Ciclos límites en modelos depredador-presa con funciones de consumo no-monotónicas racionales

Eduardo González Olivares

Grupo de Ecología Matemática, Instituto de Matemáticas

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

email: ejgonzal@ ucv.cl.

Julio 2013

RESUMEN

En este trabajo estudiamos las dinámicas de una clase de modelos de depredación del tipo Gause considerando una respuesta funcional no-monotónica racional de la forma $h(x) = \frac{qx^m}{x^n+a}$ con m, $n \in \mathbb{N}$ y $n > m \geq 1$.

En Dinámica Poblacional la respuesta funcional del depredador se refiere a la densidad de presas atacadas por unidad de tiempo por cada depredador [9, 12]. Cuando es no-monotónica [11] representa una forma de comportamiento antidepredatorio (APB) llamado *formación de grupo de defensa* [5, 10, 14, 15, 16] o representa el fenómeno de *agregación* (o *agrupamiento*).

Habiendo estudiado algunos casos particulares [1, 7, 13], estamos interesados en determinar si los parámetros m y n tienen influencia en las propiedades de los sistemas que describen la interacción, específicamente si tienen influencia en la cantidad de ciclos límites rodeando un punto de equilibrio positivo.

La clase de modelos de depredación del tipo Gause estudiados son descritos por el sistema del tipo Kolmogorov [4]:

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= r\left(1-\frac{x}{K}\right)x - \frac{qx^m}{x^n+a^n}y \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{px^m}{x^n+a^n} - c\right)y \end{cases} \tag{1}$$

donde $\mu = (r, K, q, a, p, c, m, n) \in \mathbb{R}_+^6 \times \mathbb{N}^2$, es decir, todos los parámetros son positivos y tienen diferentes significados ecológicos. Además, $n > m \geq 1$ y por razones ecológicas, $0 < a < K$.

En el caso general que estudiamos aquí, demostramos la existencia del fenómeno de biestabilidad, ya que determinamos un subconjunto de parámetros para el cual coexisten dos singularidades localmente estables.

Es bien sabido que la cantidad y posición relativa de ciclos límites redeando un equilibrio positivo es un problema abierto [6] y también lo es en Dinámica Poblacional [2, 3]. Uno de nuestros objetivos es la determinación del número de

ciclos límites, que estimamos puede ser un criterio de clasificación de este tipo de modelos depredador-presa.

En los casos particulares estudiados anteriormente hemos probado la existencia de dos ciclos límites rodeando a un único punto de equilibrio positivo [7, 8, 13] y tratamos de determinar si este número es dependiente de los parámetros m y n.

Además, mostramos algunas simulaciones que refuerzan los resultados obtenidos.

References

[1] A. Aguilera-Moya and E. González-Olivares, A Gause type model with a generalized class of non-monotonic functional response, In R. Mondaini (ed), *Proceedings of the Third Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, E-Papers Serviços Editoriais, Ltda., Rio de Janeiro, Volumen 2 (2004) 206-217.

[2] K. S. Cheng, Uniqueness of a limit cycle for a predator–prey system, SIAM Journal on Applied Mathematics 12 (1981) 541–548.

[3] C. S. Coleman, Hilbert's 16th. Problem: How Many Cycles? In: M. Braun, C. S. Coleman and D. Drew (Ed). *Differential Equations Model*, Springer Verlag (1983) 279-297.

[4] H. I. Freedman, *Deterministic mathematical models in Populations Ecology*, Marcel Dekker, Inc. 1980.

[5] H. I. Freedman and G. S. K. Wolkowicz, Predator-prey systems with group defence: The paradox of enrichment revisted, Bulletin of Mathematical Biology 48 (1986) 493-508.

[6] V. A. Gaiko, *Global Bifurcation theory and Hilbert´s sixteenth problem*, Mathematics and its Applications 559, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[7] E. González-Olivares, A predator-prey model with nonmonotonic consumption function, In R. Mondaini (Ed.) *Proceedings of the Second Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, E-papers Serviços Editoriais Ltda. Río de Janeiro (2003) 23-39.

[8] E. González-Olivares, B. González-Yañez, E. Sáez and I. Szántó, On the number of limit cycles in a predator-prey model with non-monotonic functional response, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B 6 (2006) 525-534.

[9] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems* (2nd edition), Princeton University Press (2001).

[10] S. Ruan and D. Xiao, Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response, SIAM Journal of Applied Mathematic 61 (2001) 1445-1472.

[11] R. J. Taylor, *Predation*, Chapman and Hall, 1984.

[12] P. Turchin, *Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.

[13] S. Véliz-Retamales and E. González-Olivares, Dynamics of a Gause type prey-predator model with a rational nonmonotonic consumption function, In R. Mondaini (ed), *Proceedings of the Third Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, E-Papers Serviços Editoriais, Ltda., Rio de Janeiro, Volumen 2 (2004) 181-192.

[14] G. S. W. Wolkowicz, Bifurcation analysis of a predator–prey system involving group defense, SIAM Journal on Applied Mathematics 48 (1988) 592-606.

[15] D. Xiao and S. Ruan, Bifurcations in a predator-prey system with group defense, International Journal of Bifurcation and Chaos 11 (2001) 2123-2131.

[16] H. Zhu, S. A. Campbell and G. S. K. Wolkowicz, Bifurcation analysis of a predator-prey system with nonmonotonic functional response. SIAM Journal on Applied Mathematics 63 (2002) 636-682.