El atractor caótico de Lorenz: Desarrollo y perspectivas en sistemas dinámicos

Pablo Aguirre Pierre Guiraud Carlos Vásquez

Universidad Técnica Federico Santa María Universidad de Valparaíso Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

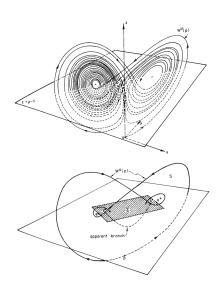
http://paguirre.mat.utfsm.cl/escuela2015.html



Clase 2

- Propiedades del atractor de Lorenz.
- Estructura geométrica del atractor de Lorenz.
- Otras bifurcaciones en el sistema de Lorenz.

http://paguirre.mat.utfsm.cl/escuela2015.html



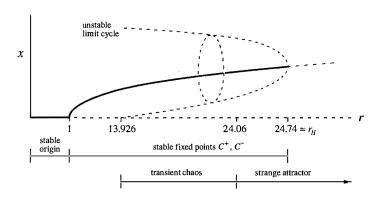
Interpretación del modelo

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

- Lorenz desarrolló un sistema de EDPs modelando velocidad del fluido y perturbaciones de la temperatura.
- (x(t), y(t), z(t)): Amplitudes reescaladas.
- t: Escala de tiempo reescalada.
- σ (Número de Prandtl): Competencia entre difusiones viscosas y térmicas;
- r (Número de Rayleigh): Calor aplicado;
 Aparece frecuentemente en mecánica de fluidos cuando una capa de fluido es calentada desde abajo.
- b: Factor geométrico que resulta de obtener sistema adimensional.
- [J. Meiss, Differential Dynamical Systems, SIAM, 2007.]



Ruta al Caos



- $r = r_{hom} \approx 13.926$: Primera explosión homoclínica.
- ▶ $\underline{r_{hom}} < r < r_A$: 2 órbitas Γ^{\pm} de tipo silla. $\dim W^s(\Gamma^{\pm}) = 2$, $\dim W^u(\Gamma^{\pm}) = 2$. 0 es silla, C^{\pm} son atractores. + Caos transiente.
- $r = r_A \approx 24.06$: Aparición de atractor extraño.
- Para $r > r_H \approx 24.74$: Γ^{\pm} desaparecen.
 - $\mathbf{0}$ es silla, C^{\pm} son silla-foco. $\dim W^s(C^{\pm}) = 1$, $\dim W^u(C^{\pm}) = 2$.

Aparición del atractor extraño

En un cierto rango de parámetros, no hay equilibrios atractores ni ciclos atractores...

Lorenz no pudo seguir usando herramientas estándar y se enfrentó a lo que parecía una **paradoja**:

- ► Todas las trayectorias permanecen confinadas en una región acotada.
- ...eventualmente atraídas a un conjunto de volumen cero.

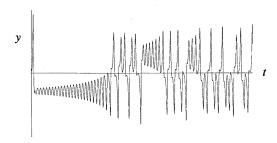
"When you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth", (Sherlock Holmes)

Un atractor extraño ${\cal A}$ *

- ► ¿Cómo es A?
- ¿Cómo se mueven las órbitas una vez que llegan a A?

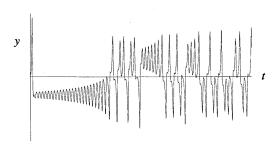
^{* [}Ruelle & Takens, On the nature of turbulence, Commun. Math. Phys., 20 (1971), 167.]

Cálculos de Lorenz (r = 28)



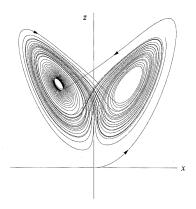
- ▶ Lorenz fijó $\sigma = 10$, b = 8/3, $r = 28 > r_H$
- ...e integró numéricamente desde una condición inicial cercana a ${\bf 0}=(0,0,0).$
- Lorenz sabía que algo raro tenía que ocurrir
- ...pero tuvo que tener cuidado de interpretar correctamente los cálculos numéricos. Esto era a comienzos de los años 60!

Movimiento aperiódico



- Inicialmente: oscilaciones con amplitud cresciente.
- Cambios de signo
- ...y más oscilaciones a intervalos irregulares.
- $lackbox{ Oscilaciones irregulares persisten para }t
 ightarrow \infty$ y nunca se vuelven a repetir.

Mariposa de Lorenz



- ▶ Visualizando la órbita en el espacio de fase: mariposa de Lorenz.
- La trayectoria cruza de un "ala" a la otra indefinidamente.
- ► El número de vueltas alrededor de C⁺ o C⁻ antes de cambiar de "ala" posee características de variable aleatoria.

Si recordamos...

Explosión homoclínica:

Se crean un número infinito de objetos de tipo silla: Trayectorias son repelidas desde un objeto inestable a otro.

► Sistema es disipativo:

Trayectorias están confinadas (en el largo plazo) a un conjunto acotado de volumen cero. Sin embargo, permanecen para siempre en este conjunto sin autointersectarse ni intersectar a otras órbitas.

El atractor de Lorenz es caótico

El atractor extraño ${\mathcal A}$ presenta lo que hoy se entiende como comportamiento caótico...

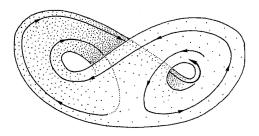
- Comportamiento aperiódico: Las órbitas recorren todo A como si se "esparcieran" eternamente por toda la mariposa de Lorenz (mezcla topológica o transitividad).
- ▶ Dependencia sensitiva a las condiciones iniciales: Soluciones cercanas se separan exponencialmente rápido. http://youtu.be/97ryBYOTQ0o

Consecuencias:

Las órbitas periódicas contenidas en A son densas en A.

Predicción en el largo plazo: casi imposible!

Estructura "visual" del Atractor de Lorenz

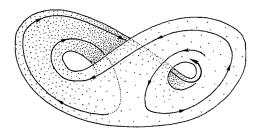


- Cada órbita da un número finito de vueltas alrededor de una rama, y luego cambia a la otra rama.
 Y repite de nuevo... infinitas veces.
- ightharpoonup Atractor ${\cal A}$ formado por dos superficies que se fusionan en la parte baja.
- ▶ Superficie "ramificada" S. $\partial S \subset W^u(\mathbf{0})$.
- ▶ Dilema: debe haber unicidad de soluciones: Trayectorias no pueden cruzarse ni unirse!

[Abraham & Shaw, Dynamics: The Geometry of Behavior, Part 2: Chaotic Behavior, Aerial Press, 1983.]



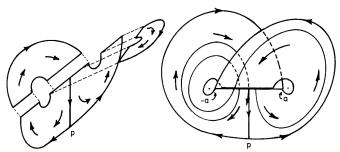
Explicación de Lorenz



- Las dos superficies se unen sólo en apariencia.
- La "ilusión" se debe a la fuerte contracción de volumen del flujo
- ...y por baja resolución numérica.

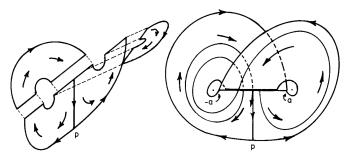
[Abraham & Shaw, Dynamics: The Geometry of Behavior, Part 2: Chaotic Behavior, Aerial Press, 1983.]

Estructura de la superficie ramificada S



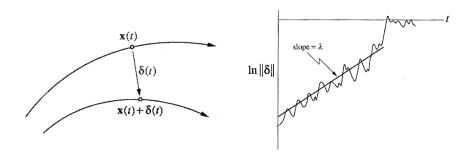
- Reemplacemos el flujo reversible 3D por un semiflujo en 5: Soluciones se definen para t > 0 solamente.
- ► Una semiórbita positiva arbitraria en S: eventualmente debe llegar al intervalo de ramificación [-a, a].
- En ese momento, la órbita "escoge" a cuál rama irá a continuación.
- Además, esta solución se mueve (caóticamente) desde una rama a otra a medida que viaja por el atractor sin intersectarse con otras ni consigo misma (por la propiedad de unicidad de soluciones).

Superficie Ramificada



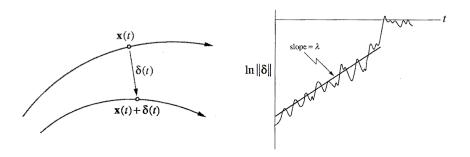
- Este comportamiento también es el mismo para cualquier otra trayectoria en A.
- Superficie S debe estar formada por un número infinito no-numerable de capas o láminas.
- Lorenz: "Un complejo infinito de superficies."
- Atractor de Lorenz $\mathcal A$ es un conjunto de puntos con volumen cero pero área infinita: Fractal ($\dim \mathcal A \approx 2.05$). Estructura de superficies que se "acumulan" en sí mismas.

Dependencia sensitiva a las condiciones iniciales



- $\mathbf{x}(t)$: Punto en una órbita en el atractor en el instante t.
- $ightharpoonup \mathbf{x}(t) + \delta(t)$: Punto cercano en el instante t, donce $\|\delta_0\| = 10^{-15}$.
- **\rightarrow** ¿Cómo crece $\delta(t)$? $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t}$, donde $\lambda = 0.9$.
- Órbitas vecinas se separan exponencialmente rápido.
- ▶ In $\|\delta(t)\|$ vs t: Curva parecida a recta con pendiente $\lambda > 0$.

Observaciones



- Curva tiene altibajos pues la divergencia exponencial varía a lo largo del atractor.
- La divergencia tiene un máximo cuando la separación es comparable con el "diámetro" del atractor.
- ▶ El número λ se conoce como **exponente de Lyapunov**.

Exponentes de Lyapunov

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

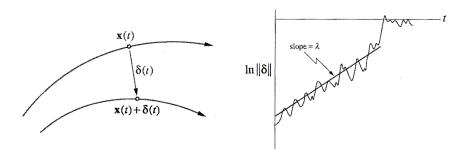
- $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$: Órbita que pasa por el punto $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
- $\dot{\mathbf{u}} = Df(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$: Linealización del flujo a lo largo de $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.
- \triangleright $X(t; \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$: Matriz fundamental.
- $\mathbf{v} \neq 0$: vector en \mathbb{R}^n .
- Coeficiente de expansión en la dirección v a lo largo de la órbita:

$$\mu_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \frac{\|X(t; \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Exponente de Lyapunov en la dirección v a lo largo de la órbita:

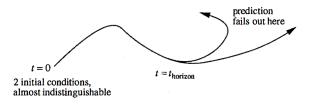
$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \overline{\lim_{t o \infty}} rac{1}{t} \log \mu_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}).$$

Idea de $\lambda(\mathbf{v})$



- ightharpoonup t = 0: Una esfera infinitesimal.
- t > 0: Esfera se deforma en todas direcciones en un elipsoide infinitesimal.
- ightharpoonup t>>1: Diámetro del elipsoide es controlado por el $\lambda(\mathbf{v})$ más positivo.
- **E**n Lorenz: λ obtenido es el exponente de Lyapunov *más grande*.

Consecuencias de tener $\lambda > 0$

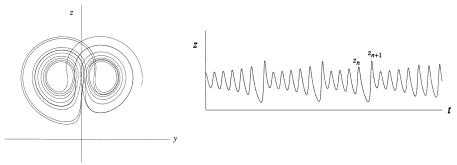


- t = 0: Dos mediciones iniciales cercanas con error $\|\delta_0\|$.
- ▶ t > 0: Discrepancia crece a $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t}$.
- ▶ Si a > 0 es la tolerancia para hacer predicciones, i.e., tal que $\|\delta(t)\| \le a$.
- **Horizonte de tiempo**: predicción falla para $t > t_{horizon}$ tal que

$$t_{ extit{horizon}} \sim O\left(rac{1}{\lambda}\lograc{ extit{a}}{\|\delta_0\|}
ight).$$

No importa qué tan chica sea la discrepancia inicial δ_0 , no podremos predecir por un tiempo más largo que unos múltiplos de $1/\lambda$.

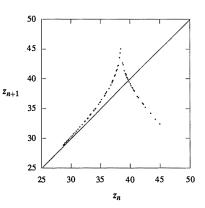
El mapeo de Lorenz



- Idea de Lorenz: "Órbita cambia de espiral sólo después de sobrepasar una distancia crítica del centro..."
- "...y esto determina el punto en el cual se entra a la siguiente espiral."
- "A su vez, esto determina el número de circuitos que se ejecutan antes de volver a cambiar de espiral."
- Codificación de una trayectoria: Una propiedad de un "circuito" dado predice la misma propiedad en el siguiente "circuito."
 - z_n : n-ésimo máximo local de z(t) predice z_{n+1} .

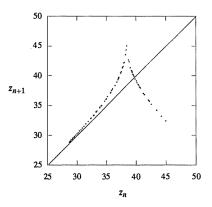
El mapeo de Lorenz (cont.)

- ► Lorenz intengró numéricamente por largo tiempo t y midió los máximos locales de z(t).
- ▶ Obtuvo un gráfico z_{n+1} vs z_n .
- Datos parecen coincidir con una curva $z_{n+1} = f(z_n)$ Mapeo de Lorenz.
- Lorenz pudo extraer orden del caos!

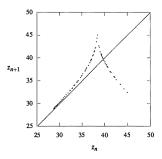


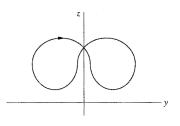
Observaciones

- ► El gráfico no es una curva: Tiene un grosor muy pequeño. f(z) no es una función bien definida. Tratamiento como curva → conveniente.
- ► El mapeo de Lorenz no es un mapeo de Poincaré:
 - <u>Poincaré</u>: Toma un punto en una superficie 2D, especificado por 2 coordenadas, y nos dice cómo esas dos coordenadas cambian después del primer retorno a la superficie.
 - <u>Lorenz</u>: Caracteriza la órbita por sólo un número, no dos. Este enfoque funciona sólo si el atractor es muy "delgado", o sea, cercano a algo bidimensional.



Descartando que el atractor sea un ciclo atractor con periodo muy largo

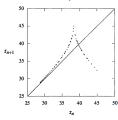


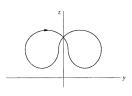


- Gráfico de f(z) satisface |f'(z)| > 1.
- ► f tiene un solo punto fijo z^* . En este caso, $z^* = z_0 = z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \ldots$
- $ightharpoonup z^*$ corresponde a una órbita periódica. ¿Estabilidad?
- ▶ Considere una perturbación de la órbita cerrada: $z_n = z^* + \eta_n$, con $\eta_n \approx 0$.
- ▶ Linealizando: $|\eta_{n+1} = f'(z^*)\eta_n$. Luego $|\eta_{n+1}| > |\eta_n|$.
- \triangleright η_n crece con cada iteración. La órbita periódica es inestable.



Todas las órbitas periódicas son inestables para $r \approx 28$





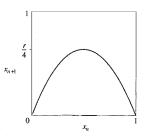
- ▶ Sea $\{z_n\}$: Secuencia correspondiente a una órbita cerrada arbitraria
- $ightharpoonup z_{n+p}=z_n$, para algún $p\geq 1$ (posiblemente grande).
- ► Considere una perturbación η_n y veamos η_{n+p} .
- 1ra iteración: $\eta_{n+1} \approx f'(z_n)\eta_n$.
- ▶ 2da iteración: $\eta_{n+2} \approx f'(z_{n+1})f'(z_n)\eta_n$.
- ▶ p-ma iteración: $\eta_{n+p} \approx \left(\prod_{k=0}^{p-1} f'(z_{n+k})\right) \eta_n$.
- ▶ $|f'(z)| > 1 \implies |\eta_{n+p}| > |\eta_n|$. La órbita periódica es inestable.

Existen órbitas periódicas atractoras para r >> 28

- ► Tres intervalos de *r* con comportamiento periódico estable:
 - 1) $r \approx 100$
 - 2) $r \approx 150$
 - 3) $200 < r < \infty$
- En cada uno de ellos se observan cascadas de duplicación de período.

Tomemos un breve desvío por la ecuación logística...

El Mapeo Logístico

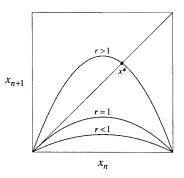


$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) = F_r(x_n), \quad x_n \ge 0, 0 \le r \le 4.$$

- Robert May (1976): Análogo discreto de la ecuación logística para el crecimiento de una población.
- x_n : Medida adimensional de la población en la n-ésima generación.
- r: Tasa de crecimiento intrínseca.
- ► El mapeo logístico NO es el mapeo de Poincaré de ningún flujo bidimensional para ningún r. De hecho, ni siquiera es un difeomorfismo en [0, 1].
- Sin embargo, la dinámica que exhibe es importante en sí misma, y es relevante en mapeos de Poincaré en dimensones mayores.

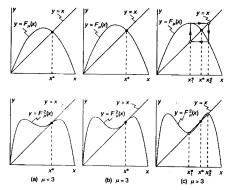


Estabilidad de Puntos Fijos



- Los puntos fijos satisfacen: $x^* = F_r(x^*) = rx^*(1-x^*), x^* \ge 0.$
- ▶ El origen $x^* = 0$ es un punto fijo para todo $0 \le r \le 4$. Es atractor para r < 1 y repulsor para r > 1.
- ▶ Bifurcación transcrítica en r = 1: Aparece un 2do punto fijo para r > 1.
- Para 1 < r < 3: el punto $x^* = 1 \frac{1}{r}$ es atractor y coexiste con el origen (repulsor). Si r > 3, x^* es repulsor.
- ▶ ¿Adónde convergen las órbitas para r > 3?

Bifurcación Flip en r = 3



- ▶ $\underline{r=3}$: $x^*=1-1/r$ posee el multiplicador $\mu=-1$. El mapeo $x\mapsto F_r^2(x)$ pasa por bifurcación pitchfork.
- ▶ r > 3: F_r^2 tiene 2 puntos fijos atractores. Por lo tanto, F_r tiene un 2-ciclo atractor $\{x_1^*, x_2^*\}$ que coexiste con 2 puntos fijos repulsores (el origen y x^*).
- \triangleright ¿Es este ciclo atractor para todo r > 3?

Análisis de estabilidad del ciclo

▶ Sean x_1^* y x_2^* puntos fijos de F^2 . Se tiene:

$$x_{1,2}^* = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

El multiplicador del punto fijo x₁* de F² es:

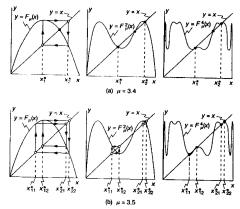
$$\mu = \frac{d}{dx} \Big(F(F(x)) \Big) |_{x=x_1^*} = F'(F(x_1^*)) F'(x_1^*) = F'(x_2^*) F'(x_1^*).$$

▶ Sustituyendo por x_1^* y x_2^* se obtiene:

$$\mu = 4 + 2r - r^2$$
.

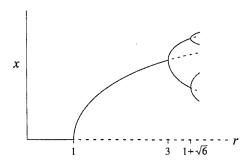
- Por lo tanto, el ciclo es atractor para $|4+2r-r^2|<1$, i.e., para $r<1+\sqrt{6}\approx 3.45$.
- ¿Qué es lo que ocurre en $r = 1 + \sqrt{6}$?

Bifurcación Flip en F^2



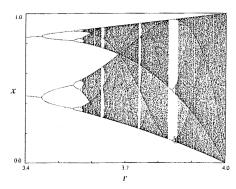
- ▶ $r = 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$: Los puntos fijos $x_{1,2}^*$ de F^2 sufren una bifurcación flip.
- r > 1 + √6: Aparecen 4 puntos fijos atractores para F⁴.
 Esto corresponde a un par de 2-ciclos atractores para F².
 A su vez, se obtiene un 4-ciclo atractor para F que coexiste con un 2-ciclo repulsor y 2 puntos fijos repulsores (el origen y x*).

Diagrama de bifurcación parcial



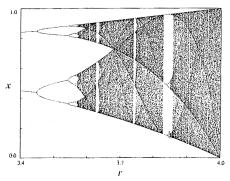
- A medida que r crece, el conjunto límite atractor va <u>duplicando su período</u> en una secuencia de bifurcaciones flip en F, F², <u>etc.</u>
- En el proceso, cada punto fijo o ciclo ya existente va perdiendo estabilidad y se vuelve repulsor, y en su reemplazo aparece un ciclo atractor del doble de período.

Cascada de duplicaciones de período



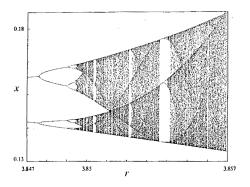
- ightharpoonup A medida que r crece, se obtienen ciclos de período 8, 16, etc.
- Cada 2^k -ciclo que se bifurca en $r = r_k$ permanece atractor por un intervalo o "ventana" en r y se vuelve repulsor en $r = r_{k+1}$, dando paso a un 2^{k+1} -ciclo atractor.
- ▶ A medida que k crece, el tamaño de las ventanas decrece, y la sucesión $\{r_k\} \to r_\infty \approx 3.57$, si $k \to \infty$.

Versión discreta de caos



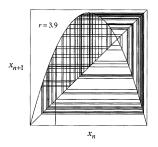
- ▶ $\underline{\text{En } r = r_{\infty}}$, el mapeo se vuelve caótico: El conjunto atractor resultante pasa de ser un conjunto finito de puntos a un conjunto infinito. Una órbita típica nunca se asienta ni en un punto fijo ni en una órbita periódica, sino que su comportamiento en el largo plazo es aperiódico. Cada una de esas órbitas forma un subconjunto denso de [0,1] y su comportamiento cualitativo es caótico.
- Para $r > r_{\infty}$: Mezcla de orden y caos. Aparición de *ventanas periódicas* intercaladas entre *nubes* de puntos caóticos.

Ventanas periódicas



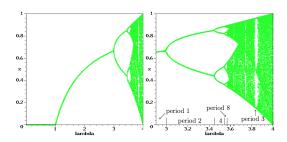
- ▶ Cerca de $r \approx 3.83$: Gran ventana que contiene un 3-ciclo estable. El diagrama se repite en miniatura!
- ▶ El 3-ciclo atractor es el comienzo de una nueva cascada de ciclos atractores de período 3 × 2^k que sigue como consecuencia de posteriores bifurcaciones de duplicación de período.

"Period three implies chaos"



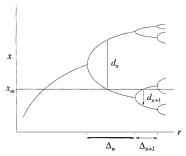
- Guckenheimer et al., 1977: Para cada valor de r, existe al menos una órbita periódica atractora.
 - Además, por cada período m, existe un valor de r para el cual F_r tiene un m-ciclo atractor.
- <u>Li and Yorke, 1975</u>: Famoso paper titulado "Period three implies chaos". La presencia de 3-ciclos es suficiente para asegurar la existencia de órbitas aperiódicas.

Ruta al caos via duplicación de período



- El mapeo logístico es lo suficientemente simple como para que uno pueda obtener un montón de información analíticamente.
- El cuadro que resulta es auto-similar. Esta figura es el camino "universal" al caos (period-doubling route to chaos), y se puede hallar en muchos sistemas.
- ▶ De hecho, el mapeo logístico es un ejemplo de un mapeo *unimodal*: La gráfica del mapeo es suave, cóncava hacia abajo y con un único máximo (ver página 25).

Universalidad: Constante de Feigenbaum



Sea {r_n} la sucesión de valores de r donde ocurre la n-ésima duplicación de período. Si definimos la razón

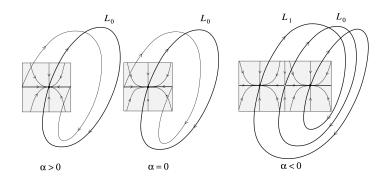
$$\mu_n = \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \longrightarrow \lim_{n \to \infty} \mu_n = \delta = 4.6692\dots$$

se obtiene la *Constante de Feigenbaum.* (δ : Tasa a la cual decrece la distancia entre sucesivas transiciones).

La Constante de Feigenbaum aparece como la tasa de convergencia (geométrica) asociada no sólo al mapeo logístico, sino que a cualquier mapeo unimodal. En otras palabras, la Constante de Feigenbaum es una nueva constante matemática universal, así como π o e!



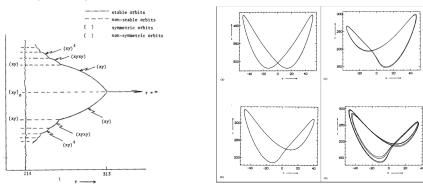
Period-Doubling en órbitas periódicas



- $\alpha < 0$: 1 ciclo (hip) atractor L_0 de período T.
- $ightharpoonup \underline{\alpha} = \underline{0}$: 1 ciclo (no-hip) L_0 de período T.
- ▶ $\alpha > 0$: 2 ciclos hiperbólicos. L_0 silla de período T. L_1 atractor de período $\approx 2T$.

[Figure: Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer.]

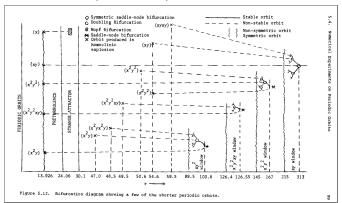
Cascada (inversa?) Period-Doubling en ecuaciones de Lorenz



- ▶ r > 313: Sólo una órbita periódica Γ_{∞} , la cual es atractora y simétrica c/r al eje z.
- $r \approx 313$: Bifurcación pitchfork de ciclos. 2 nuevos ciclos atractores asimétricos.
- r \approx 224: Inicio cascada duplicación de período.

[Figure: Sparrow, The Lorenz Equations: Chaos, Bifurcations and Strange Attractors, Springer, 1982.]

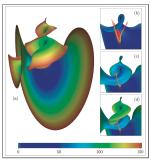
Del atractor extraño a la duplicación de período

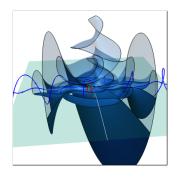


- ▶ Varias cascadas de duplicación de período en el rango 25 < r < 145.
- Muchas órbitas periódicas "terminan" en explosiones homoclínicas.
- ▶ Muchas de ellas persisten para r decreciendo hasta $r_{hom} \approx 13.926$.

[Figure: Sparrow, The Lorenz Equations: Chaos, Bifurcations and Strange Attractors, Springer, 1982.]

Investigaciones en Desarrollo





- Consecuencias de (múltiples) bifurcaciones globales para variedades invariantes.
- ▶ Organización de comportamiento caótico explicado por $W^s(\mathbf{0})$ (variedad de Lorenz).
- Conjuntos caóticos son separados por W^s(0) y otras variedades bidimensionales presentes.
- Problemas similares en otros modelos con las mismas herramientas.

[Figure 1: Krauskopf & Osinga, Two-dimensional global manifolds of vector fields, Chaos 9 (1999), pp. 768–774.] [Figure 2: PA, Doedel, Krauskopf & Osinga, Investigating the consequences of global bifurcations for two-dimensional invariant manifolds of vector fields, Discr. Cont. Dyn. Syst. A₁29 (2011), pp. 1309–1344.]

Problemas

- 1. Considerando la función de Lyapunov $V(x,y,z)=\frac{1}{\sigma}x^2+y^2+z^2$, demuestre que el origen (x,y,z)=(0,0,0) es un equilibrio globalmente estable si r<1.
- 2. Verifique que el origen sufre una bifurcación pitchfork en r=1.
- 3. Si r>1, demuestre que el origen es una silla hiperbólica.
- 4. Demuestre que la ecuación característica para los valores propios de C^{\pm} es

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

- 5. Busque valores propios de C^{\pm} de la forma $\lambda=\pm i\omega$, donde $\omega\neq 0$, y demuestre que ocurre una bifurcación de Hopf cuando $r=r_H=\sigma\left(\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}\right)$. Encuentre también el tercer valor propio de los equilibrios C^{\pm} .
- 6. (Horizonte de tiempo) Para ilustrar el "horizonte de tiempo" después del cual predecir se vuelve imposible (sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales), integre numéricamente (use un computador) las ecuaciones de Lorenz para r = 28, σ = 10 y b = 8/3. Comience dos trayectorias desde condiciones iniciales cercanas, y grafique x(t) vs t para ambas en el mismo gráfico.
- 7. (Experimentos numéricos) Para cada uno de los valores de ρ dados abajo, use un computador para explorar la dinámica del sistema de Lorenz, asumiendo σ = 10 y b = 8/3. En cada caso, grafique x(t) vs t, y(t) vs t, y x vs z. Investigue las consecuencias de escoger condiciones iniciales distintas y diferentes tiempos de integración. Además, en algunos casos, podría ser conveniente ignorar el comportamiento transiente, y graficar sólo el comportamiento sostenido en el largo plazo.
 - (a) r = 10. (b) r = 22 (caos transiente), (c) r = 24.5 (coexistencia de caos y equilibrios estables), (d) r = 100 (sorpresa), (e) r = 126.52, (f) r = 400.

Problemas 2

- Un mapeo P: ℝ → ℝ se dice que posee un punto fijo no-hiperbólico en x = x₀ si P(x₀) = x₀ y det DP(x₀) = 1.
 - (a) Muestre que el mapeo $P(x,\mu)=\mu-x^2$ tiene un punto fijo hiperbólico x=-1/2 en el valor de bifurcación $\mu=-1/4$. Bosqueje el diagrama de bifurcación, es decir, bosqueje la curva de puntos fijos $x=x(\mu)$ de P en el plano (μ,x) . Dé una interpretación de qué ocurre a la dinámica de P cerca del punto $(\mu,x)=(-1/4,-1/2)$.

(b) Muestre que el mapeo $P(x,\mu)=\mu x(1-x)$ posee un punto fijo no-hiperbólico en x=0 para $\mu=1$. Bosqueje el diagrama de bifurcación en el plano (μ,x) y dé una interpretación de qué ocurre a la dinámica de P cerca del punto $(\mu,x)=(1,0)$.

- 9. Suponga que x^* es un punto periódico del mapeo f con período al menos 2. ¿Es x^* un punto periódico con período 3? ¿Es x^* un punto periódico con período 4? ¿Por qué?
- 10. Considere el mapeo $x \mapsto f(x) = x^2 2$. Encuentre los puntos fijos de f. Demuestre que $f^2(x) x = (f(x) x) Q(x)$, donde Q(x) es un polinomio cuadrático. Encuentre los puntos periódicos de período 2 de f.
- 11. Considere el siguiente sistema en el plano, dado en **coordenadas polares**: $rac{\dot{r}}{r} = ar(1-r), \dot{\theta} = 1, a > 0$. Demuestre que la aplicación de retorno de Poincaré P, definida en el semieje x positivo, está dada por $P(x) = x/[x + (1-x)\exp(-2\pi a)]$. Ayuda: $\int_{r_0}^r (s(1-s))^{-1} ds = \ln(r/r_0) \ln((1-r)/(1-r_0))$. Verifique **explicitamente** que P tiene un punto fijo estable en $x^* = 1$. ¿Qué se puede concluir a cerca del retrato de fase del sistema original?
- 12. Considere un sistema planar con ecuación angular $\dot{\theta}=1$ y sea P la aplicación de Poincaré definida sobre el semieje x positivo. Suponga además que:

$$P(x^*) = x^*;$$
 $\frac{dP}{dx}(x^*) = 1;$ $\frac{d^2P}{dx^2}(x^*) = 0;$ $\frac{d^3P}{dx^3}(x^*) = \epsilon \neq 0.$

Dibuje un diagrama que ilustre la forma cualitativa de la iteración $x_{n+1} = P(x_n)$ a partir de una condición inicial x_0 suficientemente cerca de x^* , para los dos casos $\epsilon > 0$ y $\epsilon < 0$. Haga un bosquejo de los retratos de fase correspondientes para el sistema planar en una vecindad anular suficientemente pequeña de $r = x^*$.

