

# Un sistema predador-presa con cinco ciclos límites (locales y globales)

I. Szántó, E. Sáez, E.S.S.

Departamento de Matemáticas  
Universidad de Valparaíso – Chile

Septiembre, 2013

En honor a los 60 años de Prof. Iván Szántó

En [4] los autores estudian una extensión del modelo clásico minimal Daphnia-algas donde, (A) es la población de Algas y (Z) es la población para grandes herbívoros zooplankton:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = rA\left(1 - \frac{A}{K}\right) - Zg\left(\frac{A}{A+h_A}\right) + i(K - A) \\ \frac{dZ}{dt} = egZ\left(\frac{A}{A+h_A}\right) - mZ - F\left(\frac{Z^2}{Z^2+h_Z^2}\right). \end{cases} \quad (1)$$

Los estudios de estos modelos son esencialmente numéricos.

# Introducción

## Los parámetros

Los parámetros en el modelo tienen los siguientes significados:

}	$r$	=	Maximum growth rate of algae
	$K$	=	Carrying capacity of algae
	$g$	=	Maximum grazing rate of zooplankton
	$h_A$	=	Half-saturation functional response of zooplankton
	$i$	=	Diffusive inflow of algae
	$e$	=	Food transfer efficiency of zooplankton
	$m$	=	Loss term of zooplankton
	$h_Z$	=	Half-saturation functional response of fish
}	$T$	=	The planktivorous capacity of the depredation of the zooplankton

Considerando el cambio de notación

$\{A \rightarrow x, Z \rightarrow y, h_A \rightarrow a, h_z \rightarrow b\}$

el campo de vectores original es  $C^\infty$ -equivalente a :

$$X_\mu : \begin{cases} \dot{x} &= \frac{r}{K}x(K-x) - yg\frac{x}{x+a} + i(K-x) \\ \dot{y} &= egy\frac{x}{x+a} - my - F\frac{y^2}{y^2+b^2} \end{cases} \quad (2)$$

donde  $\mu = (r, K, g, a, i, m, F, b) \in \mathbb{R}_+^8$

Sean los siguientes reescalamientos:

$$\{x \rightarrow ax, y \rightarrow by, F \rightarrow bF, e \rightarrow \frac{e}{g}\}$$

El sistema anterior es  $C^\infty$ -equivalente:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= rx\left(1 - \frac{ax}{K}\right) - \frac{bg}{a} \frac{xy}{x+1} + i\left(\frac{K}{a} - x\right) \\ \dot{y} &= e \frac{xy}{x+1} - my - F \frac{y^2}{y^2+1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Más reescalamientos  $\{b \rightarrow b\frac{a}{g}, K \rightarrow aK\}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - b \frac{xy}{x+1} + i(K - x) \\ \dot{y} &= e \frac{xy}{x+1} - my - F \frac{y^2}{y^2+1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Considerando el cambio del tiempo  $\{t \rightarrow t \frac{K}{r}\}$   
el cambio de los parámetros:

$$\left\{ \frac{bK}{r} \rightarrow b, \frac{iK}{r} \rightarrow i, \frac{eK}{r} \rightarrow e, \frac{mK}{r} \rightarrow m, \frac{FK}{r} \rightarrow F \right\}$$

y por último realizando nuevamente el cambio del tiempo  
 $\{t \rightarrow t(x+1)(y^2+1)\}$ , se obtiene el campo polinomial  
 $C^\infty$ -equivalente a seis parámetros:

$$Y_\mu : \begin{cases} \dot{x} &= (y^2 + 1)[x(K - x)(x + 1) - bxy + i(K - x)(x + 1)] \\ \dot{y} &= ey[x(y^2 + 1) - m(x + 1)(y^2 + 1) - Fy(x + 1)] \end{cases} \quad (5)$$

donde  $(x, y) \in \bar{\Omega} = \{(x, y) | x, y \geq 0\}$ ,  $\mu = (K, b, i, e, m, F) \in \mathbb{R}_+^6$ .

# Introducción

Sistema no es de Kolmogorov

En particular  $Y_\mu(0, y) = iK(y^2 + 1) \frac{\partial}{\partial x} - y[m(y^2 + 1) + Fy] \frac{\partial}{\partial y}$

El sistema no es de tipo Kolmogorov, pues el eje  $x = 0$  no es una recta invariante.

El origen del sistema no es singularidad,  $Y_\mu(0, 0) = iK \frac{\partial}{\partial x}$

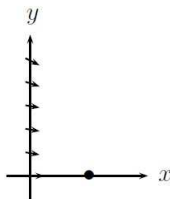


Figure: 1

# Introducción

Existencia de singularidades en  $\Omega$

¿Región en  $\mathbb{R}_+^6$  (espacio de los parámetros) donde existen singularidades del sistema en el abierto  $\Omega$ ?

En el plano  $m/F$ , consideremos las rectas  $\begin{cases} l_1(m, F) = F - 2m \\ l_2(m, F) = F + 2m - 2 \end{cases}$

Obtenemos la región  $\mathfrak{R} = l_1^{-1}(0, \infty) \cap l_2^{-1}(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}_+^2$

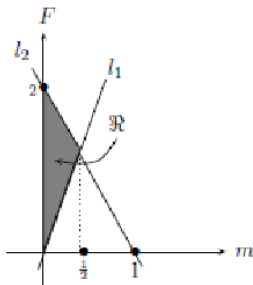


Figure: 2



# Introducción

## Singularidades en $\Omega$

Para el estudio de la existencia y unicidad de singularidades en  $\Omega$ , denotemos por  $(A, B)$  las coordenadas de la singularidad y consideremos el cambio de parámetros:

$$\begin{cases} F &= -\frac{(1+B^2)[A(m-1)+m]}{(1+A)(A+i)(A-K)}, & A(m-1)+m < 0 \\ b &= -\frac{(1+A)(A+i)(A-K)}{AB}, & A < K \end{cases} \quad (6)$$

Observemos que ambas condiciones implican que  $\frac{m}{1-m} < A < K$ .

Introduciendo  $A, B$  como nuevos parámetros en el sistema y cambiando una vez más el tiempo  $\{t \rightarrow AB(1+A)t\}$  se tiene un sistema  $C^\infty$ -equivalente

$$Z_\eta : \begin{cases} \dot{x} &= (1+A)(1+y^2)[AB(K-x)(1+x)(i+x) + (1+A)(A+i)(A-K)xy] \\ \dot{y} &= -Aey[(1+A)B(m+(-1+m)x) - (1+B^2)(A(-1+m)+m)(1+x)y + (1+A)B(m+(-1+m)x)y^2] \end{cases} \quad (7)$$

### Lema 1.

Sea  $(m, F) \in \mathfrak{R}$ .

- (i) Si  $\frac{m}{1-m} < K$ , entonces  $Z_\eta$  tiene al menos una singularidad  $(A, B) \in \Omega$ . Además la singularidad  $(K, 0)$  es una silla hiperbólica con variedad inestable orientada hacia el cuadrante realista  $\Omega$ .
- (ii) Si  $\frac{m}{1-m} = K$ , entonces  $Z_\eta$  no tiene singularidades en  $\Omega$  y la singularidad  $(A, B)$  colapsa con la singularidad  $(K, 0)$ .
- (iii) Si  $\frac{m}{1-m} > K$ , entonces  $Z_\eta$  no tiene singularidades en  $\Omega$ . Además la singularidad la singularidad  $(K, 0)$  es un atractor hiperbólico.

### Lema 2.

Sean  $(m, F) \in \mathfrak{R}$ ,  $\frac{m}{1-m} < K$  y  $(A, B)$  la singularidad del Lema 1. Entonces, existe una vecindad en el espacio de los parámetros del campo de vectores  $Z_\eta$  tal que la singularidad es un foco débil repulsor de orden, al menos, 4.

Para  $K_1, c > 0$  consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el conjunto

$$R_{K_1, c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, 0 \leq y \leq c(K_1 - x)\}$$

### Lema 3.

Si  $\frac{m}{1-m} < K$ , existen constantes  $K_1, c > 0$ , con  $c$  suficientemente grande, tal que si  $A < K < K_1$  entonces  $R_{K_1, c} \subset \bar{\Omega}$  es un subconjunto compacto invariante de  $Z_\eta$  conteniendo la singularidad  $(A, B)$  del Lema 1.

### Teorema.

Sean  $(m, F) \in \mathfrak{R}$  y  $\frac{m}{1-m} < K$ .

Existe una vecindad en el espacio de parámetros  $\mathbb{R}_+^6$  tal que el campo de vectores  $Z_\eta$  tiene cinco ciclos límites concentricos, cuatro de ellos infinitesimales y un ciclo límite global atractor que los contiene. Además tres de los cinco ciclos límites son estables.

# Dem. de los Resultados

## Demostración Lema 1

De las componentes del campo de vectores  $Y_\mu$  obtenemos las curvas:

$$\pi_1(Y_\mu) = 0 \iff c_1 : x(K - x)(x + 1) - bxy + i(K - x)(x + 1) = 0$$

$$\pi_2(Y_\mu) = 0 \iff c_2 : x(y^2 + 1) - m(x + 1)(y^2 + 1) - Fy(x + 1) = 0$$

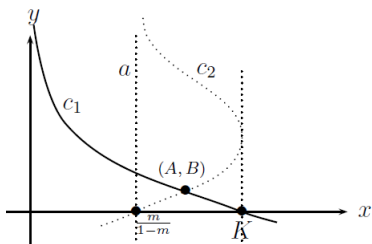


Figure: 3

$$\text{Además, } DY_\mu(K, 0) = \begin{pmatrix} -(1+K)(i+K) & -bK \\ 0 & e(K(1-m)-m) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Las demostraciones para  $\frac{m}{1-m} \geq K$  son inmediatas.

# Dem. de los Resultados

## Demostración Lema 2

Si  $DZ_\eta(A, B)$  es la parte lineal del campo de vectores  $Z_\eta$ , se tiene:

$$\begin{cases} \text{Tra}(DZ_\eta(A, B)) &= -(1+A)B(1+B^2)(A^2+2A^3+A^2i-A^2K+iK) \\ &\quad -A(1+A)(-1+B)B(1+B)e(-A+m+Am) \\ \text{Det}(DZ_\eta(A, B)) &= -A^2(1+A)^2B^2(1+B^2)^2e(A+i)(A-K)+ \\ &\quad A(1+A)^2(-1+B)B^2(1+B)(1+B^2)e(A^2+2A^3+ \\ &\quad A^2i-A^2K+iK)(-A+m+Am) \end{cases}$$

Para  $B = 1$ :

$$\begin{cases} \text{Tra}(DZ_\eta(A, 1)) &= -2(1+A)(A^2+2A^3+A^2i-A^2K+iK) \\ \text{Det}(DZ_\eta(A, 1)) &= 4A^2(1+A)^2e(A+i)(K-A) > 0 \end{cases}$$

Por continuidad del campo de vectores respecto de los parámetros, existe una vecindad suficientemente pequeña para  $B = 1$  tal que la singularidad  $(A, B)$  es un foco.

# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 2 (Continuación: debilidad del foco)

La ecuación que anula la traza, en una vecindad de  $B = 1$ , es lineal en el parámetro  $i$ , de donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{(-A^2 - 2A^3 - A^2B^2 - 2A^3B^2 - A^2e + A^2B^2e + A^2K + A^2B^2K + Aem + A^2em - AB^2em - A^2B^2em)/(1 + B^2)(A^2 + K)}{1} \end{array} \right. \quad (9)$$

Introduciendo el parámetro  $i$  en el sistema y trasladando la singularidad  $(A, B)$  al origen,  $\{x \rightarrow x + A, y \rightarrow y + B\}$ , se tiene el sistema  $C^\infty$ -equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (1 + A)[AB(-A + K - x)(1 + A + x)(A + i + x) + (1 + A)(A + i)(A - K)(A + x)(B + y)](1 + (B + y)^2) \\ \dot{y} = -Ae(B + y)[(1 + A)B(m + (-1 + m)(A + x)) - (1 + B^2)(A(-1 + m) + m)(1 + A + x)(B + y) + (1 + A)B(m + (-1 + m)(A + x))(B + y)^2] \end{array} \right. \quad (10)$$

La Traza y el Determinante son invariantes por traslaciones. Entonces, para  $B = 1$  la parte lineal del sistema trasladado está dada por:

$$DZ_\eta(A, B) = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{pmatrix}$$

donde:

# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 2 (Continuación: foco débil)

$$\begin{aligned} a_{10} &= 0 \\ a_{01} &= (-2A^2(1+A)^3(A-K)^2)/(A^2+K) \\ b_{10} &= 2Ae \\ b_{01} &= 0 \end{aligned}$$

Luego

$$Tr(DZ_\eta)(0,0) = 0$$

y

$$Det(DZ_\eta)(0,0) = 4A^3(1+A)^3e(A-K)^2/(A^2+K)$$

Con el objeto de conseguir la forma de Jordan de la parte lineal de  $Z_\eta$  en el origen, consideramos el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -L \\ b_{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{donde } L^2 = Det(DZ_\eta)(0,0) > 0$$

La expresión anterior permite cambiar el parámetro  $e$  por el nuevo parámetro  $L$ .



# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 2 (Continuación: forma de Jordan)

La parte lineal del nuevo sistema está dada por:

$$\left. \begin{aligned} a_{10} &= 0 \\ a_{01} &= (-2A^2(1+A)^3(A-K)^2)/(A^2+K) \\ b_{10} &= (A^2+K)L^2/(2A(1+A)^3(A-K)^2) \\ b_{01} &= 0 \\ Tr(DZ_\eta)(0,0) &= 0 \\ Det(DZ_\eta)(0,0) &= L^2 \end{aligned} \right\}$$

Finalmente, consideramos el reescalamiento en el eje  $x$

$$\begin{cases} x &= Qu \\ y &= v \\ Q &= \frac{2A^2(1+A)^3(K-A)^2}{(A^2+K)L} \end{cases}$$

El nuevo sistema  $C^\infty$ -equivalente, es de la forma:

$$\begin{cases} \dot{u} &= -Lv + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + a_{21}u^2v + a_{12}uv^2 + a_{03}v^3 + a_{13}uv^3 \\ &+ a_{22}u^2v^2 \\ \dot{v} &= Lu + b_{11}uv + b_{02}v^2 + b_{12}uv^2 + b_{03}v^3 + b_{13}uv^3 \end{cases} \quad (11)$$

# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 2 (Continuación: coeficientes finales)

Donde:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 0 \\ a_{01} &= -L \\ a_{20} &= \frac{(-4A^3(1+A)^4(A-K)^2(A^3+K+3AK-K^2))}{((A^2+K)^2L)} \\ a_{11} &= \frac{(-2A(1+A)^3(A-K)^2)}{(A^2+K)} \\ a_{02} &= -L \\ a_{30} &= \frac{(-4A^3(1+A)^4(A-K)^2(A^3+K+3AK-K^2))}{((A^2+K)^2L)} \\ a_{12} &= \frac{(-2A(1+A)^3(A-K)^2)}{(A^2+K)} \\ a_{03} &= -L/2 \\ a_{22} &= \frac{(-2A^3(1+A)^4(A-K)^2(A^3+K+3AK-K^2))}{((A^2+K)^2L)} \\ a_{13} &= -L/2 \\ b_{10} &= L \\ b_{11} &= 2L \\ b_{02} &= -((A^2+K)L^2(-A+m+Am))/(4A^2(1+A)^2(A-K)^2) \\ b_{12} &= -(L^2(-3-A+m+Am))/(2L) \\ b_{03} &= -((A^2+K)L^2(-A+m+Am))/(4A^2(1+A)^2(A-K)^2) \end{aligned} \tag{12}$$

Además

$$\text{Tr}(DZ_\eta)(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Det}(DZ_\eta)(0,0) = L^2$$

# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 2 (Continuación: Cantidades de Lyapunov)

Designemos por  $\eta_i, i = 1, 2, 3, \dots$ , los valores focales del foco débil en el origen. Considerando el cambio del tiempo  $\{t \rightarrow \frac{1}{L}t\}$ , obtenemos:

$$\eta_1 = \text{Tr}(DZ_\eta)(0, 0) = 0.$$

Además

$$\eta_2 = (a_{02}a_{11} + a_{12} + a_{11}a_{20} + 3a_{30} + 2a_{02}b_{02} + 3b_{03} - b_{02}b_{11})/8$$

La expresión de  $\eta_2$  es una función racional muy grande. Sin embargo el numerador es lineal en el parámetro  $m$  y define implícitamente un valor de  $m$  que anula  $\eta_2$ . De hecho:

$$m = \frac{A/(1+A) - (32A^6(1+A)^8(A-K)^6(A^3+K+3AK-K^2))/((A^2+K)^4L^4)}{+(48A^5(1+A)^5(A-K)^4(A^3+K+3AK-K^2))/((A^2+K)^3L^3)} \quad (13)$$

Para las restricciones de los parámetros  $K$  y  $A$  y de la Fig. 3 (gráficas que definen la singularidad  $(A, B)$ ), consideremos los valores numéricos

$K = 1, L = 1, A = \frac{1}{3}$ . Se tiene  $m \approx \frac{1}{4}$ . (Simulación numérica compatible con el modelo).

# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 2 (Continuación: 3ra. y 4ta. cantidades de Lyapunov)

$m = m(A, K, L)$  es una función continua en los parámetros. La simulación numérica justifica que existe una vecindad en el espacio de los parámetros tal que  $\eta_2 = 0$ .

El valor focal  $\eta_3$  es una expresión muy extensa. Sin embargo para los valores numéricos anteriores, la gráfica del numerador de  $\eta_3$  está dada por:

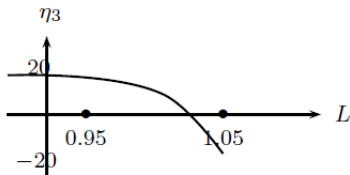


Figure: 4

El valor focal  $\eta_4$  en términos de los coeficientes del sistema, continúa siendo una expresión muy extensa. Sin embargo, para los valores de la simulación numérica  $K = 1, A = \frac{1}{3}$ , las gráficas de  $\eta_3$  y  $\eta_4$  como funciones del parámetro  $L$  están dadas en la Fig.5:

# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 2 (Continuación: 3ra. y 4ta. cantidades de Lyapunov)

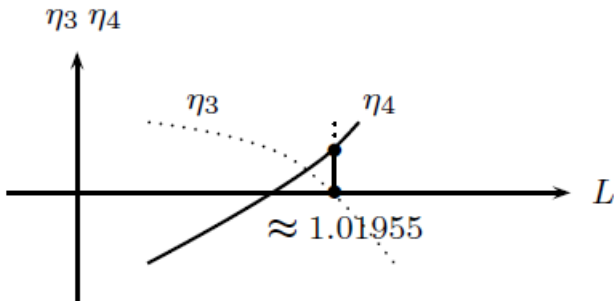


Figure: 5

Las gráficas de  $\eta_3$  y  $\eta_4$  son transversales al eje  $L$ , en consecuencia los comportamientos son estables bajo pequeñas perturbaciones. Entonces existe una vecindad en el espacio de parámetros, suficientemente pequeña, tal que el origen es un foco débil repulsor de orden 4.

# Dem. de los Resultados

## Demostración Lema 3

Consideremos en el cuadrante realista  $\bar{\Omega}$  el triángulo

$$R_{K_1, c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, 0 \leq y \leq c(K_1 - x)\}$$

cuyos bordes son los ejes coordenados  $x = 0, y = 0$  y la recta  $l : y = c(K_1 - x)$ ,  $K < K_1, c > 0$ .

El gradiente del campo de vectores  $Z_\eta$  a lo largo de la recta  $l$  está dado por  $\nabla l = c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ . Para valores grandes del parámetro  $c$ , con  $x < K_1$ , se tiene que  $\langle Z_\eta, \nabla l \rangle \Big|_l < 0$ , pues es una expresión cúbica en el parámetro  $c$  y

$$\text{coef}(c^3) = c(1 + A)^2(A + i)(A - K)(K_1 - x)^3 x$$

donde  $A < K, K < K_1$ .

El triángulo es invariante pues se sabe que el campo de vectores cruza transversalmente el eje  $x = 0$  en el sentido positivo y el semieje positivo  $y = 0$  es invariante por  $Z_\eta$ .

# Dem. de los Resultados

Demostración Lema 3: Continuación (Triángulo invariante)

Gráficamente, el conjunto compacto invariante  $R_{K_1, c}$  está dado por:

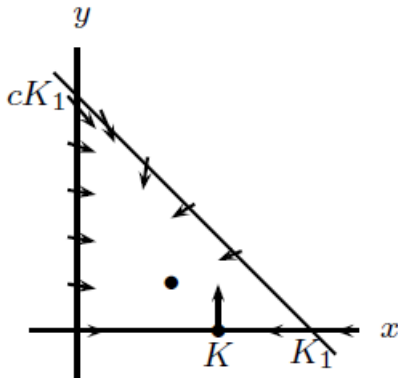


Figure: 6

# Dem. de los Resultados

## Demostración Teorema

Por Lema 1, la singularidad hiperbólica  $(K, 0)$  tiene separatriz inestable  $\gamma$  contenida en el interior del triángulo invariante  $R_{K_1, c}$  (de carácter atractor) dado por el Lema 3. La singularidad  $(A, B)$  es, por Lema 1, un foco débil repulsor y única singularidad en  $R_{K_1, c}$ . Por teorema de Poincaré-Bendixson,  $\omega(\gamma)$  es un ciclo límite atractor  $\sigma$  encerrando la singularidad  $(A, B)$ . Por Lema 3 y perturbando el campo de vectores se generan, vía bifurcación de Hopf, cuatro ciclos límites concéntricos (infinitesimales) contenidos en  $Int(\sigma)$ , dos estables y dos inestables.

En consecuencia, el campo de vectores  $Z_\eta$  presenta cinco ciclos límites (concéntricos) siendo tres de ellos asintóticamente estables (uno global y dos infinitesimales).



# Referencias



C.S. Coleman, *Hilbert's 16<sup>th</sup> problem: How many cycles ?*. In Differential Equations Models, Volumen 1. (Edited by W. Lucas), pp 279-297, Springer-Verlag, (1978).



N.G. Lloyd, *Limit cycles of polynomial systems-some recent developments*, In new Direction in Dynamical Systems. Cambridge University Press, pp. 192-234, 1988.



E. Sáez, <http://docencia.mat.utfsm.cl/esaez/index.html/cliapunov.pdf>, 2000.



M. Scheffer, S. Rinaldi, and Y.A. Kuznetsov, *Effects of fish on plankton dynamics: a theoretical analysis*, Can. J. Fish. Aquat. Sci. 57:1208-1219 (2000)