El atractor caótico de Lorenz: Desarrollo y perspectivas en sistemas dinámicos

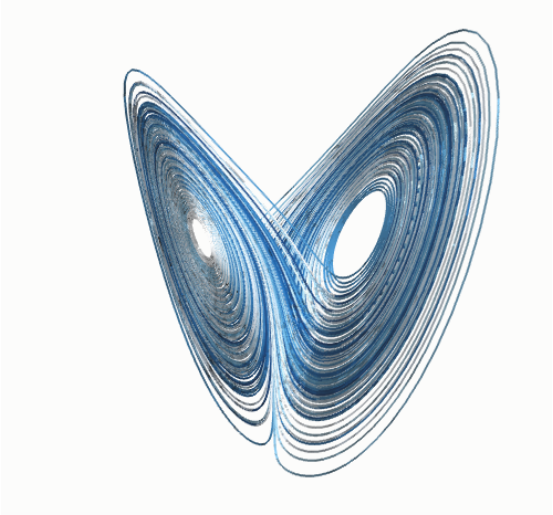
Pablo Aguirre	Universidad Técnica Federico Santa María
Pierre Guiraud	Universidad de Valparaíso
Carlos Vásquez	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

http://paguirre.mat.utfsm.cl/escuela2015.html

El modelo de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{cases}$$

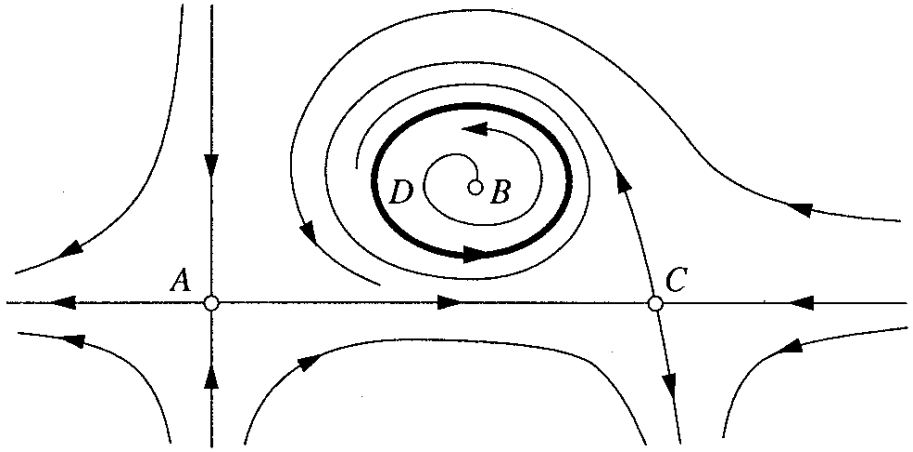
$b = 8/3,\ \sigma = 10,\ r = 28.$



- Edward Lorenz (1963): Modelo simplificado de convección de fluido en una capa bidimensional calentada desde abajo (aire en la atmósfera).
- Soluciones oscilan en forma irregular, sin repetirse nunca (aperiódicas), pero siempre permaneciendo en una región acotada del espacio de fase, convergiendo hacia un conjunto complicado: un "atractor extraño." `http://youtu.be/97ryBYOTQ0o`
- El atractor extraño no es un punto de equilibrio, ni una órbita periódica, ni siquiera una superficie. Es un fractal.
- ¿Cómo llegó Lorenz a esa conclusión?

[**E. Lorenz**, *"Deterministic nonperiodic flow"*, J. Atmosph. Sci. 20 (1963).]

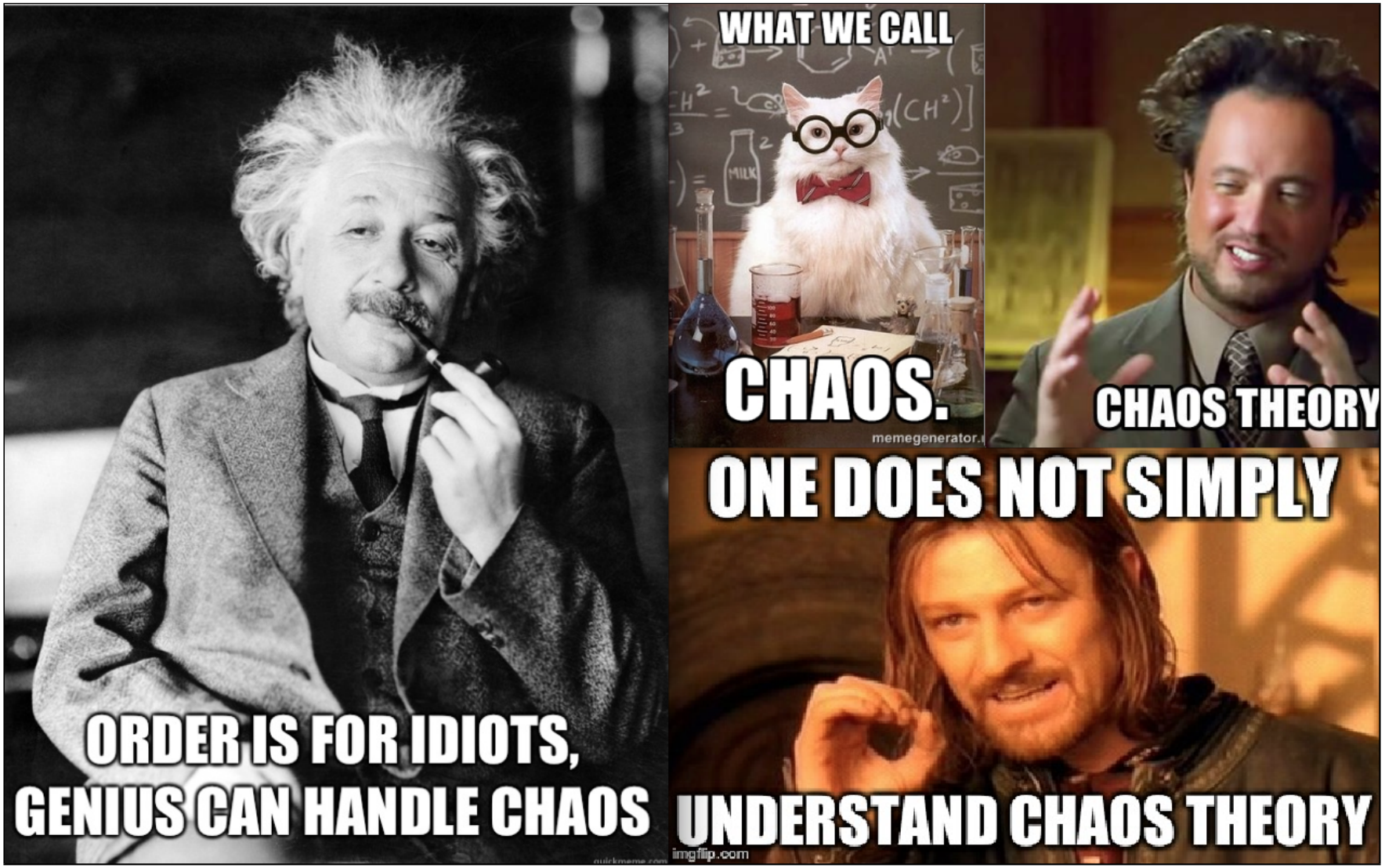
¿De dónde viene la noción de caos?



- Sistemas Dinámicos: Rama de las matemáticas.
- Tiempo atmosférico (Lorenz), fotones emitidos por un láser, movimiento de los planetas, impulsos nerviosos en las neuronas, concentraciones de sustancias en reacciones químicas, brote de epidemias (de enfermedades, de zombies, etc).
- Cantidades que evolucionan en el tiempo.
- Trayectorias como movimiento o evolución de una cantidad en el tiempo.
- Destino: Comportamiento en el largo plazo.
- Estados asintóticos: Puntos de equilibrio, curvas cerradas (dinámica sencilla), ...objetos "extraños" (caos).

¿Qué es lo que tiene el "efecto mariposa" que atrae tanto la atención?

¿Qué es lo que tiene la Teoría del Caos que atrae tanto la atención?



Nuestro curso:

- **Parte 1. (Pablo Aguirre)**
Background en sistemas dinámicos; propiedades de las ecuaciones de Lorenz.
Clase 1, MIE 14, 14.30–16 hrs. UTFSM.
Clase 2, JUE 15, 11.30–13 hrs. UTFSM.

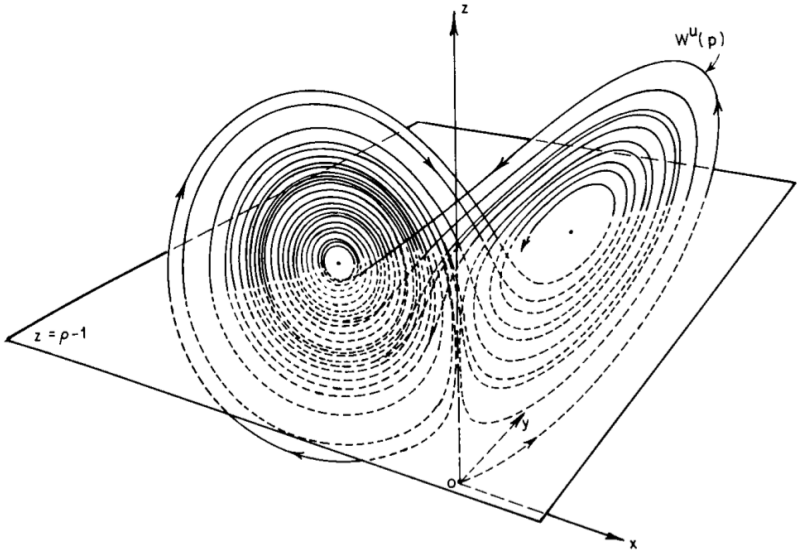
- **Parte 2. (Pierre Guiraud)**
Demostración de la existencia de un atractor caótico en el modelo de Lorenz.
Clase 3, VIE 16, 9.30-11 hrs. UTFSM.
Clase 4, LUN 19, 11.30–13 hrs. PUCV.

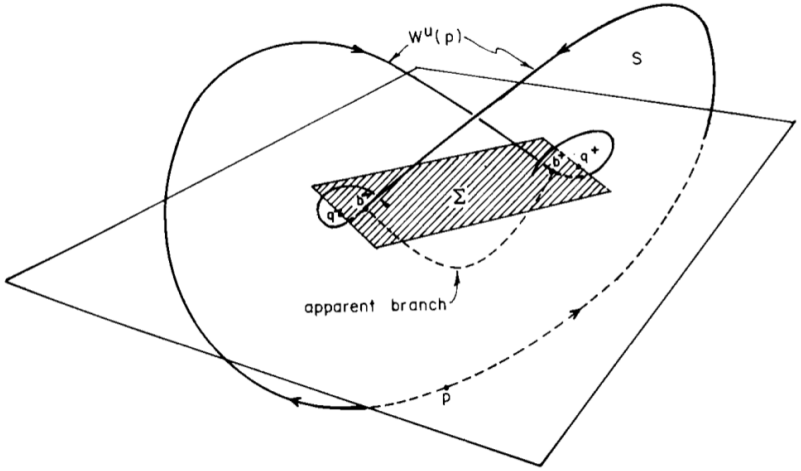
- **Parte 3. (Carlos Vásquez)**
Desarrollos recientes y perspectivas en sistemas dinámicos.
Clase 5, MAR 20, 11.30–13 hrs. PUCV.

Clase 1

- Definiciones y conceptos en sistemas dinámicos.
- Propiedades de las ecuaciones de Lorenz.
- Ruta al caos en el modelo de Lorenz.

http://paguirre.mat.utfsm.cl/escuela2015.html





Definición de sistema dinámico

Un **sistema dinámico** es un sistema cuyo comportamiento se puede describir por un operador de evolución

$$\Phi^t : X \longrightarrow X,$$

$$x_0 \mapsto \Phi^t(x_0) = x_t,$$

X: Espacio de estados o Espacio de fase.
$t \in T$: Podemos tener $T = \mathbb{R}$ (dinámica continua) o $T = \mathbb{Z}$ (dinámica discreta).

Propiedades del operador Φ:

- $\Phi^0(x_0) = x_0$. (Si el tiempo no corre, no hay evolución),
- $\Phi^{t+s}(x_0) = \Phi^t(\Phi^s(x_0))$. (Determinismo),

para todo $x_0 \in X$ y para todo $t, s \in T$.

Una **órbita** en x_0 es un subconjunto ordenado del espacio de estados X:

$$O(x_0) = \{x \in X : x = \Phi^t(x_0), \forall t \in T\}$$

Nos indica qué sucede a x_0 a medida que pasa el tiempo t.

Ejemplos de sistemas dinámicos

Ecuaciones de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{cases}$$

$(x, y, z) \in X = \mathbb{R}^3$, $T = \mathbb{R}$, σ, r, b: parámetros.

Modelo logístico:

$$x \mapsto \mu x(1-x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n),$$

$x \in X = \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Esta aplicación no es invertible: $T = \mathbb{N}_0$.

Shift (dinámica simbólica):
$\omega = \{\ldots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$, donde $\omega_i \in \{1, 2\}$.

$$\omega \mapsto \theta := \sigma(\omega)$$

$$\theta_k = \omega_{k+1},$$

$k \in T = \mathbb{Z}$.

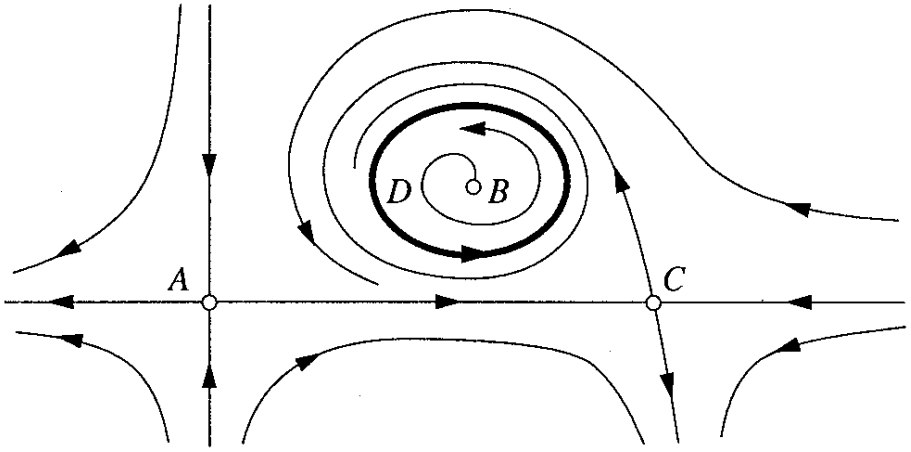
Sistema dinámico a tiempo continuo

Sistema de ecuaciones diferenciales o un campo de vectores:

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in X.}$$

f: Función definida en X suficientemente suave.
Operador de evolución describe el FLUJO del campo vectorial en la forma de una familia $\{\Phi^t\}_{t \in T}$.

- Órbitas: Curvas en X parametrizadas por t y orientadas en la dirección de crecimiento de t.
- Si f es suficientemente suave, podemos ver el "pasado" y seguir el flujo en reversa.
- Puntos de equilibrio: $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = 0$.
- Órbitas periódicas: $\{\Phi^t(x) : 0 \leq t < \tau\}$ donde $\Phi^\tau(x^*) = x^*$.



Retrato de fase

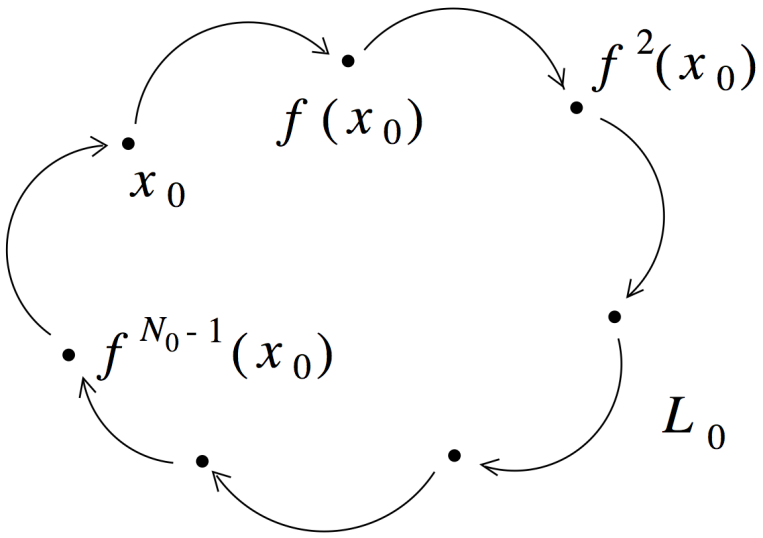
Sistema dinámico a tiempo discreto

Sistema definido por una aplicación:

$$\boxed{\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in X.}$$

f: Función definida en X.
Operador de evolución es el mismo mapeo f: $\Phi^t(\mathbf{x}) = \Phi^n(\mathbf{x}) = f^n(\mathbf{x})$.

- Órbitas: Sucesiones de puntos en X enumeradas por enteros crecientes.
- Si f es invertible, podemos ver el "pasado".
- Puntos fijos:
  $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = x^*$.
- Órbitas periódicas:
  $\{f^i(x_0) : 0 \leq i < N_0\}$ donde $f^{N_0}(x_0) = x_0$.



Propiedades de las ecuaciones de Lorenz

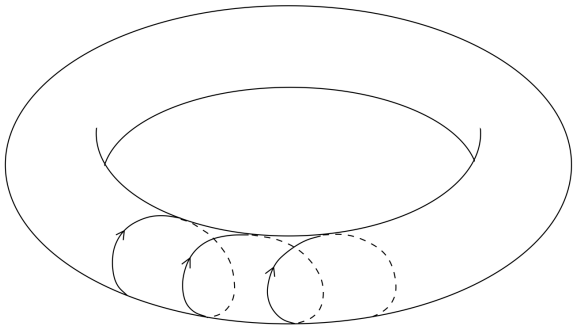
$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{cases}$$

Consideramos $b = 8/3$ y $\sigma = 10$ fijos.
$r > 0$ (Número de Rayleigh): Moveremos r hasta $r = 28$ y más allá...

- Equilibrios:
  $\mathbf{0} = (0,0,0)$,
  $C^{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, $r > 1$.
- Simetría: Al reemplazar $(x,y) \mapsto (-x,-y)$, las ecuaciones no cambian: Si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución, también lo es $(-x(t), -y(t), z(t))$.
- Todas las soluciones son, o bien, simétricas o poseen una contraparte simétrica.
- ¿Comportamiento en el largo plazo?

[**E. Lorenz**, *"Deterministic nonperiodic flow"*, J. Atmosph. Sci. 20 (1963).]

Conjuntos invariantes y atractores



Conjunto invariante: $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$, entonces $\Phi^t(x_0) \in S$, $\forall t \in T$.

- Consecuencia: $\Phi^t(S) \subseteq S$, $\forall t \in T$.
- Un sistema dinámico muy simple puede llegar a tener conjuntos invariantes extremadamente complicados. Ej: Smale.

Conjunto atractor: $A \subset X$ tal que existe vecindad $\mathcal{U}$ de A donde:

- $\forall t \geq 0, \quad \Phi^t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ y $\bigcap_{t>0} \Phi^t(\mathcal{U}) = A$. (Flujo tiende a A)

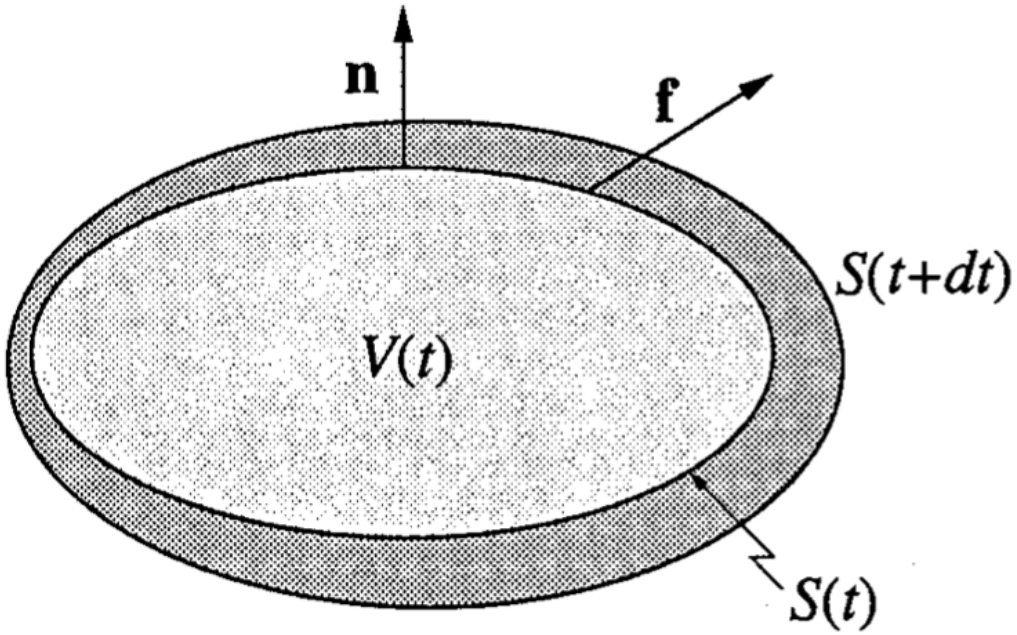
- $\forall n = 0, 1, 2, \ldots, \; g^n(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ y $\bigcap_{n=0}^{\infty} g^n(\mathcal{U}) = A$. (Iteraciones tienden a A)

$\mathcal{U}$: región atrapadora.

- Podemos hablar de puntos de equilibrio, puntos fijos y órbitas periódicas atractoras/repulsoras, etc.

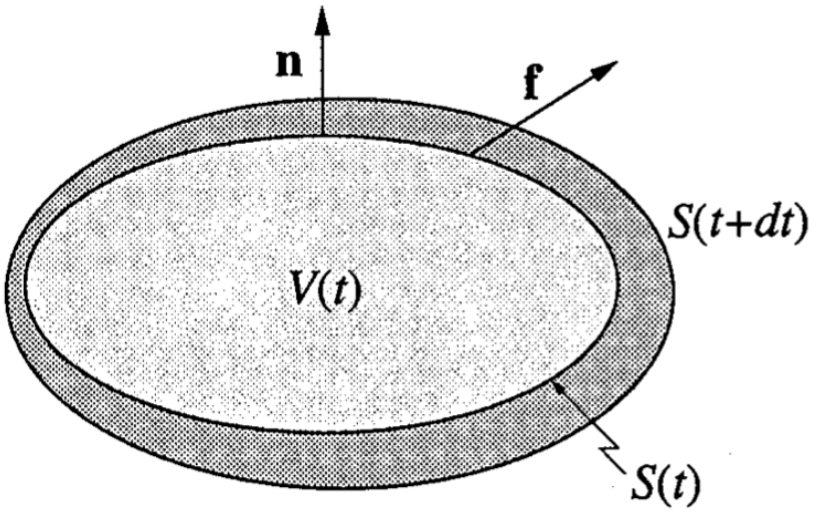
- ¿Cuáles son los posibles atractores del modelo de Lorenz y cuáles son sus propiedades?

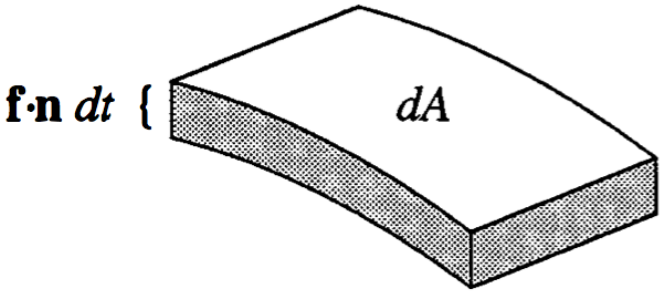
El sistema de Lorenz es disipativo



- Los volúmenes en el espacio de fase se contraen bajo el flujo.
- Sea $S(t)$ una superficie cerrada que encierra un volumen $V(t)$ en el espacio de fase. Por ejemplo, $S(t)$ podría estar formada de condiciones iniciales para trayectorias.
- Después de un tiempo dt, S evoluciona a una nueva superficie $S(t+dt)$.
- ¿Cuál es el volumen $V(t+dt)$?

Contracción de Volumen (cont.)





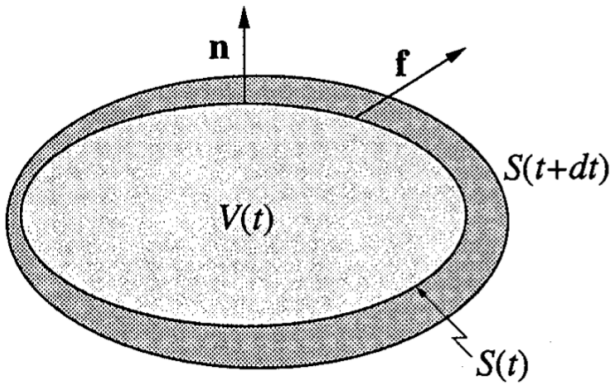
- **n**: vector normal unitario a S y denotemos como $\mathbf{f}$ al campo de vectores.
- **f**: la velocidad instantánea de los puntos.
- $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$: la componente de la velocidad perpendicular a S.
- En un tiempo dt, un área dA barre un volumen $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dt\, dA$.
- Luego,

$$V(t+dt) = V(t) + \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dt\, dA.$$

- Entonces

$$\dot{V} = \lim_{dt \to 0} \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV.$$

Contracción de Volumen (cont.)



- $\boxed{\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV.}$
- Para el sistema de Lorenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}[\sigma(y-x)] + \frac{\partial}{\partial y}[rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z}[xy - bz] = -\sigma - 1 - b < 0.$$

- Luego obtenemos la EDO $\boxed{\dot{V} = -(\sigma + 1 + b)V < 0,}$ con solución

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}.$$

- *Volúmenes en el espacio de fase se achican exponencialmente rápido.*
- Trayectorias convergen a un conjunto atractor de volumen cero. ¿Cuál es ese conjunto atractor? ¿Son puntos de equilibrio?

Consecuencias

- 1.- No hay soluciones cuasiperiódicas:
  Si las hubiera, dicha órbita tendría que estar sobre la superficie de un toro, "fluyendo" indefinidamente sin llegar a cerrarse. Luego, el toro sería invariante bajo el flujo. Entonces, el volumen dentro del toro sería constante en el tiempo, lo cual contradice la propiedad de contracción de volumen.
- 2.- No existen puntos de equilibrio ni ciclos repulsores:
  Supongamos que encerramos un objeto repulsor con una superficie cerrada de condiciones iniciales (ej, una esfera alrededor del punto de equilibrio o un tubo delgado alrededor de una órbita periódica). Después de un lapso de tiempo, la superficie se habrá expandido pues las correspondientes trayectorias son repelidas. Luego, el volumen dentro de la superficie se incrementaría. Esto es claramente una contradicción.

Comportamiento de órbitas cerca de puntos de equilibrio y puntos fijos

$\mathbf{x}_0$ equilibrio de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

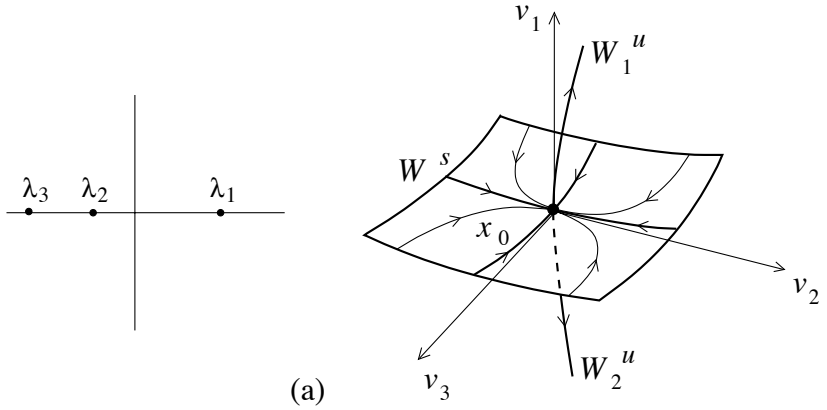
- n_0: # valores propios de $Df(\mathbf{x}_0)$ con parte real $= 0$,
  n_+: # valores propios de $Df(\mathbf{x}_0)$ con parte real > 0,
  n_-: # valores propios de $Df(\mathbf{x}_0)$ con parte real < 0.
- $\mathbf{x}_0$ es equilibrio hiperbólico si $n_0 = 0$.
- Teo. Hartman-Grobman:
  $\mathbf{x}_0$ es atractor si $n_- = n$,
  $\mathbf{x}_0$ es repulsor si $n_+ = n$,
  $\mathbf{x}_0$ es punto silla si $n_+ \cdot n_- \neq 0$.

$\mathbf{x}_0$ punto fijo de $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- n_0: # valores propios de $Df(\mathbf{x}_0)$ con magnitud $= 1$,
  n_+: # valores propios de $Df(\mathbf{x}_0)$ con magnitud > 1,
  n_-: # valores propios de $Df(\mathbf{x}_0)$ con magnitud < 1.
- $\mathbf{x}_0$ es punto fijo hiperbólico si $n_0 = 0$.
- Teo. Hartman-Grobman:
  $\mathbf{x}_0$ es atractor si $n_- = n$,
  $\mathbf{x}_0$ es repulsor si $n_+ = n$,
  $\mathbf{x}_0$ es punto silla si $n_+ \cdot n_- \neq 0$.

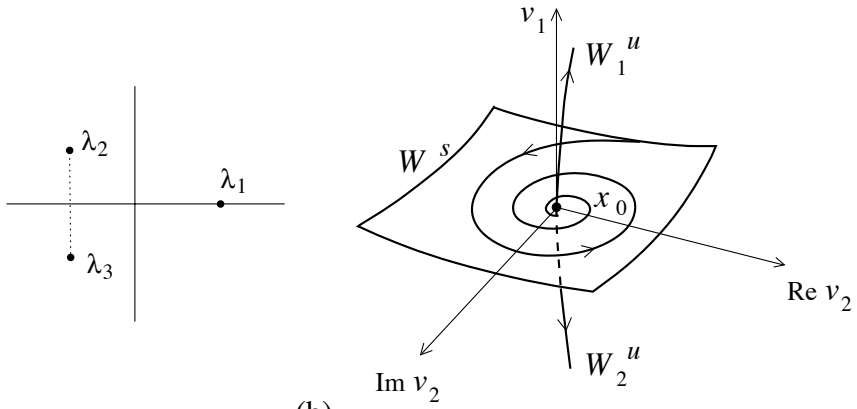
Teorema de la variedad estable

$\mathbf{x}_0$ equilibrio hiperbólico de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Entonces existen variedades estable e inestable
$W^s(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \, \Phi^t(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{x}_0 \text{ as } t \longrightarrow \infty\}$,
$W^u(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \, \Phi^t(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{x}_0 \text{ as } t \longrightarrow -\infty\}$.



(a)

- $W^{s,u}(\mathbf{x}_0)$ son variedades inmersas en $\mathbb{R}^n$ e invariantes bajo Φ^t.
- $\dim W^s(\mathbf{x}_0) = \dim E^s(\mathbf{x}_0)$,
  $\dim W^u(\mathbf{x}_0) = \dim E^u(\mathbf{x}_0)$.
- $T_{\mathbf{x}_0} W^s(\mathbf{x}_0) = E^s(\mathbf{x}_0)$,
  $T_{\mathbf{x}_0} W^u(\mathbf{x}_0) = E^u(\mathbf{x}_0)$.



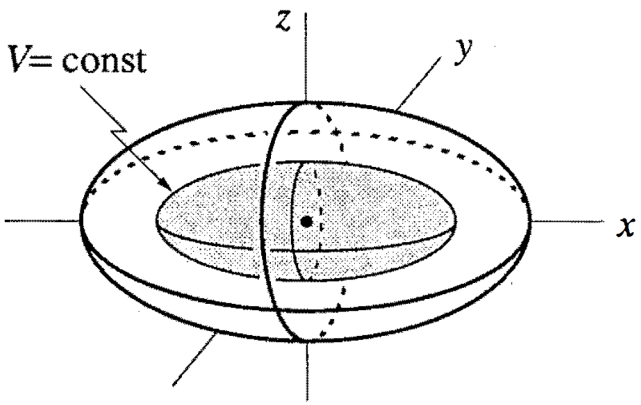
(b)

Definiciones análogas de variedades invariantes de puntos fijos de sistemas discretos.

Lorenz: Estabilidad local del origen

- El origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ es equilibrio para todos los valores de parámetros.
- Linealización en $\mathbf{0}$:
$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y, \\ \dot{z} &= -bz, \end{cases}$$
- Ecuación en z es desacoplada: $z(t) \to 0$ exponencialmente.
- Las direcciones x e y son gobernadas por el sistema
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
con traza $\tau = -\sigma - 1 < 0$ y determinante $\Delta = \sigma(1 - r)$.
- $r < 1$: $\mathbf{0}$ es un atractor.
- $r > 1$: $\mathbf{0}$ es una silla, pues $\Delta < 0$. $\dim W^s(\mathbf{0}) = 2$, $\dim W^u(\mathbf{0}) = 1$.

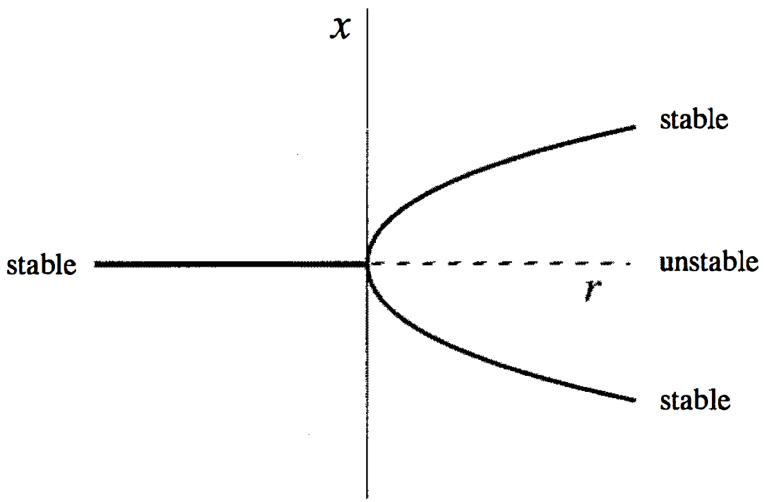
Lorenz: Estabilidad global del origen para $r < 1$

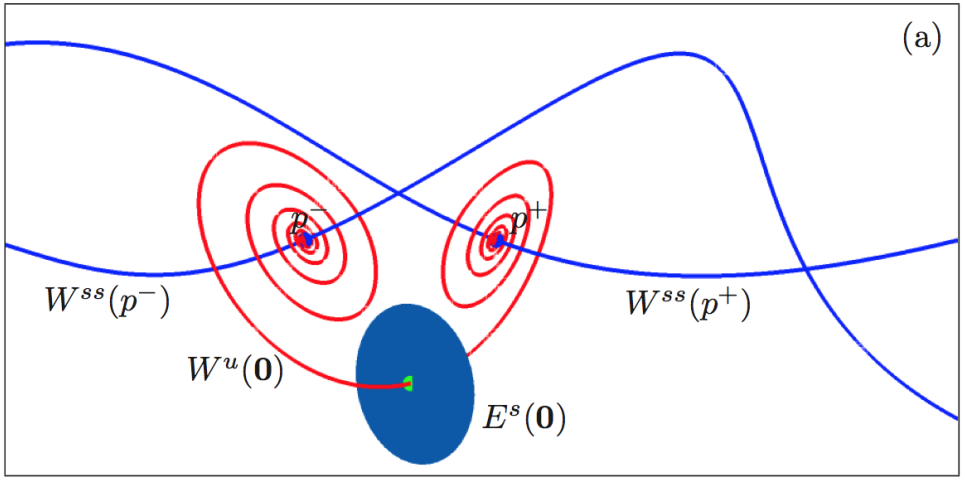


Toda órbita converge a $\mathbf{0}$ para $t \to \infty$: El origen es **globalmente estable.**

- Función de Lyapunov: Función suave, positiva definida que decrece a lo largo de las órbitas.
- Idea de la mecánica clásica: Función energía decrece monótonamente en presencia de fricción o disipación.
- $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$: Superficies de "energía" constante V son elipsoides concéntricos alrededor de $\mathbf{0}$.
- **Razonamiento:** 1) Para $r < 1$ y $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ se tiene $\dot{V} < 0$ a lo largo de las trayectorias.
  2) Órbitas se mueven hacia valores de V menores, entrando en elipsoides cada vez más chicos para $t \to \infty$.
  3) Pero $V \geq 0$, luego $V(x(t), y(t), z(t)) \to 0$ y por lo tanto $(x(t), y(t), z(t)) \to \mathbf{0}$.

Bifurcación pitchfork en $r = 1$





Bifurcación: Cambio cualitativo en la dinámica.

- El origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ es equilibrio para todos los valores de parámetros.
  Para $r < 1$: $\mathbf{0}$ es un nodo atractor. De hecho, es globalmente asintóticamente estable.
  Para $r = 1$: $\mathbf{0}$ pasa por una **bifurcación pitchfork**.
  Para $r > 1$: $\mathbf{0}$ es una silla.
- $C^{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ existen para $r > 1$.
  Atractores inmediatamente después de la bifurcación.
  ¿Estabilidad de los puntos $C^{\pm}$ para $r >> 1$?

Lorenz: Estabilidad de C^+ y C^-

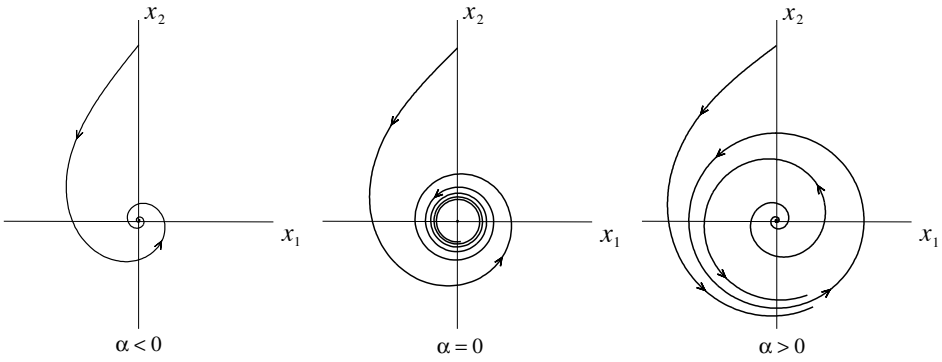
- C^+ y C^- son hiperbólicos y atractores para

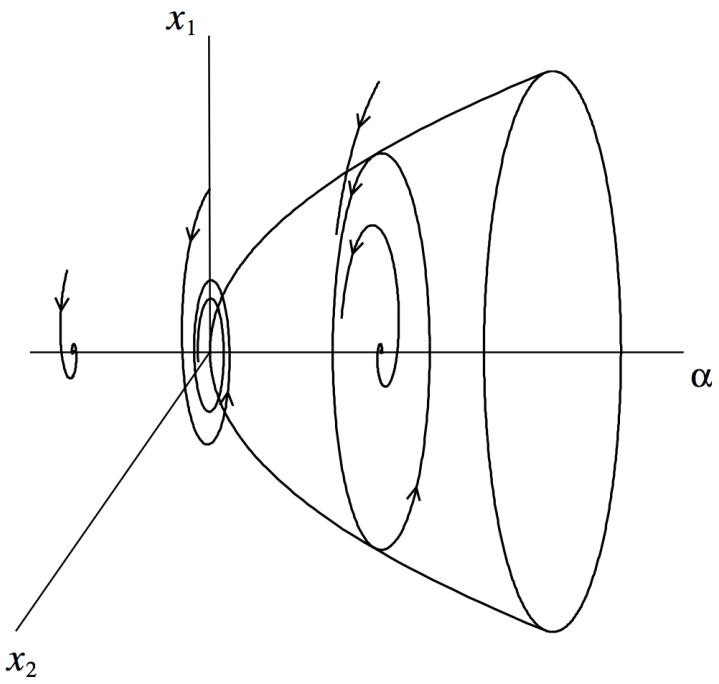
$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \approx 24.74.$$

  $Re\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$.
- $r = r_H$: C^+ y C^- no son hiperbólicos.
  $Re\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 < 0$. **Bifurcación de Hopf en C^+ y C^-.**
- $r > r_H$: C^+ y C^- son silla-focos hiperbólicos.
  $Re\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$.

Pero una Bifurcación de Hopf puede venir en 2 "sabores"...

Bifurcación de Hopf Supercrítica

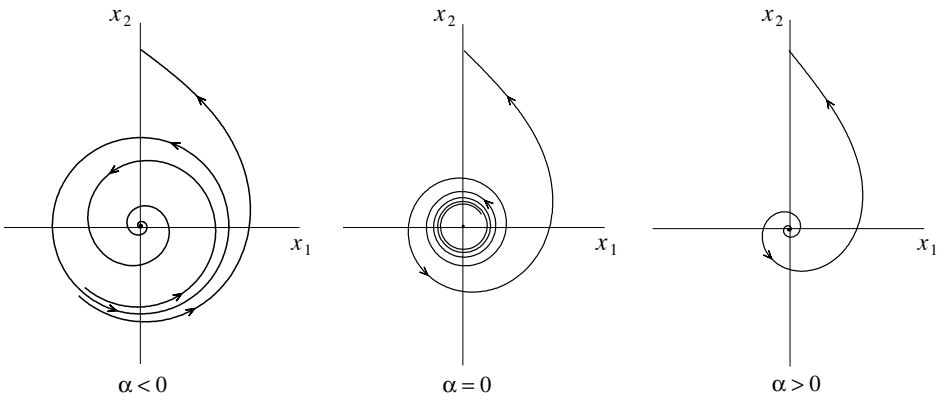


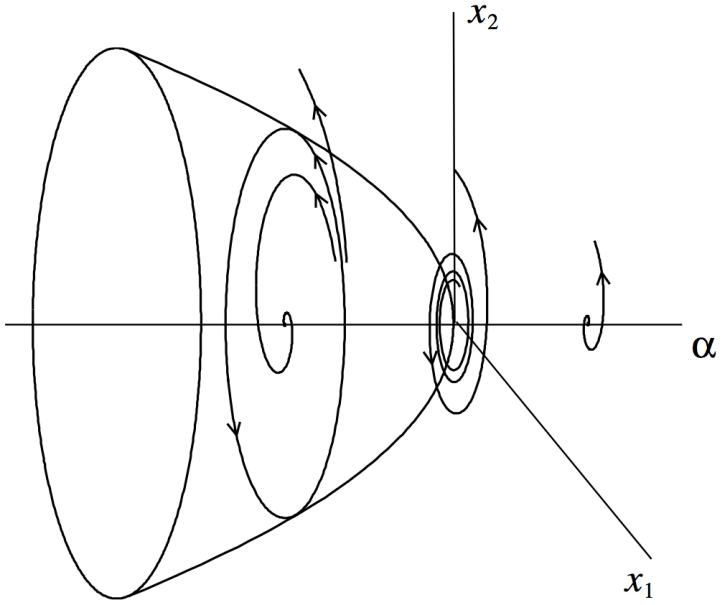


- $\boxed{\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}.}$
- $\alpha = 0 : \mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0.$
- $\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{Re}\lambda_{1,2})|_{\alpha=0} \neq 0.$
- Supercrítica: Existe ciclo estable para $\alpha > 0$.

[**Kuznetsov**, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 2004.]

Bifurcación de Hopf Subcrítica

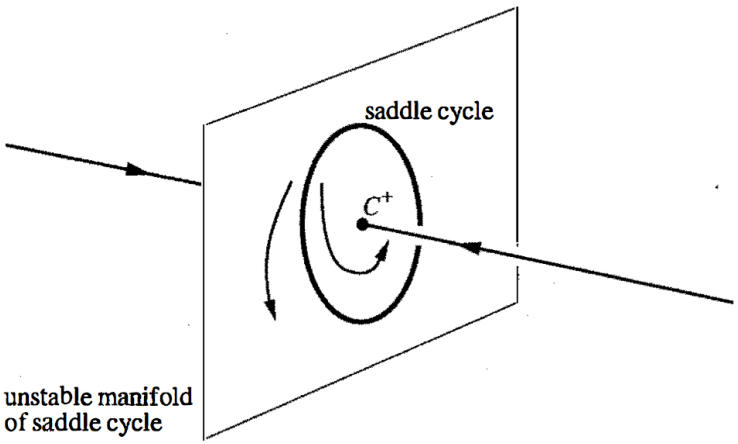


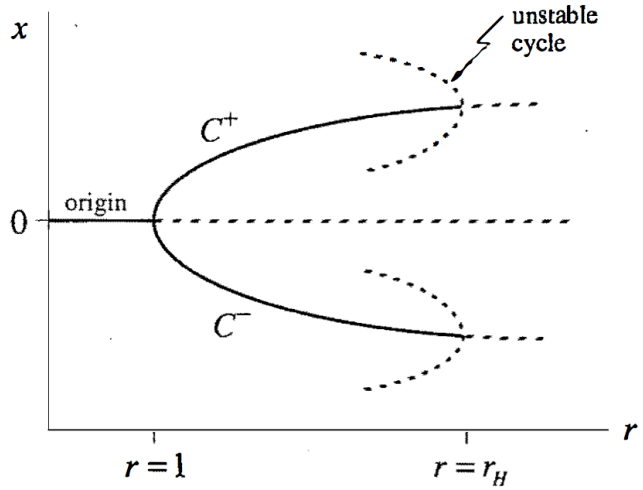


- $\boxed{\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}.}$
- $\alpha = 0 : \mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0.$
- $\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{Re}\lambda_{1,2})|_{\alpha=0} \neq 0.$
- Subcrítica: Existe ciclo inestable para $\alpha < 0$.

[**Kuznetsov**, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 2004.]

Lorenz: Bifurcación de Hopf subcrítica

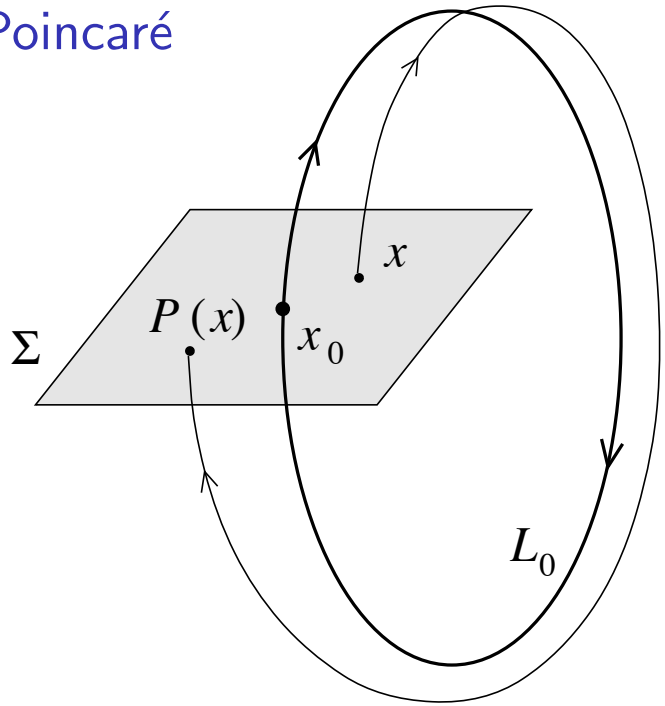




- Existen ciclos silla (inestable) Γ^+ y Γ^- para $r < r_H$.
- $r \to r_H$ desde abajo: Los ciclos $\Gamma^\pm$ se achican alrededor de $C^\pm$.
- $\dim W^s(\Gamma^\pm) = 2$, $\dim W^u(\Gamma^\pm) = 2$.

¿Cómo se determina la estabilidad de una órbita periódica?

Aplicación de retorno de Poincaré

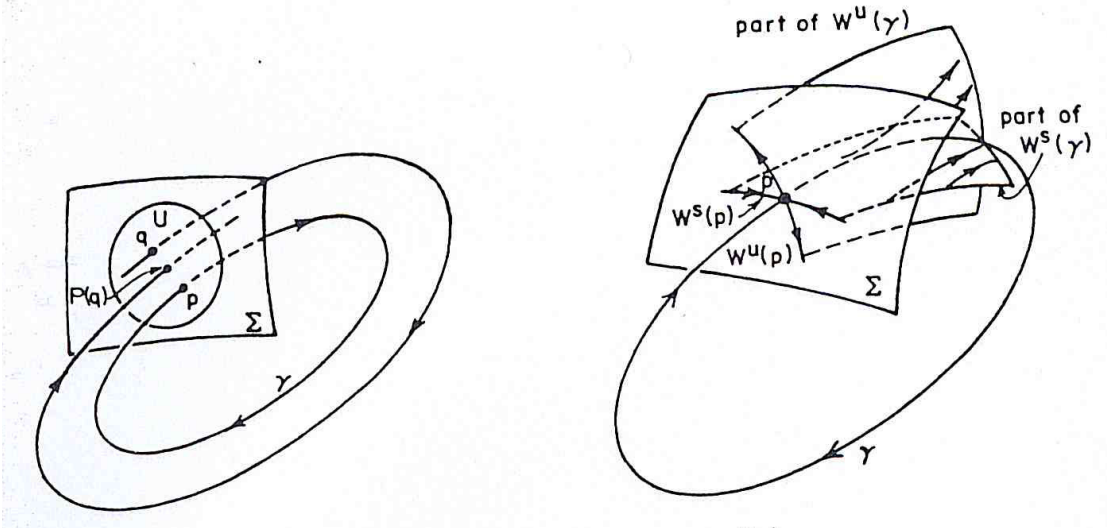


L_0 órbita periódica de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- Sección transversal Σ: superficie suave de dimensión $n-1$.
- Σ : transversal al flujo.
- Primer retorno a Σ: $P : \Sigma \to \Sigma, \mathbf{x} \mapsto P(\mathbf{x})$.
  Sistema dinámico discreto $(n-1)$-dimensional.
- P es (localmente) tan suave como f e invertible.
- Punto fijo de P: $P(\mathbf{x_0}) = \mathbf{x_0}$.
- Estabilidad de L_0 es equivalente a la del punto fijo $\mathbf{x}_0$ de P.

[Figure: **Kuznetsov**: Elements of Applied Bif. Theory, Springer.]

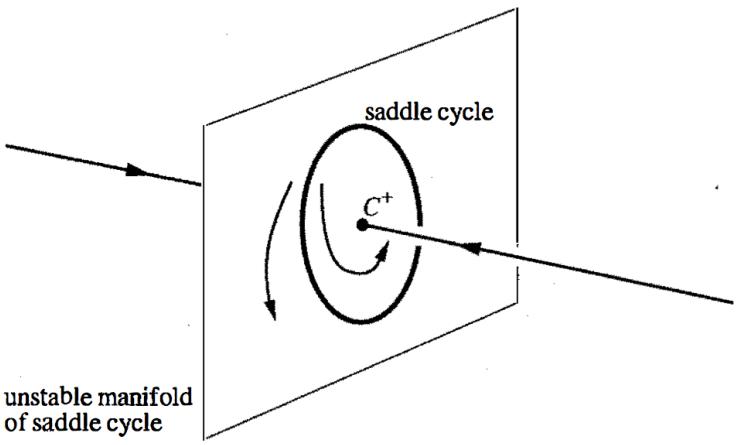
Estabilidad de órbitas periódicas

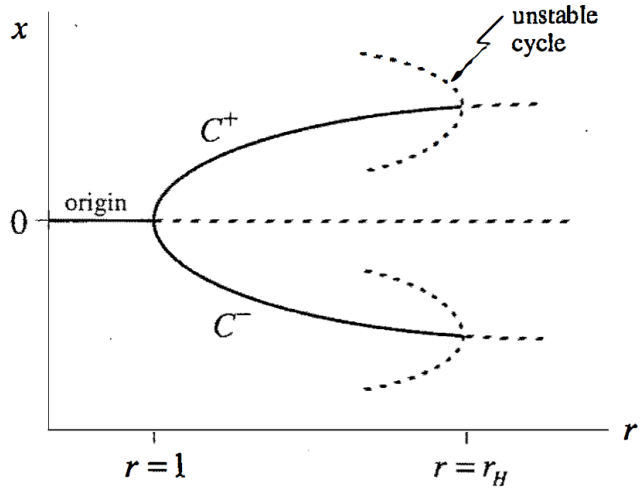


- $A = DP(\mathbf{p})$ (en coordenadas locales apropiadas).
- Multiplicadores de Floquet: valores propios $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ de A.
- Ciclo γ es **atractor** ssi todos los multiplicadores están **dentro** de $|\mu| = 1$.
- Ciclo γ es **repulsor** ssi todos los multiplicadores están **fuera** de $|\mu| = 1$.
- Ciclo γ es una órbita periódica **silla** si A tiene $n_s > 0$ valores propios con módulo menor que uno y $n_u > 0$ valores propios con módulo mayor que uno, $n_s + n_u = n - 1$.
- $\dim W^s(\gamma) = n_s + 1$, $\dim W^u(\gamma) = n_u + 1$.

[Figure: **Guckenheimer & Holmes**: Nonlinear Oscillations, Dyn. Systems, and Bif. of Vector Fields, Springer.]

Lorenz: ¿Existen los ciclos Γ^+ y Γ^- **para todo** $r < r_H$?





- Existen ciclos silla (inestable) Γ^+ y Γ^- para $r < r_H$.
- $\dim W^s(\Gamma^\pm) = 2$: órbitas que convergen a Γ^+ y Γ^-.
- Pero $\mathbf{0}$ es atractor global para $r < 1$.
- Los ciclos silla (inestable) Γ^+ no pueden existir para $r < 1$.
- "Algo" debe ocurrir para algún valor $r = r^* \in]1, r_H[$.

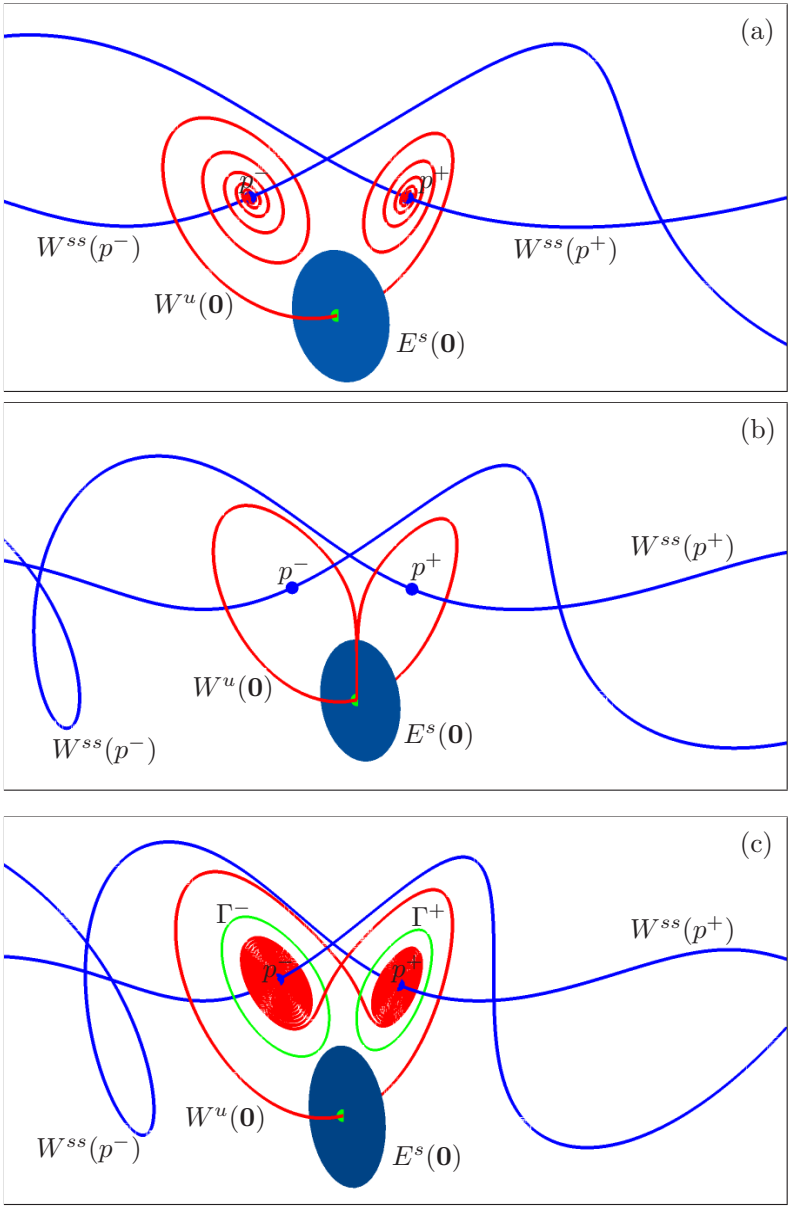
Bifurcación homoclínica en $r_{hom} \approx 13.93$

(a) Para $1 < r < r_{hom} < r_H$: $\mathbf{0}$ es silla, $p^{\pm}$ son atractores.

(b) Para $r = r_{hom} < r_H$: Se forman 2 órbitas homoclínicas que se conectan a $\mathbf{0}$. $W^u(\mathbf{0}) \cap W^s(\mathbf{0}) \neq \emptyset$

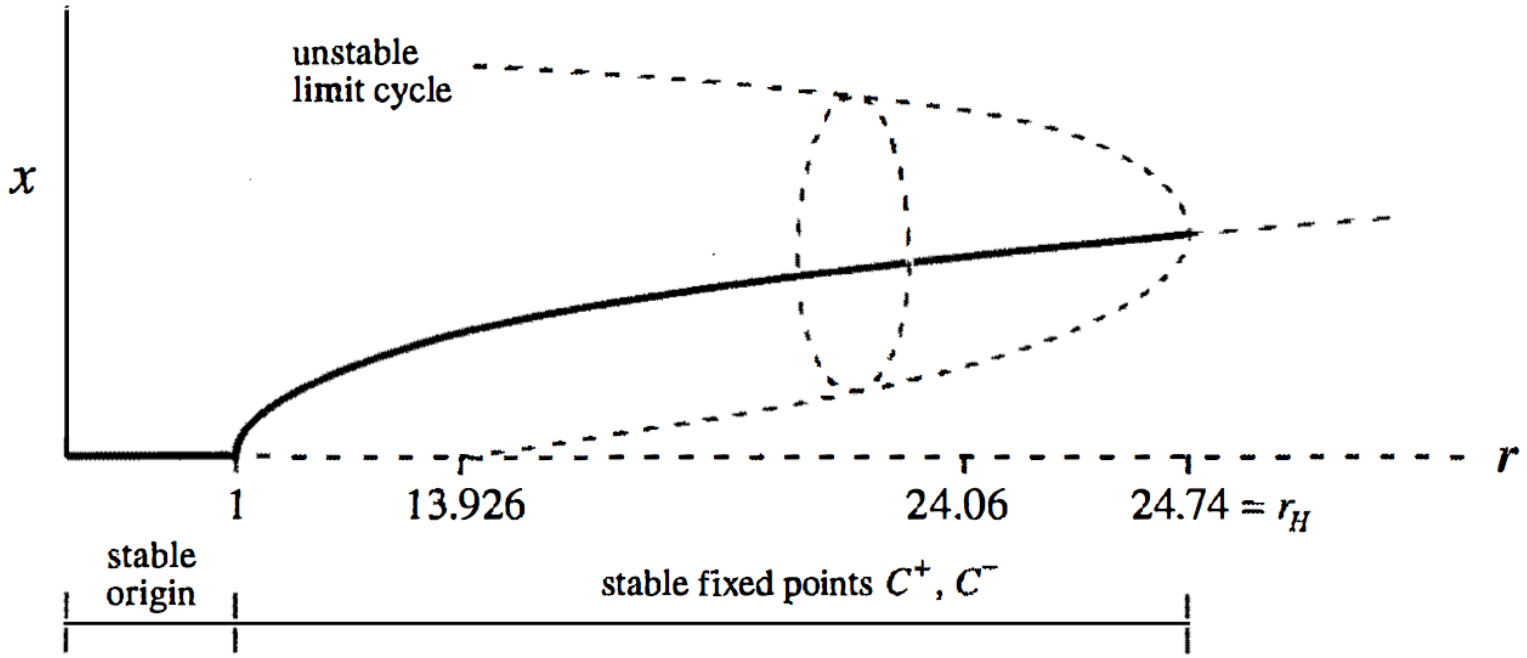
(c) Para $r_{hom} < r < r_H$: 2 ciclos $\Gamma^{\pm}$ de tipo silla.

- Las ramas de $W^u(\mathbf{0})$ se intercambian de ω-límite para $r = r_{hom}$.
- Bifurcación homoclínica: Fenómeno global.



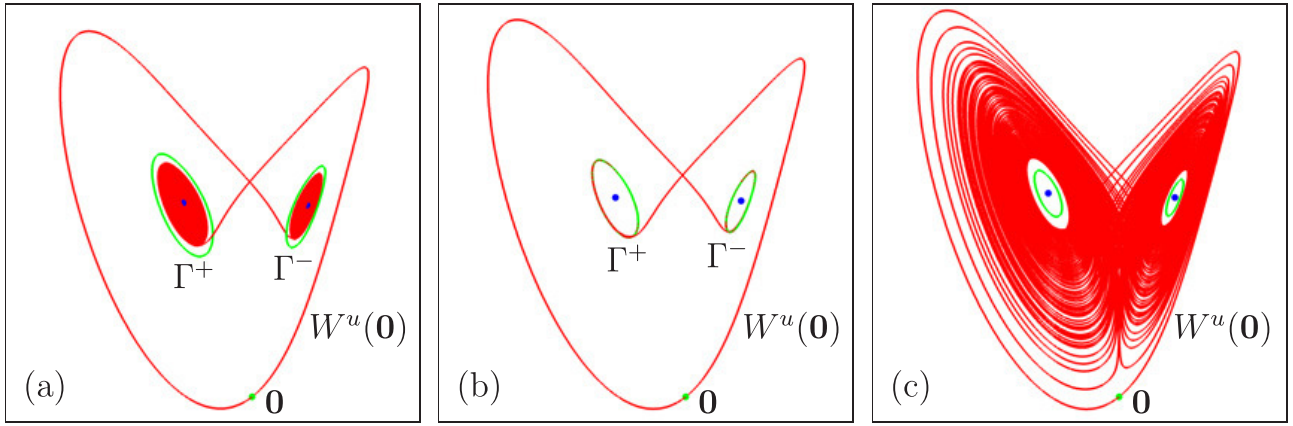
[**PA, Doedel, Krauskopf & Osinga**, Discrete and Continuous Dynamical Systems-A 29 (2011).]

¿Y dónde está el atractor para $r > r_H$?



- $\boxed{r < 1}$ Atractor: $\mathbf{0}$.
  $\boxed{1 < r < r_H}$ Atractores: C^+ y C^-.
  $\boxed{r_H < r}$ Atractor: ?
  - **Infinito?** Todas las trayectorias penetran un elipsoide invariante.
  - **Órbitas periódicas estables?** Lorenz dio argumento convincente para asegurar que cualquier ciclo debe ser inestable para $r > r_H$.
- Sistema disipativo: Conjunto atractor tiene volumen cero.

Aparición de Preturbulencia en la explosión homoclínica



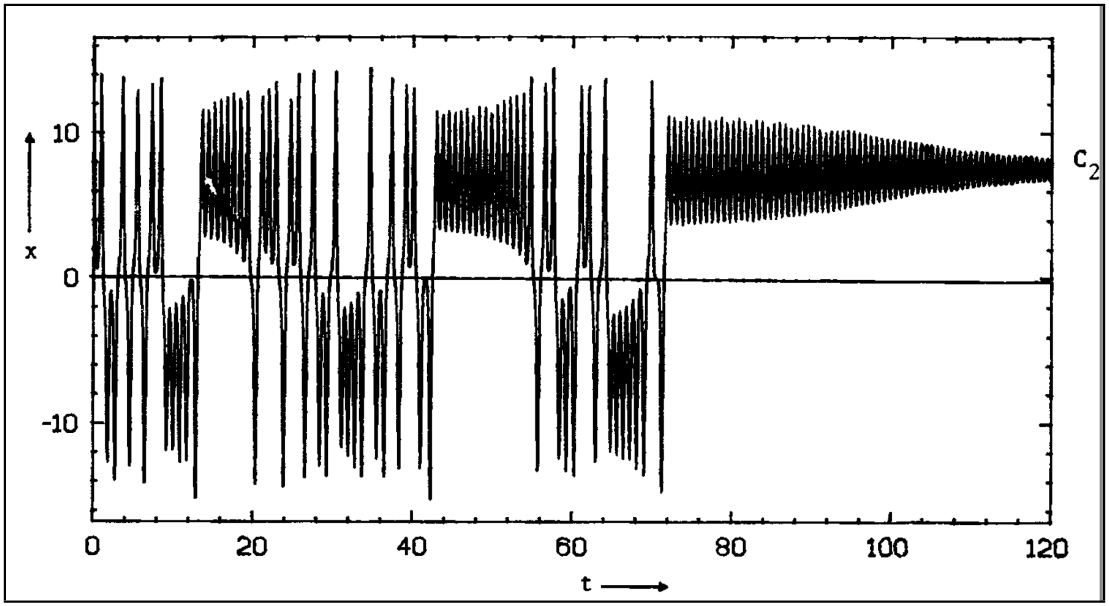
(a) $\boxed{r_{hom} < r < r_{het}:}$ Órbitas periódicas (simétricas) de tipo silla.
$W^u(\mathbf{0})$ converge a $C^{\pm}$.

(b) $\boxed{r = r_{het}:}$ Bifurcación heteroclínica.
$W^u(\mathbf{0})$ converge a $\Gamma^{\pm}$.

(c) $\boxed{r > r_{het}:}$ Preturbulencia.
Conjunto invariante extraño (silla caótica).
Una trayectoria pre-turbulenta típica se comporta erráticamente "visitando" al conjunto invariante caótico antes de converger a C^+ o C^-.

[**Doedel, Krauskopf & Osinga**, Nonlinearity 19 (2006)]

Caos Transiente ($r_{het} < r < r_A$)



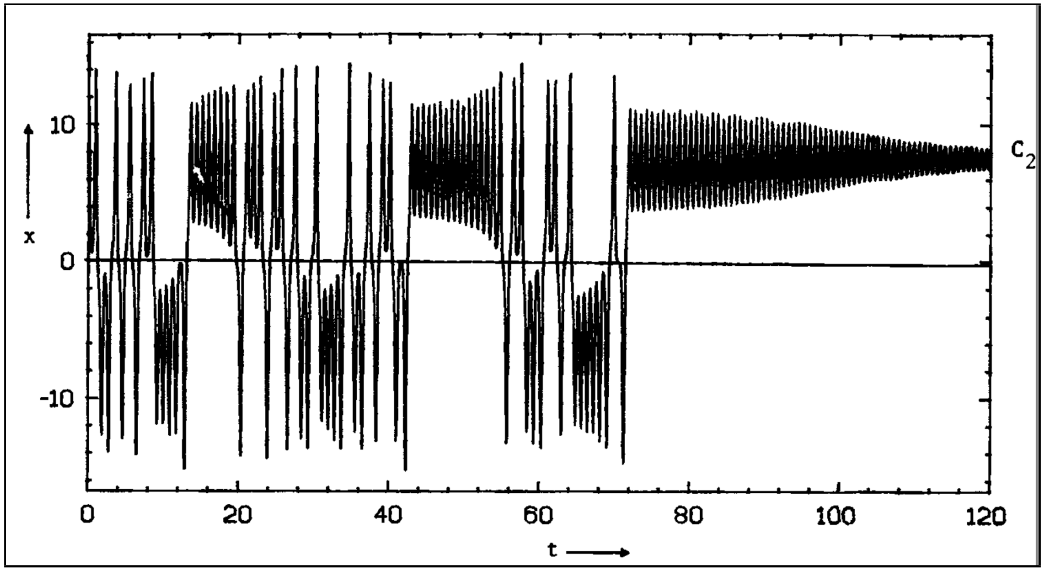
- El conjunto invariante extraño consiste en un número infinito (numerable) de órbitas periódicas, un número infinito (no-numerable) de órbitas aperiódicas, y un número infinito (no-numerable) de órbitas que convergen a $\mathbf{0}$. Todas estas órbitas son (individualmente) no-estables.

[**C. Sparrow**, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, 1982.]

[**E. D. Yorke & J. A. Yorke**, *Metastable chaos: Transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model,*

J. Stat. Phys. 21 (1979).]

Creación del Atractor Caótico ($r \to r_A$)



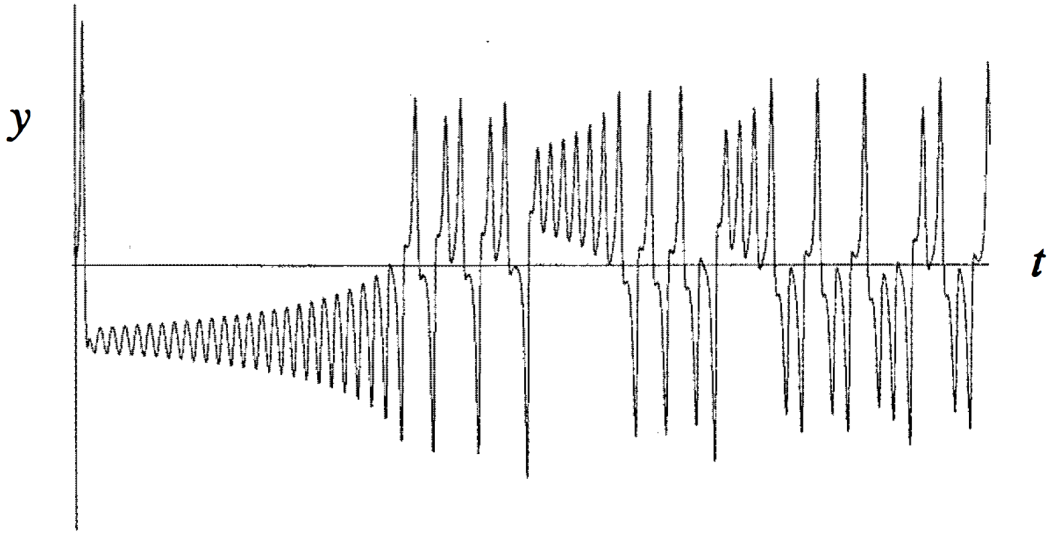
- $T(r)$ = Tiempo que le toma a una órbita típica "visitar" al conjunto invariante caótico antes de converger a alguno de los puntos atractores $C^{\pm}$.
- A medida que r se incrementa, el tiempo $T(r)$ que le toma a una órbita en 'escapar' del comportamiento caótico transiente también aumenta.
- En promedio de todas las órbitas que visitan al conjunto invariante extraño,

$$T(r) \longrightarrow \infty, \qquad \text{cuando} \quad r \to r_A \approx 24.06.$$

$\boxed{r = r_A\text{:}}$ **La silla caótica se convierte en un atractor caótico.**

[**C. Sparrow**, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, 1982.]
[**E. D. Yorke & J. A. Yorke**, *Metastable chaos: Transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model*, J. Stat. Phys. 21 (1979).]

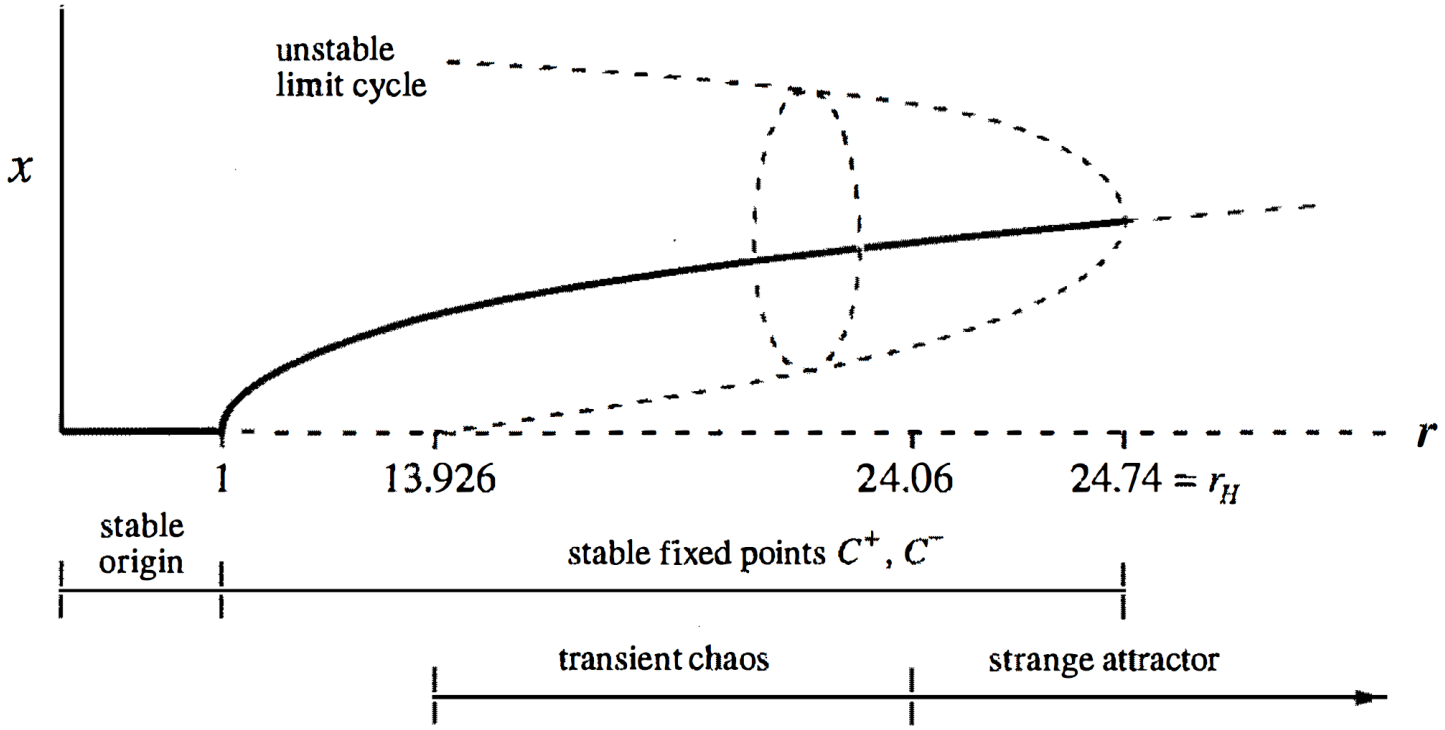
Aparición del Atractor Caótico ($r_A < r < r_H$)



- Órbita típica: a) transiente inicial. b) convergencia al atractor extraño. c) "oscilación" irregular que persiste para $t \to \infty$, pero nunca se repite exactamente: Movimiento aperiódico.
- Todavía hay órbitas que convergen a $C^{\pm}$ (atractores).
- A medida que r se incrementa, el sistema pasa por una secuencia de "explosiones homoclínicas" que generan nuevos conjuntos invariantes extraños.

[**C. Sparrow**, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, 1982.]
[**E. D. Yorke & J. A. Yorke**, *Metastable chaos: Transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model*, J. Stat. Phys. 21 (1979).]

En Resumen: Ruta al Caos



- $r = r_{hom} \approx 13.926$: Primera explosión homoclínica.
- $r_{hom} < r < r_A$: 2 órbitas $\Gamma^{\pm}$ de tipo silla. $\boxed{\dim W^s(\Gamma^{\pm}) = 2,\ \dim W^u(\Gamma^{\pm}) = 2.}$

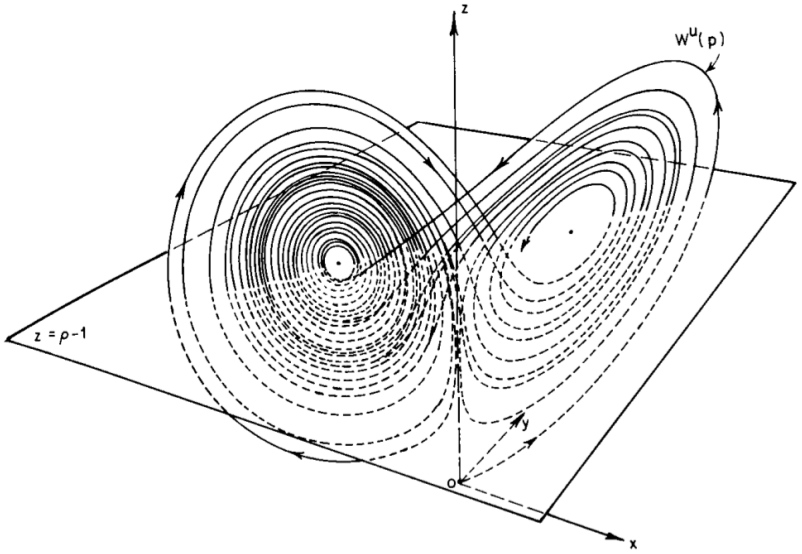
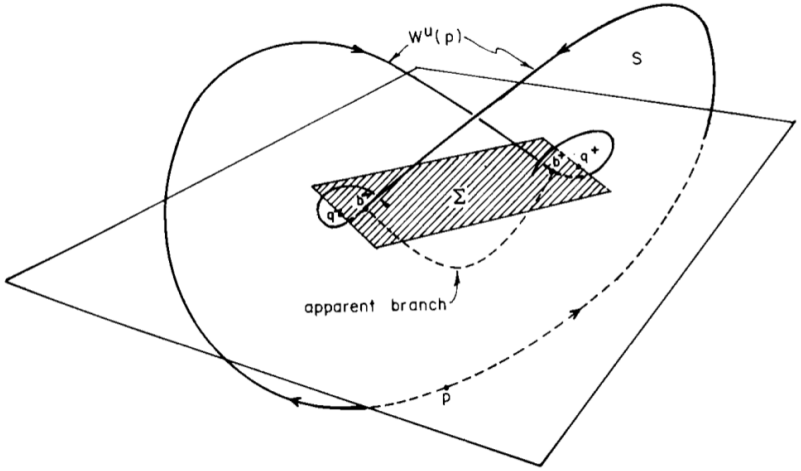
  0 es silla, $C^{\pm}$ son atractores. $+$ Caos transiente.
- $r = r_A \approx 24.06$: Aparición de atractor extraño.
- Para $r > r_H \approx 24.74$: $\Gamma^{\pm}$ desaparecen.

  0 es silla, $C^{\pm}$ son silla-foco. $\boxed{\dim W^s(C^{\pm}) = 1,\ \dim W^u(C^{\pm}) = 2.}$

  El único conjunto atractor que queda es el Atractor de Lorenz.

Videos

Algunos videos de **otros** sistemas caóticos...

Clase 2

- Propiedades del atractor de Lorenz.
- Estructura geométrica del atractor de Lorenz.
- Otras bifurcaciones en el sistema de Lorenz.