Proposición

- $H_1^{\delta_l(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1^{\delta_r(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^3$.
- $H_1^{\delta_e(t)}(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^2$.
- La aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(H_t,\mathbb{Z})\to H_1(H_t,\mathbb{Z})$$

es inyectiva.

Ejemplo 1: Consideremos la función Hamiltoniana

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{(x^2-1)^2}{4}$$

y denotemos por $\delta_e(t)$, $\delta_l(t)$, $\delta_r(t)$ las familias continuas exterior, izquierda y derecha de la fibra general.

Proposición

- $H_1^{\delta_l(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1^{\delta_r(t)}(H_t,\mathbb{Z})=H_1(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^3$.
- $H_1^{\delta_e(t)}(H_t,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^2$.
- La aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(H_t,\mathbb{Z})\to H_1(H_t,\mathbb{Z})$$

es inyectiva.

Ejemplo 2: Consideremos la función Hamiltoniana

$$H(x,y) = x[y^2 - (x-3)^2]$$

y denotemos por $\delta(t)$, la familia continua de óvalos en la región compacta del triángulo.

Proposición

- $H_1^{\delta(t)}(H_t, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$.
- El núcleo de la aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(H_t, \mathbb{Z}) \to H_1(H_t, \mathbb{Z})$$

es igual $\mathbb{Z}$, por tanto, la aplicación no es inyectiva.

Ejemplo 2: Consideremos la función Hamiltoniana

$$H(x,y) = x[y^2 - (x-3)^2]$$

y denotemos por $\delta(t)$, la familia continua de óvalos en la región compacta del triángulo.

Proposición

- $H_1^{\delta(t)}(H_t,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$.
- El núcleo de la aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(H_t,\mathbb{Z}) \to H_1(H_t,\mathbb{Z})$$

es igual $\mathbb{Z}$, por tanto, la aplicación no es inyectiva.

Ejemplo 2: Consideremos la función Hamiltoniana

$$H(x,y) = x[y^2 - (x-3)^2]$$

y denotemos por $\delta(t)$, la familia continua de óvalos en la región compacta del triángulo.

Proposición

- $H_1^{\delta(t)}(H_t, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$.
- El núcleo de la aplicación canónica

$$H_1^{\delta(t)}(H_t, \mathbb{Z}) \to H_1(H_t, \mathbb{Z})$$

es igual $\mathbb{Z}$, por tanto, la aplicación no es inyectiva.

Outline

Theorem (Gavrilov 2005)

La función Parte Principal $M_k(t)$ asociada a la familia continua de óvalos $\delta(t)$ y a perturbaciones polinomiales del Campo de Vectores Hamiltoniano X_ε es una combinación lineal de intergrales iteradas de longitud a lo más k.

- Es bién conocido que: $M_1(t) = \int_{\delta(t)} \omega$.
- Si $M_1 \equiv 0$, entonces $\omega = dA(x,y) + B(x,y)dH + dR(H)$, donde:

$$A(x,y) = \int_{P_0(t)}^{P} \omega, \qquad B(x,y) = -\int_{P_0(t)}^{p} \frac{d\omega}{dH} + R(H).$$

Así

$$M_2(t) = \int_{\delta(t)} B\omega = -\int_{\delta(t)} \omega \int_{P_0(t)}^{p} \omega'$$

- Si $M_2 \equiv 0$, entonces

$$M_3(t) = \int_{\delta(t)} \omega \int_{P_0(t)}^{p} \frac{d}{dH}(\omega \int_{P_0(t)}^{q} \omega').$$

- Es bién conocido que: $M_1(t) = \int_{\delta(t)} \omega$.
- Si $M_1 \equiv 0$, entonces $\omega = dA(x,y) + B(x,y)dH + dR(H)$, donde:

$$A(x,y) = \int_{P_0(t)}^{P} \omega, \qquad B(x,y) = -\int_{P_0(t)}^{p} \frac{d\omega}{dH} + R(H).$$

Así

$$M_2(t) = \int_{\delta(t)} B\omega = -\int_{\delta(t)} \omega \int_{P_0(t)}^{p} \omega'$$

- Si $M_2 \equiv 0$, entonces

$$M_3(t) = \int_{\delta(t)} \omega \int_{P_0(t)}^{p} \frac{d}{dH}(\omega \int_{P_0(t)}^{q} \omega').$$

- Es bién conocido que: $M_1(t) = \int_{\delta(t)} \omega$.
- Si $M_1 \equiv 0$, entonces $\omega = dA(x,y) + B(x,y)dH + dR(H)$, donde:

$$A(x,y) = \int_{P_0(t)}^{P} \omega, \qquad B(x,y) = -\int_{P_0(t)}^{p} \frac{d\omega}{dH} + R(H).$$

Así

$$M_2(t) = \int_{\delta(t)} B\omega = -\int_{\delta(t)} \omega \int_{P_0(t)}^{p} \omega'$$

- Si $M_2 \equiv 0$, entonces

$$M_3(t) = \int_{\delta(t)} \omega \int_{P_0(t)}^{p} \frac{d}{dH}(\omega \int_{P_0(t)}^{q} \omega').$$

Outline

Theorem (Francoise, Pelletier 2006)

La función Parte Principal $M_k(t)$, $k \geq 1$ puede ser escrita como una suma de integrales de formas $g_{k-1}\omega$ y combinaciones polinomiales de todas las funciones de Melnikov $M_1(t), M_2(t), \ldots, M_{k-1}(t)$ y sus derivadas.

- La primera función Parte Principal es:

$$M_1(t) = \int_{\delta(t)} \omega.$$

- La función de Melnikov de segundo orden es:

$$M_2(t) = M_1(t)M_1'(t) - \int_{\delta(t)} g_1\omega.$$

- La primera función Parte Principal es:

$$M_1(t) = \int_{\delta(t)} \omega.$$

- La función de Melnikov de segundo orden es:

$$M_2(t) = M_1(t)M_1'(t) - \int_{\delta(t)} g_1\omega.$$

Theorem (Algoritmo de Francoise)

Si H verifica la condición (*) y si

$$M_1(t) = ... = M_{k-1}(t) = 0\ ;\ M_k(t) \neq 0$$

entonces existen polinomios en $\mathbb{C}$: $g_1, ..., g_{k-}$ y $f_1, ..., f_{k-1}$ tales que

$$\omega = g_1 dH + df_1,$$

$$g_1\omega = g_2 dH + df_2,$$

$$\vdots$$

$$g_{k-1}\omega = g_{k-1} dH + df_{k-1}$$

$$M_k(t) = (-1)^k \int_{\delta(t)} g_{k-1}\omega.$$

Condición star de Francoise

Condition $(*)$: $\forall\omega$ 1-forma polinomial:

$$\int_{\delta(t)} \omega = 0 \Longleftrightarrow \exists g, f \in \mathbb{C}[x,y] : \omega = gdH + df.$$

- La condición (*) se verifica genéricamente en el espacio de las funciones hamiltonianas. Por tanto, $M_k(t)$ es genéricamente una integral abeliana.
- Si H es no genérico entonces $M_k(t) = ?$ (Abierto en general).

Condición star de Francoise

Condition $(*)$: $\forall\omega$ 1-forma polinomial:

$$\int_{\delta(t)} \omega = 0 \Longleftrightarrow \exists g, f \in \mathbb{C}[x,y] : \omega = gdH + df.$$

- La condición (*) se verifica genéricamente en el espacio de las funciones hamiltonianas. Por tanto, $M_k(t)$ es genéricamente una integral abeliana.
- Si H es no genérico entonces $M_k(t) =?$ (Abierto en general).

Outline

Ejemplo 3: Consideremos el Hamiltoniano H, formado por un producto de rectas en posición general

$$H(x,y) = f_0(x,y) f_1(x,y) \ldots f_d(x,y). \tag{5.1}$$

El nivel cero está formado por la unión de $(d+1)$ rectas,

$$\ell_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_k(x,y) = 0\} \; ; \; k = 0, \ldots, d. \tag{5.2}$$

- Las rectas ℓ_k son distintas, no paralelas y tres de ellas no pasan por el mismo punto.
- Los puntos críticos de H pertenecen al plano real.
- El número de puntos críticos de H es: d^2, donde $a_1 = \frac{d(d-1)}{2}$ son centros y $a_2 = \frac{d(d+1)}{2}$ son sillas.
- Suponemos (hipótesis genericidad) que todos los valores críticos son diferentes.

Ejemplo 3: Consideremos el Hamiltoniano H, formado por un producto de rectas en posición general

$$H(x,y) = f_0(x,y)f_1(x,y)...f_d(x,y). \tag{5.1}$$

El nivel cero está formado por la unión de $(d+1)$ rectas,

$$\ell_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_k(x,y) = 0\} \ ; \ k = 0, ..., d. \tag{5.2}$$

- Las rectas ℓ_k son distintas, no paralelas y tres de ellas no pasan por el mismo punto.
- Los puntos críticos de H pertenecen al plano real.
- El número de puntos críticos de H es: d^2, donde $a_1 = \frac{d(d-1)}{2}$ son centros y $a_2 = \frac{d(d+1)}{2}$ son sillas.
- Suponemos (hipótesis genericidad) que todos los valores críticos son diferentes.

Ejemplo 3: Consideremos el Hamiltoniano H, formado por un producto de rectas en posición general

$$H(x,y) = f_0(x,y)f_1(x,y)...f_d(x,y). \tag{5.1}$$

El nivel cero está formado por la unión de $(d+1)$ rectas,

$$\ell_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_k(x,y) = 0\} \; ; \; k = 0, ..., d. \tag{5.2}$$

- Las rectas ℓ_k son distintas, no paralelas y tres de ellas no pasan por el mismo punto.
- Los puntos críticos de H pertenecen al plano real.
- El número de puntos críticos de H es: d^2, donde $a_1 = \frac{d(d-1)}{2}$ son centros y $a_2 = \frac{d(d+1)}{2}$ son sillas.
- Suponemos (hipótesis genericidad) que todos los valores críticos son diferentes.

Ejemplo 3: Consideremos el Hamiltoniano H, formado por un producto de rectas en posición general

$$H(x,y) = f_0(x,y)f_1(x,y)...f_d(x,y). \tag{5.1}$$

El nivel cero está formado por la unión de $(d+1)$ rectas,

$$\ell_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_k(x,y) = 0\}\ ;\ k = 0,...,d. \tag{5.2}$$

- Las rectas ℓ_k son distintas, no paralelas y tres de ellas no pasan por el mismo punto.
- Los puntos críticos de H pertenecen al plano real.
- El número de puntos críticos de H es: d^2, donde $a_1 = \frac{d(d-1)}{2}$ son centros y $a_2 = \frac{d(d+1)}{2}$ son sillas.
- Suponemos (hipótesis genericidad) que todos los valores críticos son diferentes.

Theorem (U-2009)

La función Parte Principal $M_k(t)$ asociado a una familia de óvalos $\delta(t)$ de una región compacta y asociada a perturbaciones arbitrarias polinomiales de H formado por el producto de $(d+1)$ rectas en posición general, pertenece al $\mathbb{C}[t, 1/t]-$módulo generado por integrales abelianas $I_i(t)$, con $i = 1, ..., 2a_1$ y de integrales tracendentales de tipo logarítmicas $I^*_{i,j}(t) = \int_{\delta(t)} \ln f_i d(\ln f_j)$, con $1 \leq i < j \leq d$.

Theorem (U 2009)

La función Parte Principal $M_k(t)$ es una integral iterada de longitud 2.

Outline

Ejemplo 4: Consideremos $H_\lambda(x, y)$, $\lambda \in [0, 1]$, la familia analítica de hamiltonianos reales, tales que:

- El hamiltoniano H_0 es el producto de $(d + 1)$ rectas en posición general.
- Todos los hamiltonianos H_λ, $\lambda \in [0, 1[$ son de tipo Morse.
- Si $\lambda \in [0, 1[$, entonces H_λ es isomonodrómico a H_1.

Ejemplo 4: Consideremos $H_\lambda(x,y)$, $\lambda \in [0,1]$, la familia analítica de hamiltonianos reales, tales que:

- El hamiltoniano H_0 es el producto de $(d+1)$ rectas en posición general.
- Todos los hamiltonianos H_λ, $\lambda \in [0,1[$ son de tipo Morse.
- Si $\lambda \in [0,1[$, entonces H_λ es isomonodrómico a H_1.

Ejemplo 4: Consideremos $H_\lambda(x,y)$, $\lambda \in [0,1]$, la familia analítica de hamiltonianos reales, tales que:

- El hamiltoniano H_0 es el producto de $(d+1)$ rectas en posición general.
- Todos los hamiltonianos H_λ, $\lambda \in [0,1[$ son de tipo Morse.
- Si $\lambda \in [0,1[$, entonces H_λ es isomonodrómico a H_1.

Hipótesis 1

- Los d puntos al infinito $\ell_k = 0$ son distintos,
- Todos los puntos críticos son de Morse.
- El nivel cero de H_λ es el único nivel que contiene más de un punto crítico.

Hipótesis 2

El espacio vectorial $Orb_M(\delta(t))$ concide con la Homología compacta $H_1^c(H^{-1}(t), \mathbb{Z})$.

Partage genérico en rectas, (Definición de A'Campo)

Hipótesis 1

- Los d puntos al infinito $\ell_k = 0$ son distintos,
- Todos los puntos críticos son de Morse.
- El nivel cero de H_λ es el único nivel que contiene más de un punto crítico.

Hipótesis 2

El espacio vectorial $Orb_M(\delta(t))$ concide con la Homología compacta $H_1^c(H^{-1}(t), \mathbb{Z})$.

Partage genérico en rectas, (Definición de A'Campo)

Hipótesis 1

- Los d puntos al infinito $\ell_k = 0$ son distintos,
- Todos los puntos críticos son de Morse.
- El nivel cero de H_λ es el único nivel que contiene más de un punto crítico.

Hipótesis 2

El espacio vectorial $Orb_M(\delta(t))$ concide con la Homología compacta $H_1^c(H^{-1}(t), \mathbb{Z})$.

Partage genérico en rectas, (Definición de A'Campo)

Hipótesis 1

- Los d puntos al infinito $\ell_k = 0$ son distintos,
- Todos los puntos críticos son de Morse.
- El nivel cero de H_λ es el único nivel que contiene más de un punto crítico.

Hipótesis 2

El espacio vectorial $Orb_M(\delta(t))$ concide con la Homología compacta $H_1^c(H^{-1}(t), \mathbb{Z})$.

Partage genérico en rectas, (Definición de A'Campo)

Hipótesis 1

- Los d puntos al infinito $\ell_k = 0$ son distintos,
- Todos los puntos críticos son de Morse.
- El nivel cero de H_λ es el único nivel que contiene más de un punto crítico.

Hipótesis 2

El espacio vectorial $Orb_M(\delta(t))$ concide con la Homología compacta $H_1^c(H^{-1}(t), \mathbb{Z})$.

Partage genérico en rectas, (Definición de A'Campo)

Theorem (Pelletier and U. 2013)

Si la familia de hamiltonianos $H_\lambda, \lambda \in [0,1[$ verifica las hipótesis 1 y 2, entonces la órbita por monodromía de $\delta(t)$ de la fibra $H_1 = t$ contiene toda la homología compacta de la fibra regular.

THEOREM (PELLETIER AND U. 2013)

Si la familia de hamiltonianos $H_\lambda, \lambda \in [0,1[$ verifica las hipótesis 1 y 2, entonces para $\lambda \neq 0$, existe $r \leq (d+1)$ y funciones $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi r$ tal que:

- Cada función Ψ_k tiene ramificaciones logarítmicas en puntos al infinito de la fibra $H_\lambda^{-1}(t)$ para valores regulares y son univaluados fuera de puntos al infinito.
- La función Parte Principal $M_k(t)$ es calculada como integrales iteradas de longitud a lo más 2 en $\mathbb{C}(t, x, y, \Psi_1, \Psi_2, .., \Psi_r)$

Theorem (Pelletier and U. 2013)

Si la familia de hamiltonianos $H_\lambda, \lambda \in [0,1[$ verifica las hipótesis 1 y 2, entonces para $\lambda \neq 0$, existe $r \leq (d+1)$ y funciones $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi r$ tal que:

- Cada función Ψ_k tiene ramificaciones logarítmicas en puntos al infinito de la fibra $H_\lambda^{-1}(t)$ para valores regulares y son univaluados fuera de puntos al infinito.
- La función Parte Principal $M_k(t)$ es calculada como integrales iteradas de longitud a lo más 2 en $\mathbb{C}(t, x, y, \Psi_1, \Psi_2, .., \Psi_r)$

Theorem (Pelletier and U. 2013)

Si la familia de hamiltonianos $H_\lambda, \lambda \in [0, 1[$ verifica las hipótesis 1 y 2, entonces para $\lambda \neq 0$, existe $r \leq (d+1)$ y funciones $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi r$ tal que:

- Cada función Ψ_k tiene ramificaciones logarítmicas en puntos al infinito de la fibra $H_\lambda^{-1}(t)$ para valores regulares y son univaluados fuera de puntos al infinito.
- La función Parte Principal $M_k(t)$ es calculada como integrales iteradas de longitud a lo más 2 en $\mathbb{C}(t, x, y, \Psi_1, \Psi_2, .., \Psi_r)$

Proposición

Si H es un hamiltoniano real de grado d con d puntos al infinito y tal que:

- Todos los puntos críticos de H son de tipo Morse.
- d puntos críticos están sobre el nivel cero de H.
- Los niveles de H diferentes de cero solo contienen un punto crítico

Entonces existe una familia H_λ que conectado con H y tal en nivel cero es un Partage en el sentido de A'Campo.

Proposición

Si H es un hamiltoniano real de grado d con d puntos al infinito y tal que:

- Todos los puntos críticos de H son de tipo Morse.
- d puntos críticos están sobre el nivel cero de H.
- Los niveles de H diferentes de cero solo contienen un punto crítico

Entonces existe una familia H_λ que conectado con H y tal en nivel cero es un Partage en el sentido de A'Campo.

Proposición

Si H es un hamiltoniano real de grado d con d puntos al infinito y tal que:

- Todos los puntos críticos de H son de tipo Morse.
- d puntos críticos están sobre el nivel cero de H.
- Los niveles de H diferentes de cero solo contienen un punto crítico

Entonces existe una familia H_λ que conectado con H y tal en nivel cero es un Partage en el sentido de A'Campo.

Proposición

Si H es un hamiltoniano real de grado d con d puntos al infinito y tal que:

- Todos los puntos críticos de H son de tipo Morse.
- d puntos críticos están sobre el nivel cero de H.
- Los niveles de H diferentes de cero solo contienen un punto crítico

Entonces existe una familia H_λ que conectado con H y tal en nivel cero es un Partage en el sentido de A'Campo.

Trabajo en Progreso

- Caracterización de la función Parte Principal $M_k(t)$ en el caso de un producto de rectas en posición arbitraria.
- Descripción del espacio dual $H_1^\delta(H^{-1}(t), \mathbb{Z}$ definido por Gavrilov- Iliev y su aplicación a la caracterización de la Parte Principal $M_k(t)$.

Trabajo en Progreso

- Caracterización de la función Parte Principal $M_k(t)$ en el caso de un producto de rectas en posición arbitraria.
- Descripción del espacio dual $H_1^\delta(H^{-1}(t), \mathbb{Z}$ definido por Gavrilov- Iliev y su aplicación a la caracterización de la Parte Principal $M_k(t)$.

Trabajo en Progreso

- Caracterización de la función Parte Principal $M_k(t)$ en el caso de un producto de rectas en posición arbitraria.
- Descripción del espacio dual $H_1^{\delta}(H^{-1}(t), \mathbb{Z}$ definido por Gavrilov- Iliev y su aplicación a la caracterización de la Parte Principal $M_k(t)$.

J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector.* Ergodic Th. and Dynam. Sys. 16 (1996) 87-96.

L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated paht integrals.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math (6) 14 (2005) N4, pag 663-682.

L. Gavrilov, I.D. Iliev, *The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields.* Amer. J. Math., 127 (2005) N6 1153-1190.

J. P. Francoise and M. Pelletier, *Iterated integrals, Gelfand Leray Redisue , and First return Mapping.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N3 (2006) pag. 357-369.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N1 (2006) pag. 109-134.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial pertubations of a product of* $(d+1)$ *straight lines.* Journal of Differential Equation. Vol 246, (2009) pag. 1313-1341.

M. Pelletier and M. Uribe, *The displacement map associated to polynomial perturbations of some nongeneric Hamiltonian.* (Sometido a Nonlinearity (2013)).

J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector.* Ergodic Th. and Dynam. Sys. 16 (1996) 87-96.

L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated paht integrals.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math (6) 14 (2005) N4, pag 663-682.

L. Gavrilov, I.D. Iliev, *The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields.* Amer. J. Math., 127 (2005) N6 1153-1190.

J. P. Francoise and M. Pelletier, *Iterated integrals, Gelfand Leray Redisue , and First return Mapping.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N3 (2006) pag. 357-369.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N1 (2006) pag. 109-134.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial pertubations of a product of* $(d+1)$ *straight lines.* Journal of Differential Equation. Vol 246, (2009) pag. 1313-1341.

M. Pelletier and M. Uribe, *The displacement map associated to polynomial perturbations of some nongeneric Hamiltonian.* (Sometido a Nonlinearity (2013)).

J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector.* Ergodic Th. and Dynam. Sys. 16 (1996) 87-96.

L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated paht integrals.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math (6) 14 (2005) N4, pag 663-682.

L. Gavrilov, I.D. Iliev, *The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields.* Amer. J. Math., 127 (2005) N6 1153-1190.

J. P. Francoise and M. Pelletier, *Iterated integrals, Gelfand Leray Redisue , and First return Mapping.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N3 (2006) pag. 357-369.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N1 (2006) pag. 109-134.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial pertubations of a product of* $(d+1)$ *straight lines.* Journal of Differential Equation. Vol 246, (2009) pag. 1313-1341.

M. Pelletier and M. Uribe, *The displacement map associated to polynomial perturbations of some nongeneric Hamiltonian.* (Sometido a Nonlinearity (2013)).

- J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector.* Ergodic Th. and Dynam. Sys. 16 (1996) 87-96.
- L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated paht integrals.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math (6) 14 (2005) N4, pag 663-682.
- L. Gavrilov, I.D. Iliev, *The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields.* Amer. J. Math., 127 (2005) N6 1153-1190.
- J. P. Francoise and M. Pelletier, *Iterated integrals, Gelfand Leray Redisue , and First return Mapping.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N3 (2006) pag. 357-369.
- M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N1 (2006) pag. 109-134.
- M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial pertubations of a product of* $(d+1)$ *straight lines.* Journal of Differential Equation. Vol 246, (2009) pag. 1313-1341.
- M. Pelletier and M. Uribe, *The displacement map associated to polynomial perturbations of some nongeneric Hamiltonian.* (Sometido a Nonlinearity (2013)).

J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector.* Ergodic Th. and Dynam. Sys. 16 (1996) 87-96.

L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated paht integrals.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math (6) 14 (2005) N4, pag 663-682.

L. Gavrilov, I.D. Iliev, *The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields.* Amer. J. Math., 127 (2005) N6 1153-1190.

J. P. Francoise and M. Pelletier, *Iterated integrals, Gelfand Leray Redisue , and First return Mapping.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N3 (2006) pag. 357-369.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N1 (2006) pag. 109-134.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial pertubations of a product of* $(d+1)$ *straight lines.* Journal of Differential Equation. Vol 246, (2009) pag. 1313-1341.

M. Pelletier and M. Uribe, *The displacement map associated to polynomial perturbations of some nongeneric Hamiltonian.* (Sometido a Nonlinearity (2013)).

J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector.* Ergodic Th. and Dynam. Sys. 16 (1996) 87-96.

L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated paht integrals.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math (6) 14 (2005) N4, pag 663-682.

L. Gavrilov, I.D. Iliev, *The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields.* Amer. J. Math., 127 (2005) N6 1153-1190.

J. P. Francoise and M. Pelletier, *Iterated integrals, Gelfand Leray Redisue , and First return Mapping.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N3 (2006) pag. 357-369.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N1 (2006) pag. 109-134.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial pertubations of a product of* $(d+1)$ *straight lines.* Journal of Differential Equation. Vol 246, (2009) pag. 1313-1341.

M. Pelletier and M. Uribe, *The displacement map associated to polynomial perturbations of some nongeneric Hamiltonian.* (Sometido a Nonlinearity (2013)).

J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector.* Ergodic Th. and Dynam. Sys. 16 (1996) 87-96.

L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated paht integrals.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math (6) 14 (2005) N4, pag 663-682.

L. Gavrilov, I.D. Iliev, *The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields.* Amer. J. Math., 127 (2005) N6 1153-1190.

J. P. Francoise and M. Pelletier, *Iterated integrals, Gelfand Leray Redisue , and First return Mapping.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N3 (2006) pag. 357-369.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle.* Journal of Dynamical and Control Systems. Vol 12, N1 (2006) pag. 109-134.

M. Uribe, *Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial pertubations of a product of* $(d+1)$ *straight lines.* Journal of Differential Equation. Vol 246, (2009) pag. 1313-1341.

M. Pelletier and M. Uribe, *The displacement map associated to polynomial perturbations of some nongeneric Hamiltonian.* (Sometido a Nonlinearity (2013)).