Los primeros seis trabajos de Iván Szantó y algunos recuerdos

Rafael Labarca

Departamento de Matemáticas y C.C.
Facultad de Ciencia
Universidad de Santiago de Chile

Fiesta para Iván Szantó, 60 años
Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso

Primer Trabajo

Sobre la estabilidad de un sistema no lineal; trabajo conjunto con Eduardo Sáez y Elías Tuma; Scientia, año XLIV, Enero-Junio 1979

Este trabajo consiste, básicamente, en una aplicación del siguiente

Theorem

Consideremos $\dot{x} = f(x); x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n$ *un campo de clase* C^1 *tal que* $f(0) = 0$ *es una singularidad aislada. Suponga que* $V : U(0) \to \mathbb{R}$ *es una función* C^1 *tal que*

$$V(x) \leq 0; V(0) = 0y\dot{V}(x) = DV(x)\dot{f}(x) \leq 0, (*)$$

entonces 0 *es una singularidad inestable de* $\dot{x} = f(x)$.

Aquí estable es estable en el sentido de Liapunov.
La condición (*) dice que la función $V(x)$ decrece a lo largo de las trayectorias de $\dot{x} = f(x)$.

Primer Trabajo

Los autores aplican este resultado al sistema (**) $\begin{array}{ccc} \dot{x_1} & = & f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dot{x_2} & = & f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ . & . & . \\ \dot{x_n} & = & f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}$ que satisface

a) $f_i(0) = 0; i = 1, 2, \cdots, n$
b) $f_i(x)$ es C^1, $i = 1, 2, \cdots, n$
c) Para un i existe $g : U(0) \to \mathbb{R}, C^1$ tal que $g(x) \geq 0$, para $x \in U(0)$ y $f_i(x) = x_i \cdot g(x)$.

En este caso la función $V(x) = \frac{-1}{2} x_i^2$ satisface $V(x) \leq 0; V(0) = 0$ y $\dot{V}(x) = -x_i^2 g(x) \leq 0$.

Primer Trabajo

Además, aplican este resultado a la ecuación diferencial

$$x^{(n)} + x^{(n-1)} g(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \cdots, x^{(1)}, x) = 0.$$

donde g es una función C^1 y $g(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \cdots, x^{(1)}, x) \leq 0$, para afirmar que el estado singular $x = 0$ no es asintóticamente estable para el sistema $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n-1)})$ que satisface $\dot{x_1} = x_2; \dot{x_2} = x_3; \cdots; \dot{x_n} = -x_n g(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1)$.

Segundo Trabajo

Algunos resultados y aplicaciones de un teorema de inestabilidad para las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales usando el método directo de Liapunov. Iván Szantó. Scientia Año XLVI N 156-157, Enero-Diciembre 1981.

Este trabajo obtiene la misma conclusión que el primer trabajo aplicado ahora a funciones $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tales que

$$\sum_{i \in M} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\sum_{i \in M} x_i) G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

donde $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es C^1 y $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$; además aplica el resultado a una ecuación de tercer orden y a sistemas que provienen de la química (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

Tercer Trabajo

On Liapounov functions of high order nonlinear systems. Iván Szantó; Bulletin of the Polish academy of Sciences. Serie Technical Sciences, vol 33 N9-10, 1985

Gille y Wegzryn probaron, en Bull. Acad. Pol. Scie. Ser. sci. Tech. Vol N 12(1964) 371-374 el siguiente

Theorem

la solución nula de la ecuación:

$$x^{(3)} + a_1 x^{(2)} f(x^{(2)}, x^{(1)}, x) + a_2 x^{(1)} + a_3 x f(x^{(2)}, x^{(1)}, x) = 0$$

es asintóticamente estbale si $a_2 > 0; a_3 > 0; a_1 a_2 - a_3 > 0$ *y* $f(x^{(2)}, x^{(1)}, x) \geq 0$, *desde que no hay soluciones no triviales de* $f(x^{(2)}, x^{(1)}, x) = 0$.

En este trabajo Szantó hace la siguiente generalización:

Tercer Trabajo

Theorem

Consideremos la siguiente ecuación

$$x^{(4)} + a_1 x^{(3)} f(x^{(3)}, x^{(2)}, x^{(1)}, x) + a_2 x^{(2)} + a_3 x^{(1)} f(x^{(3)}, x^{(2)}, x^{(1)}, x) + a_4 x = 0; (***)$$

donde $f(x^{(3)}, x^{(2)}, x^{(1)}, x) \geq 0$ *y* $f(x^{(3)}, x^{(2)}, x^{(1)}, x) = 0$ *no tiene soluciones no triviales.*
Suponga que a_1, a_2, a_3 *y* a_4 *son tales que* $2V(x, y, z, w) = (x, y, z, w)A(x, y, z, w)^T$ *con*
$A = \begin{bmatrix} a_4 a_3 & 0 & a_4 a_1 & 0 \\ 0 & a_3 a_2 - a_4 a_1 & 0 & a_3 \\ a_4 a_1 & 0 & a_2 a_1 - a_3 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$ *satisface* $V \geq 0$. *En este caso la solución singular* $x = 0$ *es asintóticamente estable.*

Además, en este trabajo, Szantó generaliza este resultado para sistemas como (***) con más variables.

Cuarto Trabajo

Invariance Stability under perturbed coefficients of Gille-Wegrzyn non linear differential equations, Iván Szantó, Bulletin of the Polish academy of Sciences. Serie Technical Sciences, vol 35 N9-10, 1987
En este trabajo Szantó publica un resultado en el ámbito de la teoría de bifurcaciones de sistemas con soluciones asintóticamante estables y que es el siguiente: Consideremos la ecuación diferencial lineal:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_2x^{(2)} + a_1x^{(1)} + a_0x = 0$$

para la cual la solución $x = 0$ es asintóticamente estable. Sean $b_k, c_k \geq 0$ números reales $0 \leq k \leq (n-1)$ dados y para $t \geq 0$ definamos $\underline{a_k(t)} = a_k - b_kt; \overline{a_k(t)} = a_k + c_kt$. Para $\alpha_k \in [\underline{a_k(t)}, \overline{a_k(t)}], k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ consideramos la ecuación diferencial lineal

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \alpha_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + \alpha_2x^{(2)} + \alpha_1x^{(1)} + \alpha_0x = 0(*);$$

y los polinomios
$f_1(x) = x^n + \underline{a_{n-1}}x^{n-1} + \overline{a_{n-2}}x^{n-2} + \overline{a_{n-3}}x^{n-3} + \underline{a_{n-4}}x^{n-4} + \cdots; f_2(x) = x^n + \underline{a_{n-1}}x^{n-1} + \underline{a_{n-2}}x^{n-2} + \overline{a_{n-3}}x^{n-3} + \overline{a_{n-4}}x^{n-4} + \cdots; f_3(x) = x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \underline{a_{n-2}}x^{n-2} + \underline{a_{n-3}}x^{n-3} + \overline{a_{n-4}}x^{n-4} + \cdots; f_4(x) = x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \overline{a_{n-2}}x^{n-2} + \underline{a_{n-3}}x^{n-3} + \underline{a_{n-4}}x^{n-4} + \cdots.$

Cuarto Trabajo

Theorem

Se cumple que $x = 0$ es asintóticamente estable para (*) si y solo s los polinomios $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ y $f_4(x)$ son estables.

Recordamos que un polinomio se dice estable si sus raíces están en el interior del semiplano negativo o en el interior del círculo unitario.

Quinto Trabajo

On the construction of certain Dulac Functions, Eduardo Sáez e Iván Szantó; IEEE Transactions on Automatic Control vol 33 N 9, sept 1988

En este trabajo los autores consideran un sistema planar $\dot{x} = f(x, y); \dot{y} = g(x, y)(*)$.
Una función de Dulac para (*) en la región D es una función real $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial(\phi(x,y)f(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial(\phi(x,y)g(x,y))}{\partial y}$ tiene signo constante en D.
El Teorema de Bendixson-Dulac dice que si (*) tiene una función de Dulac en D entonces (*) no tiene órbitas periódicas en D.
En este trabajo Sáez y Szantó establecen el siguiente resultado:
Consideremos el sistema $\dot{x_1} = P(x_1, x_2); \dot{x_2} = Q(x_1, x_2)$ analitíco en el plano; sea $G \subset \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa.

Quinto Trabajo

Theorem

Si existe una matriz constante A tal que la matriz: $A\tilde{J(x)} + (\tilde{J(x)})^T A$ es definida positiva o negativa definida en G con $\tilde{J(x)} = J(x) + I\frac{traza(J(x))}{2}$, $J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_1} & \frac{\partial Q}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ entonces el sistema no tiene camino cerrado o curvas cerradas en G.

La demostración resulta de reconocer que
$B(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))A(P(x, y), Q(x, y))^T$, es una función de Dulac para el sistema en G.
Además, establecen un algoritmo para obtener la función de Dulac.
Recordamos que una matriz T es definida positiva (negativa) si
$X^t T X > 0 (< 0), X \neq 0$.

Sexto Trabajo

Linear Bifurcations in S^2 of a 2-cusp, de Jorge Billeke; Moisés Cañas; Eduardo Sáez e Iván Szantó,publicado en Mathematicae Notae 33(1989) pp 1-24

En este trabajo los autores describen el diagrama de bifurcaciones del campo vectorial

$$X_{(\lambda_1,\lambda_2,\mu)}(x,y) = X_0(x,y) + (\lambda_1 x + \lambda_2 y)\frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $X_0(x,y) = ay^3\frac{\partial}{\partial x} + (x + by^2)\frac{\partial}{\partial y}$, con $a > 0$ es un campo que tiene una 2-cúspide en el orígen.

La descripción de las bifurcaciones se hace en S^2 (i.e. se obtiene la compactificación de Poincaré para obtener la estructura de órbitas en el infinito).