

Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos

Pablo Aguirre

PRELUDIO

Estas notas están creadas para servir como acompañamiento en un curso de nivel medio-avanzado sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y nociones de sistemas dinámicos. Los contenidos del curso abarcan desde la teoría clásica de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones (con un enfoque de análisis matemático) hasta la teoría cualitativa (la que posee un enfoque más geométrico y topológico).

Los objetivos del curso son comprender los fundamentos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias; desarrollar habilidades de análisis cuantitativo y cualitativo de soluciones; y determinar el comportamiento local, global y asintótico de sistemas modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este curso puede ser tomado por estudiantes con conocimientos sólidos de análisis, álgebra lineal, y cálculo diferencial e integral en varias variables. Concretamente, se recomienda dominio de los siguientes tópicos (entre otros): distancias y normas, topología en \mathbb{R}^n , convergencia de sucesiones en \mathbb{R} , convergencia uniforme de funciones, espacios de Banach, compacidad, conexidad, valores y vectores propios de matrices, forma canónica de Jordan de una matriz. Algunos textos recomendados para estos pre-requisitos son los siguientes: [10, 12, 13, 16]. También son necesarios conocimientos de ecuaciones diferenciales ordinarias elementales y sus soluciones, a nivel de un primer curso básico (como MAT-080, MAT-081 o MAT-023).

La mayor parte de este texto no corresponde a una obra original, sino a una recopilación de extractos de diversas fuentes. Las principales fuentes en que se basa parcialmente cada capítulo son las referencias que aparecen en la Bibliografía. Su uso es exclusivamente con fines académicos y pedagógicos.

Hay que notar que las primeras versiones de estos apuntes fueron producidas en el marco de la pandemia y cuarentena por el coronavirus del 2020-2021, para suplir las carencias de la docencia de emergencia a distancia. Como tal, estos apuntes fueron creados con los escasos recursos tecnológicos propios para la generación de material gráfico con los que contaba en aquel entonces en casa. De seguro

los estudiantes de esas primeras versiones debieron luchar para dar sentido a las imágenes hechas a mano y de baja calidad. A partir del 2022, sin embargo, contamos con excelentes figuras fabricadas por Dana Contreras.

El texto que tienen en sus manos ha sido revisado y complementado gracias a los certeros aportes, observaciones y sugerencias de los estudiantes del curso y gracias al valioso feedback de la profesora Isabel Flores con quien dicté la asignatura coordinadamente el 2020 y 2021. Cualquier error u omisión esencial que siguiera existiendo en esta versión es enteramente de de mi mi resqo~>nsbiliδbab.

pablo aguirre

2390123 – MMXXV

Índice general

1. Ejemplos introductorios	7
2. Existencia, unicidad y propiedades fundamentales	12
2.1. Definiciones y notación preliminares	12
2.2. El Problema de Cauchy	14
2.3. El teorema de Picard y la unicidad de soluciones del problema de Cauchy	21
2.4. El teorema de Peano	28
2.5. Intervalo maximal de existencia	30
2.6. Dependencia de las soluciones a las condiciones iniciales	35
2.7. Dependencia de las soluciones a los parámetros	36
2.8. Sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior	37
2.8.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden	38
2.8.2. Ecuaciones diferenciales de orden superior	39
2.9. Ejercicios	41
3. Ecuaciones diferenciales lineales	47
3.1. Preliminares	48
3.1.1. El problema de Cauchy para EDOs lineales	49
3.1.2. Espacio de soluciones de una EDO lineal homogénea	52
3.2. Soluciones fundamentales	55
3.3. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	58
3.4. Sistemas lineales bidimensionales	65
3.4.1. Caso a) Valores propios reales y distintos	66

3.4.2.	Caso b) Valores propios complejos conjugados	69
3.4.3.	Caso c) Valores propios reales e iguales	71
3.4.4.	Resumen: Estabilidad de sistemas lineales en el plano	73
3.5.	Conjugación de sistemas lineales	74
3.6.	Clasificación topológica de sistemas lineales hiperbólicos	79
3.7.	Ejercicios	83
4.	Teoría cualitativa y sistemas dinámicos	95
4.1.	Campos de vectores, sistemas dinámicos y flujos	96
4.2.	Retrato de fase de un campo vectorial	101
4.3.	Equivalencia y conjugación de campos vectoriales	103
4.4.	Ejercicios	107
5.	Estabilidad local de equilibrios hiperbólicos	109
5.1.	Ejercicios	115
6.	Estabilidad local de soluciones periódicas	119
6.1.	Del campo de vectores a la aplicación de Poincaré	120
6.2.	Ciclos límite en el plano	125
6.3.	Ejercicios	131
7.	Conjuntos límite y el teorema de Poincaré-Bendixson	134
7.1.	Conjuntos α -límite y ω -límite	134
7.2.	El teorema de Poincaré-Bendixson	144
7.3.	Aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson	153
7.4.	Ejercicios	157
8.	Otros criterios para detectar o descartar soluciones periódicas	160
8.1.	Sistemas gradientes	160
8.2.	Criterio de Dulac	162
8.3.	Ecuaciones de Liénard	163
8.4.	Ejercicios	168

9. Sistemas conservativos	171
9.1. Ejercicios	177
10. Teoría de estabilidad de Lyapunov	180
10.1. El criterio de Lyapunov	183
10.2. Ejercicios	190
11. Método de la variedad central para equilibrios parcialmente hiperbólicos	193
11.1. Propiedades de las variedades centrales	194
11.2. Inclusión de direcciones inestables	202
11.3. Ejercicios	204
12. Técnica del blow-up	205
12.1. Blow-up polar	206
12.2. Blow-up radial	212
12.3. Ejercicios	218
13. Bifurcaciones	219
13.1. Bifurcación silla-nodo	220
13.2. Bifurcación transcítica	225
13.3. Bifurcación pitchfork	227
13.4. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf	228
13.5. Ejercicios	233
14. Caos	240
14.1. El atractor caótico de Lorenz	240
14.1.1. El sistema de Lorenz es disipativo	241
14.1.2. Bifurcaciones en el sistema de Lorenz	243
14.1.3. Ruta al caos	245
14.1.4. Estructura del atractor de Lorenz	248
14.1.5. El mapeo de Lorenz	252
14.1.6. Exponentes de Lyapunov	253
14.2. El sistema de Rössler	258

14.2.1. Estirar y doblar: la receta para crear caos.	259
14.3. Ecuación de Duffing	263
14.4. Ejercicios	267

Capítulo 1

Ejemplos introductorios

Las ecuaciones diferenciales están en todas partes. Desde vibraciones mecánicas, láseres, ritmos biológicos, circuitos superconductores, brotes epidémicos de enfermedades infecciosas, osciladores bioquímicos, etc. Su importancia para el entendimiento y desarrollo de estas y otras aplicaciones es incalculable. Y desde el punto de vista teórico, su estudio ha dado pie en el último siglo al desarrollo de la teoría moderna de sistemas dinámicos y teoría del caos.

Comenzaremos nuestro viaje por las ecuaciones diferenciales ordinarias (en adelante, EDOs) a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 1 (2^{da} Ley de Newton) A partir de los postulados de Isaac Newton tenemos que la fuerza $\vec{F}(x, t)$ aplicada a una masa m en la posición x en el instante t induce una aceleración proporcional \vec{a} mediante la fórmula: $\vec{F} = m\vec{a}$. Si denotamos $\vec{a} = \ddot{x}$, obtenemos la expresión equivalente

$$m\ddot{x} = F(x, t)$$

De esta sola ecuación es posible derivar muchas EDOs que modelan el movimiento en distintos escenarios. Un ejemplo es el oscilador armónico:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t, x),$$

el cual representa el desplazamiento $x(t)$ de una masa m unida a un resorte lineal con constante de restauración K , y sometido a una fuerza externa $f(x, t)$. Otro ejemplo de EDO proveniente de la dinámica del movimiento de los cuerpos es la

ecuación del péndulo clásico:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = f(t, x).$$

Aquí, se describe el desplazamiento angular $\theta = \theta(t)$ en función del tiempo $t > 0$ de un péndulo de masa m (sujeto a la fuerza de gravedad) unido a una cuerda rígida sin masa de longitud L , la cual ejerce una tensión sobre la masa, y en ausencia de roce con el aire. Nuevamente, aquí también podría haber una fuerza externa $f(t, x)$ ejercida sobre el sistema.

Ejemplo 2 (Ecuación Logística) Usada ampliamente en la modelación de la evolución de poblaciones. Tenemos:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Esta EDO modela el crecimiento de una población, la cual crece a una tasa per cápita neta r y en donde los recursos disponibles en el ambiente están limitados, existiendo una llamada *capacidad de carga del ambiente* $K > 0$ que simboliza este umbral asintótico de explotación de recursos por parte de la población.

Ejemplo 3 (Ecuación de Van der Pol) Fue usada en modelación de circuitos eléctricos no lineales en las primeras radios comerciales.

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Ejemplo 4 (Ecuaciones de Lorenz) Este sistema de tres EDOs representa una versión simplificada del comportamiento del aire en la atmósfera, al modelar la velocidad de una capa bidimensional de un fluido y perturbaciones de su temperatura al ser calentada desde abajo.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases}$$

Este modelo se ha popularizado gracias a la llamada *mariposa de Lorenz*, el atractor caótico formado por las soluciones y que ha contribuido enormemente al surgimiento de lo que ahora conocemos como teoría del caos.

Ejemplo 5 Considere la EDO lineal unidimensional

$$\dot{x} = \alpha x,$$

con $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$. La solución exacta de esta EDO queda determinada por la elección de la condición inicial $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}$ y es de la forma

$$x(t) = e^{\alpha t} x_0. \quad (1.1)$$

Más aún, *no existe ninguna otra solución* tal que el valor de $x(t)$ sea x_0 cuando $t = 0$. Para verificar esto, sea $u(t)$ cualquier solución y calculemos la derivada de $u(t)e^{-\alpha t}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u(t)e^{-\alpha t}) &= u'(t)e^{-\alpha t} + u(t)(-\alpha e^{-\alpha t}) \\ &= \alpha u(t)e^{-\alpha t} - \alpha u(t)e^{-\alpha t} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(t)e^{-\alpha t}$ es una constante k , y así $u(t) = ke^{\alpha t}$. Finalmente, si $u(0) = x_0$, entonces $k = x_0$ y $u(t)$ coincide con (1.1).

Notemos que existe una solución especial de esta EDO cuando $x_0 = 0$. Esta es la solución constante $x(t) \equiv 0$. Una solución constante como ésta se dice una **solución de equilibrio** o **punto de equilibrio** para la ecuación. Muchas veces, los equilibrios están entre las soluciones más importantes de las ecuaciones diferenciales.

La constante α en la EDO puede considerarse como un parámetro. Si α cambia, la ecuación cambia y también sus soluciones. ¿Podemos describir cualitativamente cómo cambian las soluciones? El signo de α aquí es crucial. La Figura 1.1 muestra bosquejos de las posibles gráficas de la solución de $\dot{x} = \alpha x$ dependiendo del signo de la condición inicial x_0 y del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular, si $\alpha < 0$, la solución $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$; si $\alpha = 0$, $x(t) \equiv x(0) = \text{cte}$; y si $\alpha > 0$, entonces $x(t) \rightarrow \pm\infty$ para $t \rightarrow \infty$.

Aunque estos comportamientos son fácilmente deducibles de la forma explícita de la solución (1.1), también es posible visualizar el comportamiento cualitativo de $x(t)$ al comparar la velocidad \dot{x} con la posición x como en la Figura 1.2. Cuando $\alpha < 0$, en el panel (a), la pendiente de \dot{x} versus x es negativa y, luego, $\dot{x} > 0$ para $x < 0$, y $\dot{x} < 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, la función $x(t)$ es creciente para $x < 0$ y

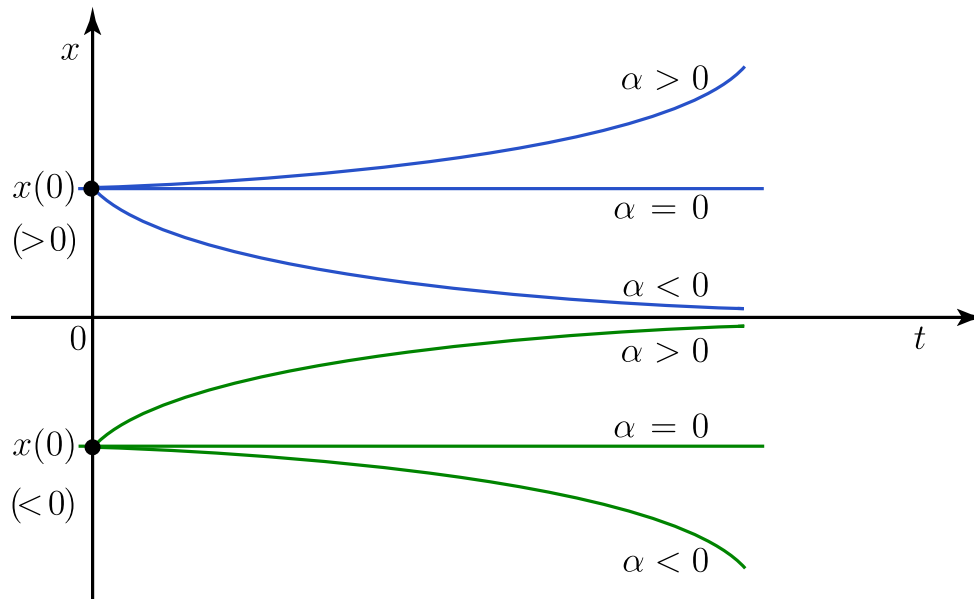


Figura 1.1: Bosquejo de las soluciones de $\dot{x} = \alpha x$ dependiendo del signo de la condición inicial x_0 y del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

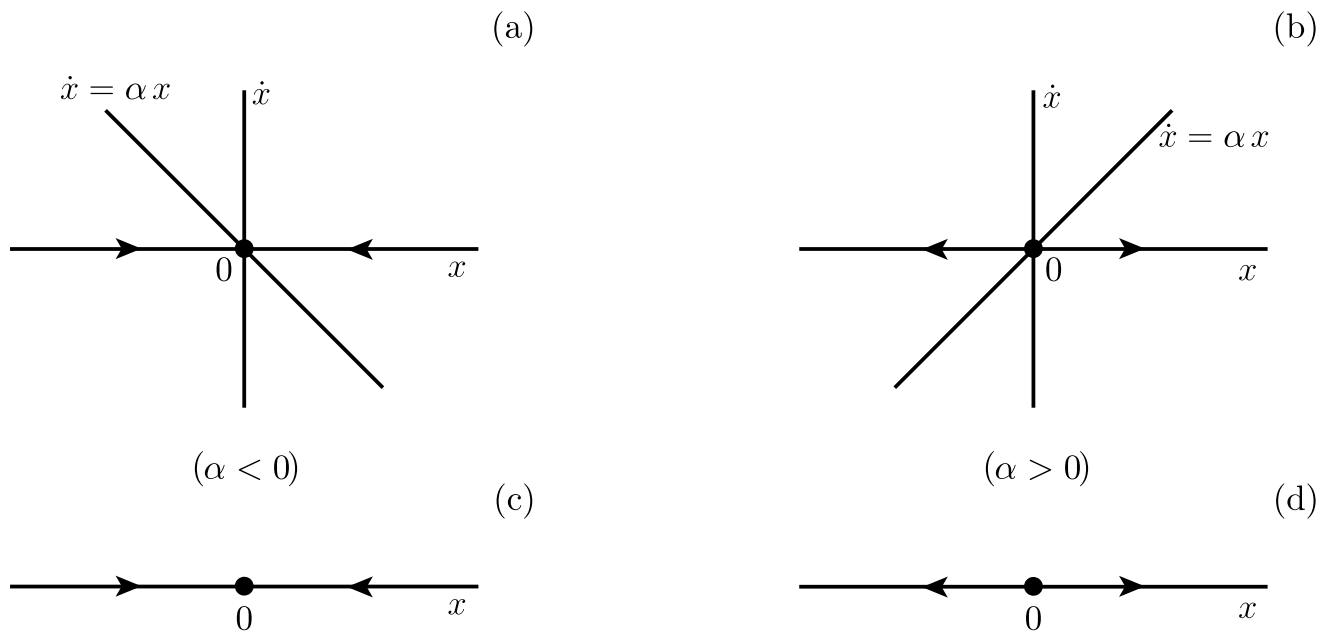


Figura 1.2: La comparación de la velocidad \dot{x} versus la posición x en los casos $\alpha < 0$ (panel (a)) y $\alpha > 0$ (panel (b)) permite obtener las líneas de fase en los paneles (c) y (d), respectivamente.

decreciente para $x > 0$. Esto da origen a la **línea de fase** del panel (c), la cual indica que toda solución con condición inicial no-nula decae hasta la posición de reposo: Decimos que el origen es un punto de equilibrio *atractor*. Contrariamente, para $\alpha > 0$, en el panel (b), la línea de fase asociada que se obtiene en el panel (d) indica que las soluciones se alejan del origen, el cual se dice un *repulsor*.

La ecuación $x' = \alpha x$ es *estable* en algún sentido si $\alpha \neq 0$. More precisamente, si reemplazamos α por otra constante β con el mismo signo que α , entonces el comportamiento cualitativo de las soluciones no cambia. Pero si $\alpha = 0$, el más mínimo cambio en α produce un cambio radical en el comportamiento de las soluciones. Por lo tanto, decimos que tenemos una *bifurcación* en $\alpha = 0$ en la familia 1-paramétrica $x' = \alpha x$.

El ejemplo 5 cubre muchas de las interrogantes que queremos resolver sobre una EDO, desde su solución explícita hasta el comportamiento de sus soluciones. Sin embargo, en general, no es posible hallar una solución de una EDO obteniendo una fórmula cerrada como en el ejemplo 5. Sin embargo, en ese mismo ejemplo vimos que uno sí puede obtener mucha información útil sin necesidad siquiera de intentar hallar soluciones explícitas. Inspirados en este ejemplo, podemos plantear las principales preguntas que uno puede hacerse frente a una EDO:

1. Existencia y unicidad de soluciones: ¿Cuándo una EDO posee una solución? Y si la tiene, ¿Es única o pueden haber multiplicidad de soluciones?
2. ¿Cuál es el comportamiento cualitativo de la solución? ¿Es creciente, decreciente, oscilatoria, acotada? ¿Decae a un estado de reposo o nunca se asienta en un estado de equilibrio en el largo plazo?
3. ¿Cómo varían las soluciones si variamos los valores de los parámetros en las ecuaciones?

Capítulo 2

Existencia, unicidad y propiedades fundamentales

2.1. Definiciones y notación preliminares

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria general:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua de $n + 1$ variables definida en un dominio abierto Ω . Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de la recta, es decir, un conjunto conexo con interior no vacío (i.e., no limitado a un punto). El intervalo I puede ser abierto, cerrado o semicerrado, acotado o no acotado, finito o infinito.

A lo largo de este texto también consideremos la norma $\|(t, x)\| = \max\{|t|, \|x\|\}$, donde $\|\cdot\|$ denota alguna norma en \mathbb{R}^n . Por ejemplo, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$, etc.

Definición 1 *Una solución de la EDO (2.1) es una función diferenciable*

$$\begin{aligned} \varphi : I &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t &\rightarrow \varphi(t) = (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

tal que

1. *El gráfico de φ en I está contenido en Ω . Es decir, $gr(\varphi) := \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset \Omega$.*

2. La función φ satisface (2.1) en I , i.e., $\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.

En esta definición, si $t \in \partial I$ es un punto extremo de I , la igualdad $\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t))$ es relativa a la derivada lateral respectiva.

La idea geométrica de esta definición es la siguiente: La variable independiente t parametriza la gráfica de φ ; y en cada punto $(t, \varphi(t))$, el vector tangente a la curva $gr(\varphi)$ es $f(t, \varphi(t))$; ver figura 2.1.

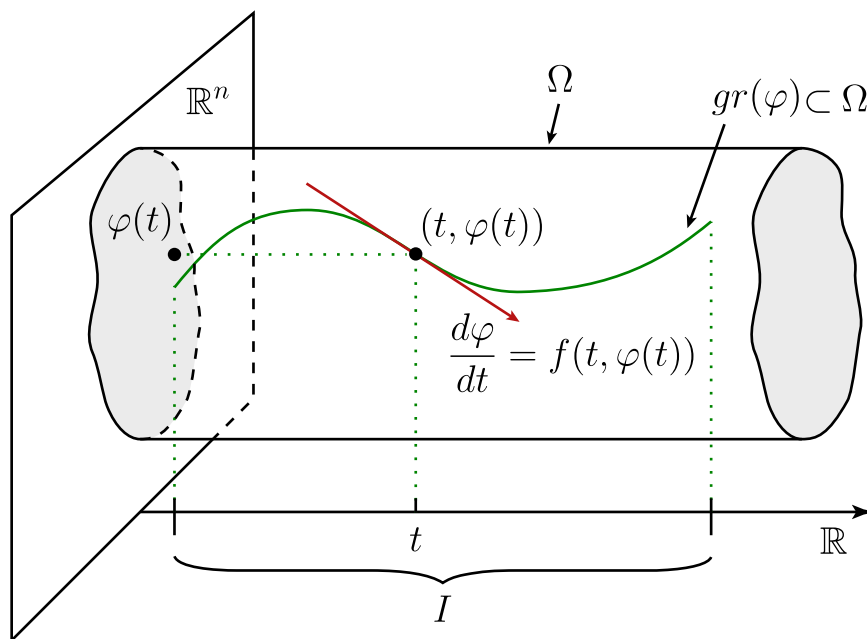


Figura 2.1: Interpretación geométrica de (2.1). El vector $\dot{\varphi} = f(t, \varphi(t))$ es tangente a la curva definida por $\varphi = \varphi(t)$ en cada punto.

La EDO (2.1) se llama **ecuación diferencial de orden 1** y se denota abreviadamente por $\dot{x} = f(t, x)$ o bien $x' = f(t, x)$.

Formulación equivalente. Sea $f = (f_1, \dots, f_n)$, donde $f_i = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\forall i = 1, \dots, n$, son las funciones componente. Decimos que $\varphi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ con $\phi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, n$, es una solución de $\dot{x} = f(t, x)$ si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen simultáneamente:

1. Cada una de las funciones ϕ_i es diferenciable en I ;

2. El punto $(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)) \in \Omega, \forall t \in I$;
3. Las funciones ϕ_1, \dots, ϕ_n satisfacen el sistema de n ecuaciones diferenciales escalares

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt}(t) &= f_1(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)); \\ \frac{d\phi_2}{dt}(t) &= f_2(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)); \\ &\vdots \\ \frac{d\phi_n}{dt}(t) &= f_n(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)). \end{cases}$$

Por esta razón, se dice que la ecuación (escrita en notación vectorial) $\dot{x} = f(t, x)$ es *equivalente* al sistema de EDOs escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

2.2. El Problema de Cauchy

Ejemplo 6 Consideremos $\Omega = I \times \mathbb{R}$, y una función $f(t, x) = g(t)$ continua en I y que no depende de x . Entonces la EDO $\dot{x} = g(t)$ se puede resolver explícitamente por el método de separación de variables:

$$\int dx = \int g(t) dt + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante de integración. Luego, una función φ es solución si y solo si

$$\varphi(t) = C + \int_{t_0}^t g(s) ds,$$

donde $t_0 \in I$. De esta forma, conseguimos una familia de soluciones parametrizada por $C = \varphi(t_0) \in \mathbb{R}$. Por cada punto $(t_0, \varphi(t_0)) \in \Omega$ pasa la gráfica de una sola función φ ; ver figura 2.2 (izquierda). Por lo tanto, decimos que dada la *condición inicial* $x(t_0) = x_0$, existe una única solución φ tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Esto es equivalente a decir que para especificar una solución única de esta EDO necesitamos conocer el dato *inicial* $x(t_0) = x_0$.

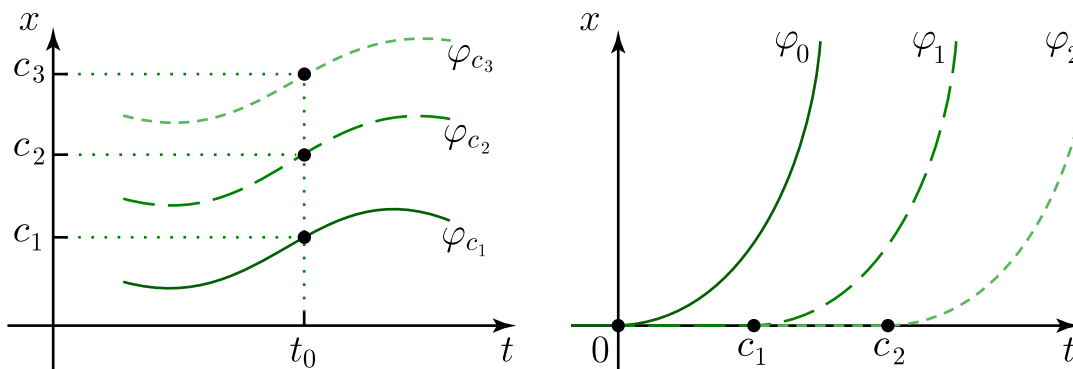


Figura 2.2: Izquierda: ejemplo 5; derecha: ejemplo 6.

Ejemplo 7 Sea $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, y consideremos la EDO

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}.$$

Notemos que aquí $f(t, x) = 3x^{2/3}$ solo depende de x y no de t . Decimos que la EDO es *autónoma*. Consideremos la familia de funciones $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3, & t \geq c; \\ 0, & t < c. \end{cases}$$

Por verificación directa, es fácil ver que las funciones φ_c son soluciones de la EDO en $I = \mathbb{R}$, para todo $c \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la función constante $\varphi(t) \equiv 0$ también es una solución definida para todo $t \in I$. Sin embargo, al graficar todas estas funciones en la figura 2.2 (derecha), nos percatamos que en cada punto de la forma $(t_0, 0)$ pasan infinitas soluciones!

Definición 2 Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria junto con una condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

El problema de hallar una solución φ en un intervalo I que contenga a t_0 y tal que $\varphi(t_0) = x_0$ se denomina **Problema de Cauchy** o **Problema de valor inicial**. En tal caso, φ es la solución al problema de Cauchy con datos iniciales (t_0, x_0) .

Observación 1 Por el teorema fundamental de calculo, el problema de Cauchy es equivalente a resolver la ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(s)) ds.$$

El problema de Cauchy posee la siguiente interpretación geométrica. Si consideramos la gráfica de la solución φ en $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, la recta tangente $l(t, x)$ a esta gráfica en el punto (t, x) posee pendiente $f(t, x)$, pues $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, x)$; ver figura 2.3. Por lo tanto, la EDO $\dot{x} = f(t, x)$ define un campo de pendientes en Ω . Luego, resolver el problema de Cauchy se reduce a hallar (si existen) las curvas que pasan por (t_0, x_0) cuyas pendientes en cada punto coinciden con aquellas dadas por el campo de direcciones f .

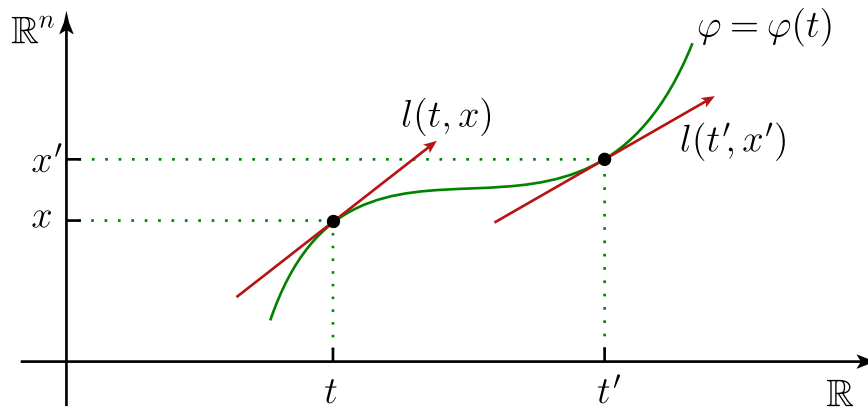


Figura 2.3:

Ejemplo 8 (*Ecuación autónoma*) Consideremos $\Omega = \mathbb{R} \times]a_1, a_2[$, y $f(t, x) = f(x)$ una función continua. Supongamos que f no se anula en el intervalo abierto $]a_1, a_2[$. Escojamos $x_0 \in]a_1, a_2[$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, y calculemos la solución del problema de Cauchy $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$. Sea φ una solución. Luego, $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$, $\varphi(t_0) = x_0$. Equivalentemente obtenemos

$$\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1.$$

Por otro lado, sea $F :]a_1, a_2[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)}.$$

Entonces $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$ en $]a_1, a_2[$. Luego, por el teorema de la función inversa, F es invertible en $]a_1, a_2[$ con F^{-1} bien definida en un intervalo $]b_1, b_2[= F(]a_1, a_2[)$. Así obtenemos:

$$1 = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = \varphi'(t)F'(\varphi(t)),$$

lo cual es válido si y solo si

$$(F \circ \varphi)'(t) = 1.$$

Integrando esta ecuación entre t_0 y t :

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = t - t_0.$$

Como $F(\varphi(t_0)) = F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{ds}{f(s)} = 0$, entonces $F(\varphi(t)) = t - t_0$. Por lo tanto, φ viene dada en forma única por

$$\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0), \quad t \in]t_0 + b_1, t_0 + b_2[.$$

Así, la gráfica de φ corresponde a la gráfica de F^{-1} trasladada t_0 unidades, y donde b_1, b_2 son las preimágenes de los valores a_1 y a_2 , respectivamente; ver figura 2.4.

Ejemplo 9 (*Ecuación de variables separables*) Consideremos el problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = g(t)f(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

donde g, f son continuas en intervalos abiertos $]t_1, t_2[$ y $]a_1, a_2[$, respectivamente, y f no se anula en $]a_1, a_2[$. Este problema puede ser resuelto en forma directa al ser la EDO del tipo separación de variables. Veremos en este ejemplo en qué consiste formalmente este método estándar y por qué es válido para resolver el problema de Cauchy. Sea φ una solución. Luego, $\varphi'(t) = g(t)f(\varphi(t))$. Entonces,

$$\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = g(t).$$

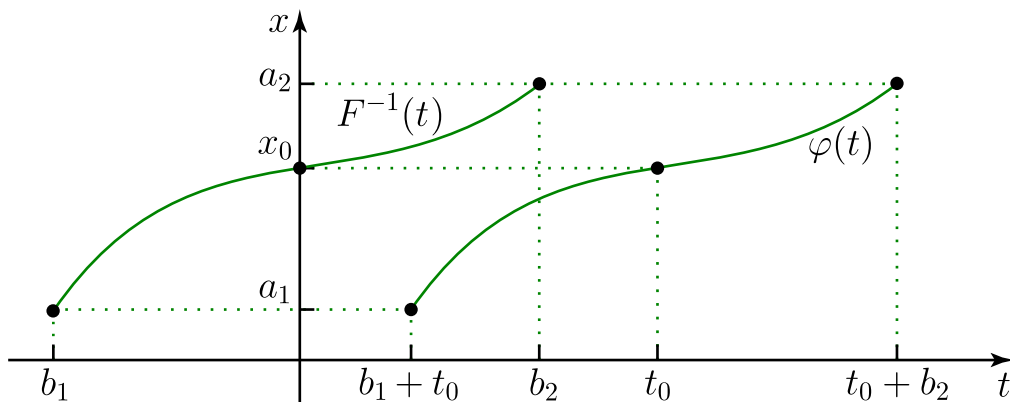


Figura 2.4:

Por otro lado, al igual que en el ejemplo anterior, definamos $F :]a_1, a_2[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)}.$$

Entonces $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$ en $]a_1, a_2[$. Luego, por el teorema de la función inversa, F es invertible en $]a_1, a_2[$ con F^{-1} bien definida en un intervalo $]b_1, b_2[= F(]a_1, a_2[)$. Luego,

$$g(t) = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = (F \circ \varphi)'(t).$$

Integrando a ambos lados entre t_0 y t obtenemos:

$$\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau = F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = F(\varphi(t)),$$

pues $F(\varphi(t_0)) = 0$. Entonces $\varphi(t)$ queda definida en forma única como

$$\varphi(t) = F^{-1} \left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right).$$

Ejemplo 10 (*Ecuaciones lineales*) Consideremos un problema de Cauchy donde la EDO es lineal:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

donde las funciones $a(t), b(t)$ son continuas en $]t_1, t_2[$. Si $b(t) \equiv 0$ entonces la ecuación lineal es *homogénea* y se reduce al tipo de variables separables. Por otro lado, si $b(t) \neq 0$, podemos usar el *método de variación de parámetros*: Considere el cambio de variable

$$x = c \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right),$$

donde $c = c(t)$ es la nueva incógnita a hallar. Sustituyendo en la EDO tenemos:

$$\dot{c}(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) + c(t) a(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) = a(t)c(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) + b(t),$$

obteniendo el problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{cases} \dot{c} = b(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right), \\ c(t_0) = x_0, \end{cases}$$

cuya EDO es de variable separable. Luego la solución (única) es

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp \left(- \int_{t_0}^s a(\tau) d\tau \right) ds.$$

Por lo tanto, la solución única del problema de Cauchy original con EDO lineal no homogénea es:

$$\varphi(t) = c(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right), \quad t \in]t_1, t_2[.$$

Ejemplo 11 (*Sistemas de ecuaciones lineales*) Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(t)x - \beta(t)y + \delta(t), \\ \dot{y}(t) = \beta(t)x + \alpha(t)y + \eta(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y las funciones $\alpha, \beta, \delta, \eta$ son continuas en un intervalo $]t_1, t_2[$ que contiene a t_0 . Si utilizamos notación compleja $z = x + iy$ y definimos $a(t) =$

$\alpha(t) + i\beta(t)$, $b(t) = \delta(t) + i\eta(t)$, entonces el problema de valor inicial nos queda de la forma

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= a(t)z + b(t), \\ z(t_0) &= z_0 = x_0 + iy_0. \end{cases}$$

Por el ejemplo anterior, este problema de Cauchy posee solución única dada por:

$$z(t) = c(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right), \quad t \in]t_1, t_2[,$$

donde

$$c(t) = z_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau\right) ds.$$

A partir de esta solución podemos obtener información cualitativa sobre el comportamiento de las soluciones en el plano (x, y) . Por ejemplo, supongamos que estamos en el caso homogéneo (i.e., $\delta \equiv \eta \equiv 0$), y los coeficientes de la EDO son constantes (i.e., $\alpha(t) \equiv \alpha$, $\beta(t) \equiv \beta$). Sin pérdida de generalidad, asumamos que $t_0 = 0$. Bajo estos supuestos, la solución se reduce a

$$z(t) = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t},$$

la cual al estar en notación polar es fácilmente interpretable: El término $e^{\alpha t}$ representa un movimiento radial en el plano complejo, mientras que el término $e^{i\beta t}$ es un movimiento angular. Si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$), la amplitud de la solución (i.e., distancia de un punto en la solución hacia el origen) aumenta (resp. disminuye) a medida que $t > 0$ avanza; si $\beta > 0$ (resp. $\beta < 0$), la solución rota en sentido antihorario (resp. horario) para $t > 0$. La figura 2.5 ilustra el comportamiento cualitativo de las soluciones en cuatro casos. En particular, en el panel (c), si $\alpha = 0$, todas las soluciones con $z_0 \neq 0$ corresponden a movimientos oscilatorios uniformes alrededor del origen. Geométricamente, estas soluciones son círculos concéntricos cuyo radio (constante) es z_0 . En el panel (d), si $\beta = 0$, el término de rotación está ausente y todas las soluciones decaen exponencialmente al origen a una tasa $\alpha < 0$. Geométricamente, estas soluciones son semirectas con pendiente y_0/x_0 con extremo en el origen.

En todos estos casos, dado que las soluciones son únicas, las gráficas correspondientes a soluciones con dos condiciones iniciales distintas no pueden intersectarse.

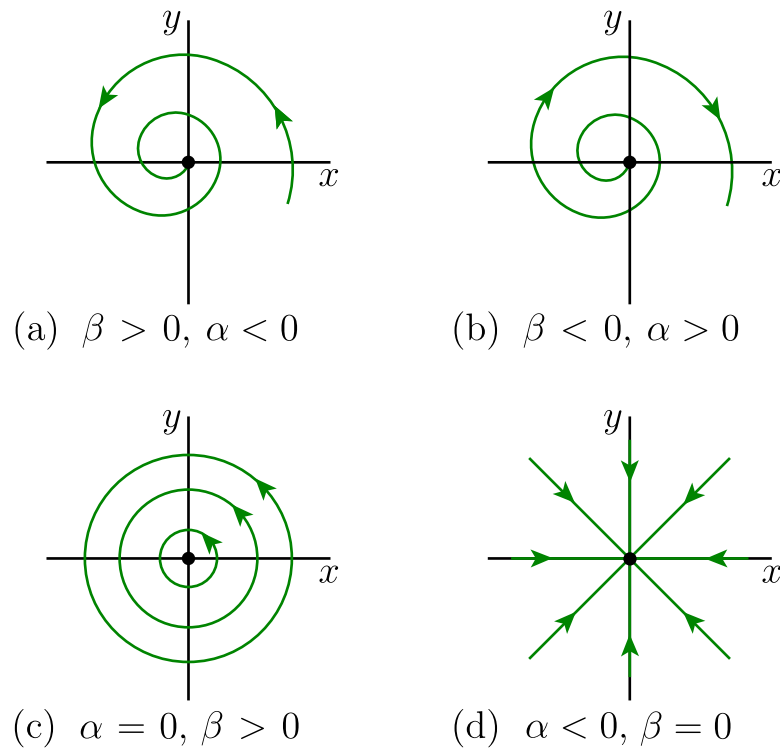


Figura 2.5:

Es decir, dos espirales con condiciones iniciales distintas no se intersectan (casos (a) y (b)). Dos círculos en el panel (c) no se intersectan a menos que tengan el mismo radio z_0 , i.e., la misma condición inicial, en cuyo caso coincidirían a lo largo de todo el círculo, siendo en la práctica *la misma* solución. Podemos aplicar el mismo argumento al caso de las semirectas en el panel (d).

2.3. El teorema de Picard y la unicidad de soluciones del problema de Cauchy

Definición 3 Una función $f : \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se dice **función de Lipschitz o -lipschitziana** en Ω si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y| \quad , \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

En tal caso, la constante K se dice la **constante de Lipschitz**.

Definición 4 f se dice **localmente Lipschitz** en Ω si cada punto (t_0, x_0) tiene una vecindad $V := V(t_0, x_0)$ tal que:

$$f|_V \text{ es Lipschitz en } V.$$

Para dar una idea de lo que significa que una función f sea Lipschitziana, consideremos el caso en que f no depende de la variable independiente t y $\Omega = \mathbb{R}$. En tal caso tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq K|x - y| \quad ; \quad \forall x \neq y \\ \Rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} &\leq K. \end{aligned}$$

Por lo que las pendientes de f son acotadas. Si f es derivable, entonces estas derivadas serán acotadas. Recíprocamente, si f es diferenciable con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$, la matriz jacobiana $D_x f$ es continua en Ω , luego $f \in C^1(\Omega)$, lo cual implica que f es localmente Lipschitz. Por otro lado, si $f \in C^1(\Omega)$ con respecto a x , entonces f es de tipo Lipschitz si y solo si $D_x f$ es acotada.

Lema 1 (*Lema de Contracción*) Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $F : X \rightarrow X$ continua y una contracción, es decir, F es Lipschitziana con constante de Lipschitz $0 < K < 1$. Entonces, existe un único punto $p \in X$ tal que $F(p) = p$ (es decir, p es el único punto fijo de F). Además, $F^n(x) \rightarrow p$, si $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$ (o sea, p es un atractor para F).

DEMOSTRACIÓN. *Paso 1:* Demostremos primero la unicidad del punto fijo (asumiendo que existe al menos uno). Sean $p_1, p_2 \in X$ dos puntos fijos de F . Luego:

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= d(F(p_1), F(p_2)) \\ &\leq K d(p_1, p_2). \end{aligned}$$

Dado que $K < 1$ entonces $d(p_1, p_2) = 0$, y por lo tanto $p_1 = p_2$.

Paso 2: Probemos ahora que la contracción F posee un punto fijo. Sea $x \in X$ y consideremos la sucesión $\{x_n\}$, definida como $x_n := F^n(x) = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{n \text{ veces}}(x)$.

Demostraremos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sean $n, r \in \mathbb{N}$. Como F es una contracción, se tiene:

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &= d(F^{n+r}(x), F^n(x)) \\ &= d(F^n(x_r), F^n(x)) \\ &= d(F(F^{n-1}(x_r)), F(F^{n-1}(x))) \\ &\leq K d(F^{n-1}(x_r), F^{n-1}(x)) \\ &\leq K^n d(x_r, x) \\ &= K^n d(F^r(x), x). \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} d(x, F^r(x)) &\leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \cdots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \\ &\leq d(x, F(x)) + K d(x, F(x)) + \cdots + K^{r-1} d(x, F(x)) \\ &= (1 + K + K^2 + \cdots + K^{r-1}) d(x, F(x)) \\ &= \frac{1 - K^r}{1 - K} d(x, F(x)) \\ &< \frac{1}{1 - K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &\leq K^n d(F^r(x), x) \\ &\leq \frac{K^n}{1 - K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Luego, dado que $0 < K < 1$, se cumple que, $d(x_{n+r}, x_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio completo X , y luego, es convergente.

Sea $p \in X$ el punto límite de $\{x_n\}$, es decir, $p = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)$. Se tiene:

$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p.$$

Por lo tanto, $F(p) = p$, y p es un punto fijo de X . Además, dado que $x \in X$ fue escogido en forma arbitraria, p es atractor para F , es decir, $p = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)$, para todo $x \in X$. ■

Corolario 1 Sea X un espacio métrico completo y $F : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Si F^m es una contracción para algún $m > 0$, entonces existe un único punto fijo p para F . Además, p es un atractor para F .

DEMOSTRACIÓN. Por el lema de contracción, existe un único punto fijo (llamémosle p) para F^m . Sea $n = mk + l$, con $0 \leq l < m, k \in \mathbb{N}$ (En particular, esto implica que $n > k$). Dado $x \in X$, el punto $F^l(x) \in X$. Como p es atractor de F^m , tenemos que

$$(F^m)^k \circ (F^l)(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} p.$$

Pero, por definición, $F^n(x) = [(F^m)^k] (F^l(x))$. Luego, $F^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$. Por lo tanto, p es un atractor de F . Más aún, $p = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(F(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(p)) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p)) = F(p)$. Por lo tanto, p es un punto fijo atractor de F . ■

Teorema 1 (Picard) Sea f una función continua y Lipschitz (con constante de Lipschitz K) en $\Omega = I_a \times B_b$, donde $I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}$ y $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}$. Si $|f| \leq M$ en Ω , entonces existe una única solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en I_α , donde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

El teorema de Picard nos dice que si f es Lipschitz y acotada, entonces se garantiza la existencia y unicidad de soluciones localmente en una vecindad del punto $(t_0, x_0) \in \Omega$. Más aún, el dominio de definición (i.e., aquellos valores de la variable independiente t para los cuales está definida la solución local $\varphi(t)$) es, en general, más pequeño que el dominio original de f ; ver figura 2.6.

Ejemplo 12 Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - |x|, \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

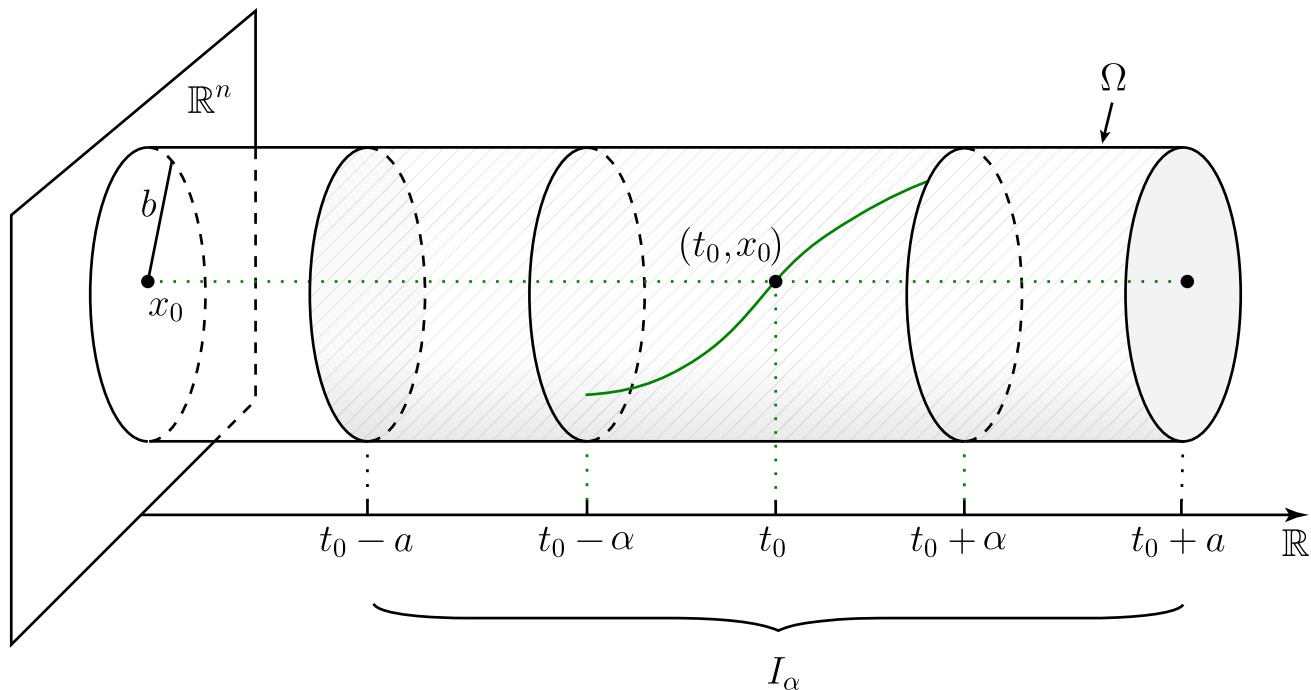


Figura 2.6:

La función $f(t, x) = 1 - |x|$ es continua y Lipschitz en \mathbb{R} con $K = 1$, pues la gráfica de f está contenida en un cono de pendiente 1. Además, f es localmente acotada para todo x_0 . Es decir, para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todo $b \in \mathbb{R}$, existe M tal que

$$f : I_a \times B_b \rightarrow \mathbb{R}$$

cumple $|f| \leq M$. Por lo tanto, aplica el teorema de Picard. De hecho, la solución única para $x_0 = 0$ es:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & t > 0, \\ e^t - 1, & t < 0. \end{cases}$$

Note que no es necesaria la diferenciabilidad de f para hacer funcionar el teorema de existencia y unicidad. Más aún, la solución φ es diferenciable en $t = 0$.

Ejemplo 13 Considere de nuevo el Ejemplo 7:

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}, \quad x(t_0) = 0.$$

La función $f(t, x) = 3x^{2/3}$ no es Lipschitz en $x = 0$; es decir, no existe K finito tal que

$$|x^{2/3}| < K|x|$$

para todo $|x| < 1$. Eso requeriría $K > |x|^{-1/3}$ pero el lado derecho no es acotado en ninguna vecindad de $x = 0$! Eso explica por qué no es posible aplicar el teorema de existencia y unicidad en este ejemplo.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PICARD. Sea $X = C(I_\alpha, B_b)$ el espacio métrico completo de las funciones continuas del tipo $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$, con la métrica del supremo $d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|$. Sea $F(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función definida por:

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Paso 1. Probaremos que para cada $\varphi \in X$, se cumple que $F(\varphi) \in X$ también; es decir, $F(X) \subset X$. De hecho, para todo $t \in I_\alpha$ se tiene:

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \\ &\leq M\alpha \\ &\leq b. \end{aligned}$$

Por tanto, $F(\varphi)(t) \in B_b$, para todo $t \in I_\alpha$, por lo que, $F(\varphi) \in X$. En resumen, el operador $F : X \rightarrow F(X)$, $\varphi \mapsto F(\varphi)$ está bien definido en X .

Paso 2. Demostraremos que la aplicación F^n es una contracción, para un n suficientemente grande. Sean $\phi_1, \phi_2 \in X$ y $n \geq 0$. Probaremos que

$$|F^n(\phi_1)(t) - F^n(\phi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\phi_1, \phi_2), \quad t \in I_\alpha. \quad (2.2)$$

Procederemos por inducción. Para $n = 0$, la desigualdad anterior se verifica en forma trivial. Supongamos que (2.2) también es válida para algún $k \geq 1$ y verifi-

quemos que también se cumple para $n = k + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |F^{k+1}(\phi_1)(t) - F^{k+1}(\phi_2)(t)| &= |F(F^k(\phi_1)(t)) - F(F^k(\phi_2)(t))| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, F^k(\phi_1)(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, F^k(\phi_2)(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K |F^k(\phi_1)(s) - F^k(\phi_2)(s)| ds \right| \quad (f \text{ Lipschitz}) \\ &= \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\phi_1, \phi_2), \end{aligned}$$

lo cual demuestra la desigualdad (2.2).

Por lo tanto, para n suficientemente grande se tendrá

$$d(F^n(\phi_1), F^n(\phi_2)) = \sup_{t \in I_\alpha} |F^n(\phi_1)(t) - F^n(\phi_2)(t)| \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\phi_1, \phi_2),$$

en donde $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$, y así F^n es una contracción. Por el Corolario 1, existe un único punto fijo, llamémoslo $\varphi \in X$, para F , esto es, existe una única función $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. Luego, φ es la (única) solución de la ecuación integral

$$F(\varphi)(t) = \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

la cual, por la Observación 1, es equivalente al problema de Cauchy original. Por lo tanto, φ es la solución única del problema de Cauchy planteado, lo cual completa esta demostración. ■

Observación 2 La demostración anterior nos entrega un algoritmo para aproximar la solución del problema de Cauchy. La formula recursiva

$$F^n(\varphi_0) = \varphi_{n+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds, \quad \varphi_0(t) \equiv x_0$$

define una sucesión $\{\varphi_n\} \subset X$, la cual converge a la (única) solución φ para $n \rightarrow \infty$ (¿Por qué?). Esta técnica se conoce como el *Método de las aproximaciones sucesivas de Picard*.

Corolario 2 Sea Ω un dominio abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en X . Para todo punto $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una vecindad $V = I(t_0) \times B(x_0)$ tal que el problema de Cauchy tiene una única solución definida en el intervalo $I(t_0)$. Además, el gráfico de esta función está contenido en V .

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \subset \Omega$ una vecindad de (t_0, x_0) tal que $f|_U$ es Lipschitz y $|f| \leq M$, donde M es una constante finita. Sea $\alpha > 0$ suficientemente pequeño tal que $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subset U$, donde $b = \alpha M$. El argumento sigue a partir del teorema de Picard. ■

Corolario 3 (Ecuaciones lineales) Sean $A(t), b(t)$ matrices de tamaño $n \times n$ y $n \times 1$, respectivamente, cuyas entradas son funciones continuas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entonces para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe una única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida en I .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una familia de intervalos compactos I_n que contienen a t_0 y que satisfacen $I_n \subset I_{n+1}$. Sea $I = \bigcup_n I_n$. Entonces la función $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ satisface las hipótesis de la proposición anterior en cada intervalo I_n . Sea φ_n la única solución en este intervalo I_n , y que pasa por el punto (t_0, x_0) . Por construcción, se tiene: $\varphi_{n+1}|_{I_n} = \varphi_n$. Por lo tanto, $\varphi(t) = \varphi_n(t)$, con $t \in I_n$, está bien definida en todo I . Más aún, φ es la única solución en I pasando por (t_0, x_0) . ■

2.4. El teorema de Peano

¿Qué sucede si alguna de las hipótesis del teorema de Picard no se cumple? ¿Existe una solución para el problema de Cauchy? Y en caso afirmativo, ¿Es posible asegurar que sea única? El teorema de Peano responde parcialmente esas

preguntas: En el caso en que la función f no es de tipo Lipschitz pero sí continua y uniformemente acotada, entonces solamente es posible asegurar existencia de una solución, pero no la unicidad. Para obtener este resultado, primero recordemos el siguiente teorema cuya demostración se puede hallar en [5].

Teorema 2 (Arzelá-Ascoli) Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea F una familia equicontinua de funciones $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$, para todo $\varphi \in F$. Supongamos además que la familia F es uniformemente acotada, esto es, existe $M > 0$ tal que $\|\varphi\| < M$ para todo $\varphi \in F$. Entonces toda sucesión de elementos $\{\varphi_n\}$ de F posee una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}$ uniformemente convergente en X .

Teorema 3 (Peano) Sea f una función continua en $\Omega = I_a \times B_b$, con $I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t_0 - t| \leq a\}$ y $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_0 - x| \leq b\}$. Si $|f| \leq M$ en Ω , entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene al menos una solución en I_α , con $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, existe una sucesión de polinomios $\{f_n\}$ tal que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ uniformemente en Ω , ver [5, 16] para más detalles. En particular, para n_0 suficientemente grande, f_n cumple las hipótesis del teorema de Picard, para todo $n \geq n_0$ (¿Por qué?). Sea φ_n , $n \geq n_0$, la solución única del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_n(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en I_α , cuya existencia y unicidad corren por cuenta del teorema de Picard. La familia de funciones $\{\varphi_n\}$ es equicontinua y uniformemente acotada (es decir, satisface las hipótesis del teorema de Arzelá-Ascoli) para n suficientemente grande: Para todo $\epsilon > 0$, si escogemos $\delta = \epsilon/M$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$, entonces

se verifica que

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f_n(s, \varphi(s)) ds \right| \\ &\leq M|t_1 - t_2| \\ &\leq M\delta \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto la familia es equicontinua. Además, $|\varphi_n(t) - x_0| \leq b$, para todo n suficientemente grande, por lo que la familia es uniformemente acotada. Tenemos entonces, por el teorema de Arzelá-Ascoli, que existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}$ uniformemente convergente en I_α . Sea φ el límite de esta subsucesión. Probaremos que φ es solución del problema de Cauchy. Ocupando la desigualdad triangular se tiene:

$$|f_{n_k}(s, \varphi_{n_k}(s)) - f(s, \varphi(s))| \leq |f_{n_k}(s, \varphi_{n_k}(s)) - f(s, \varphi_{n_k}(s))| + |f(s, \varphi_{n_k}(s)) - f(s, \varphi(s))|$$

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f , y $\{\varphi_{n_k}\}$ también lo hace a φ , sumado a que f es continua, tenemos que:

$$f_{n_k}(s, \varphi_{n_k}(s)) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} f(s, \varphi(s))$$

de forma uniforme en I_α , por lo que:

$$\varphi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_{n_k}(s, \varphi_{n_k}(s)) ds \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

para todo $t \in I_\alpha$. ■

2.5. Intervalo maximal de existencia

El Teorema de Picard nos entrega las condiciones necesarias para que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

posea una solución (localmente) única $\varphi = \varphi(t)$. Sin embargo, la existencia y unicidad de esta solución es solamente local en una vecindad de $t = t_0$. El objetivo de esta sección es mostrar que cada una de estas soluciones se puede extender a un intervalo maximal de definición en t de forma única.

Definición 5 Definimos el **intervalo maximal de existencia** $J(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}$ como aquel intervalo más grande (en la variable independiente t) que contiene a t_0 , para el cual existe la solución (única) $\varphi(t)$ del problema de Cauchy. En tal caso la solución $\varphi(t)$ definida en $J(t_0, x_0)$ se dice **solución máxima**.

Si denotamos como $\varphi(t)$ a la solución máxima de un problema de Cauchy, y si uno tiene cualquier otra solución $\psi(t)$ del mismo problema de Cauchy definida en un intervalo $I \subset J(t_0, x_0)$, entonces se debe tener $\psi \equiv \varphi|_I$, es decir, ambas soluciones deben coincidir en el intervalo común de definición; ver figura 2.7.

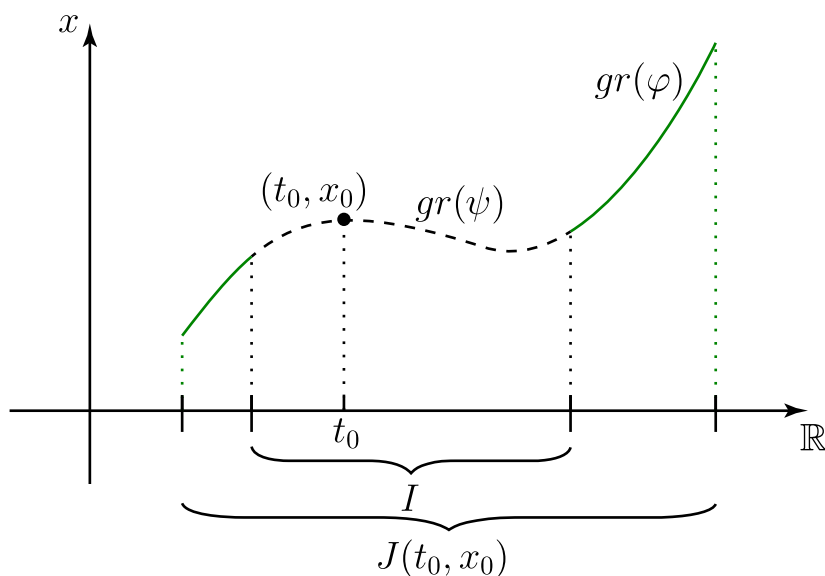


Figura 2.7: Toda solución ψ de un problema de Cauchy que admita unicidad de soluciones corresponde a la restricción de la solución máxima φ al intervalo de definición de ψ .

Ejemplo 14 Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, \\ x(0) = x_0 > 0, \end{cases}$$

Según el teorema de Picard, la solución a este problema existe, es única y está definida en un conjunto de la forma $I_\alpha \times B_b(x_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si $b > 0$ y tomamos $x \in B_b(x_0)$, entonces $|x^2| \leq (x_0 + b)^2 =: M$. Luego, según el teorema de Picard, se puede probar que la solución existe para

$$|t| \leq \alpha = \frac{b}{(x_0 + b)^2}.$$

Para obtener el intervalo maximal de existencia podríamos maximizar la cota superior $\frac{b}{(x_0+b)^2}$ como función de b . En tal caso, el valor máximo se alcanza cuando $b = x_0$ y nos da el intervalo maximal

$$|t| \leq \frac{1}{4x_0}.$$

Por otro lado, podemos hallar la solución explícita del problema de Cauchy al separar variables e integrar obteniendo

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad t \neq \frac{1}{x_0}.$$

Esta función posee un intervalo (o dominio) de definición dado por

$$t \in (-\infty, 1/x_0).$$

Notemos que este intervalo es abierto, no es simétrico, contiene a $t_0 = 0$ (¿Por qué?), y es más grande que el primero hallado. En ambos casos, se obtiene una cota superior para t . En general, se tiene:

$$J(t_0, x_0) = \begin{cases} (-\infty, 1/x_0), & x_0 > 0, \\ \mathbb{R}, & x_0 = 0, \\ (1/x_0, \infty), & x_0 < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Para cada x_0 , el intervalo maximal es abierto, pero depende de las condiciones iniciales (t_0, x_0) . El dominio de existencia de las soluciones también queda definido como un conjunto abierto. Podemos graficarlo en el plano (t, x_0) al determinar las fronteras de $J(t_0, x_0)$ en (2.3), como en la Figura 2.8. Más aún, a medida que $t \rightarrow 1/x_0$ (es decir, t se acerca a la frontera del intervalo maximal $J(t_0, x_0)$), se tiene $x(t) \rightarrow \infty$.

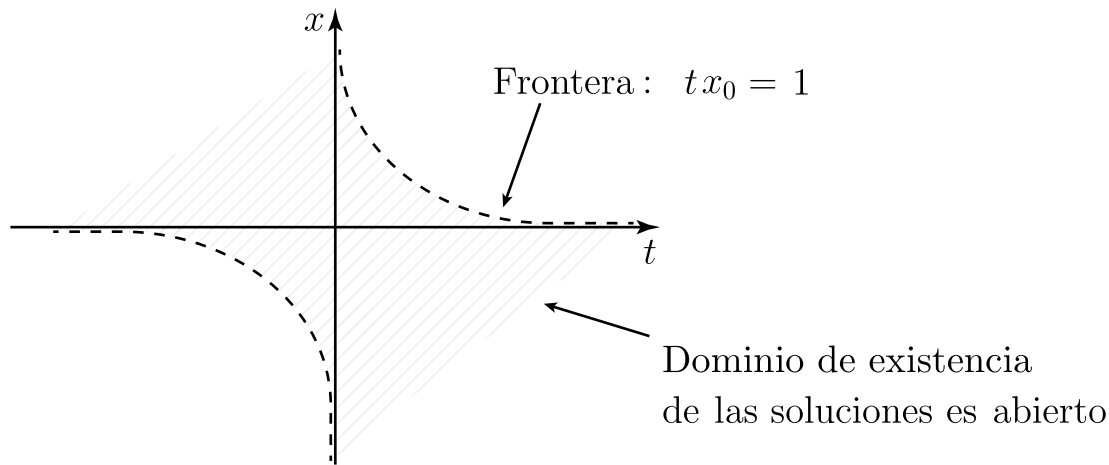


Figura 2.8: Dominio de existencia en $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, del problema de Cauchy $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$.

Las propiedades halladas para $J(t_0, x_0)$ en el ejemplo anterior son generales: El intervalo maximal siempre es un conjunto abierto. Además, si el intervalo maximal es acotado, entonces la solución debe abandonar el dominio de definición del campo de vectores $f(t, x)$ a medida que t se acerca al extremo acotado de J . Estos resultados se formalizan en los siguientes teoremas, cuyas demostraciones omitimos pero se pueden hallar en [2, 14, 17].

Teorema 4 Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente Lipschitz. Entonces existe un intervalo maximal abierto $J = (\alpha, \beta)$ tal que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

posee una solución única $\varphi : J \rightarrow \Omega$. Es decir, para cualquier otra solución $u : I_u \rightarrow \Omega$ del mismo problema tenemos que $I_u \subset J$ y $u = \varphi|_{I_u}$.

El siguiente teorema describe qué les sucede a las soluciones cuando al menos un extremo del intervalo maximal es acotado.

Teorema 5 Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz. Sea $J = (\alpha, \beta)$ el intervalo maximal de existencia para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Si β es finito, entonces para cualquier compacto $K \subset \Omega$, existe $t \in [t_0, \beta)$ tal que $(t, x(t)) \notin K$. Similarmente, si α es finito, entonces para todo compacto $K \subset \Omega$, existe $t \in (\alpha, t_0]$ tal que $(t, x(t)) \notin K$.

La idea de este teorema se ilustra en la figura 2.9 para un caso posible. En el caso que se muestra, si $\beta < \infty$, entonces el punto $(t, x(t)) \rightarrow \partial\Omega$ a medida que $t \rightarrow \beta$, es decir, el punto $(t, x(t))$ se acerca a la frontera del dominio Ω .

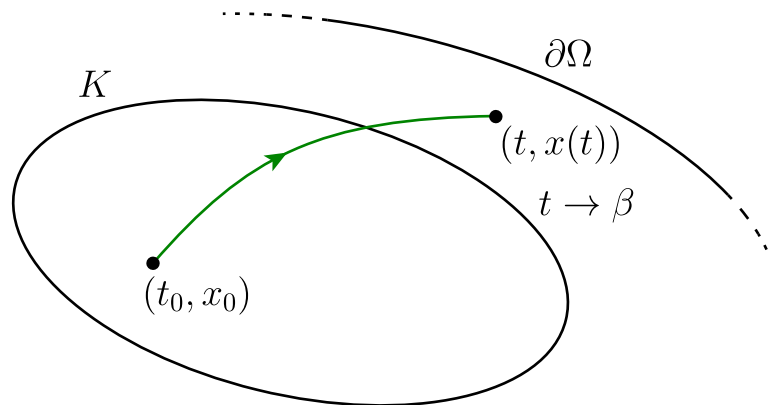


Figura 2.9: Ilustración de uno de los casos posibles que predice el teorema anterior. A medida que t tiende a un extremo finito del dominio máximo de definición de la solución $x(t)$, el punto $(t, x(t))$ se acerca a la frontera del dominio Ω .

Corolario 4 Bajo las condiciones del teorema anterior, si $\beta < \infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow \beta} x(t)$ no existe, o bien, $\lim_{t \rightarrow \beta} (t, x(t)) \in \partial\Omega$.

Ilustraremos ambos escenarios de este corolario con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 15 Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x(0) = x_0 > 0. \end{cases}$$

Aquí, la función $f(x) = 1/x$ está bien definida solo para $x \neq 0$. Como $x_0 > 0$, entonces, $\Omega = \mathbb{R}_+$. La solución de este problema de Cauchy es $\varphi(t) = \sqrt{x_0^2 + 2t}$, con intervalo maximal $J =] -x_0^2/2, \infty[$. Así, $\varphi : J \rightarrow \Omega$. En este caso,

$$\lim_{t \rightarrow -x_0^2/2} \varphi(t) = 0 \in \partial\Omega.$$

Ejemplo 16 Consideremos el problema de Cauchy en \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{1-y}, & y \neq 1, \\ \dot{y} = y, \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Dado que las ecuaciones están desacopladas, es posible hallar una solución explícita dada por

$$\varphi(t; x_0, y_0) = \left(x_0 + \ln \left(\frac{1 - y_0}{e^{-t} - y_0} \right), y_0 e^t \right).$$

Notemos que si $y_0 < 0$, entonces, $J = \mathbb{R}$. Si $0 < y_0 < 1$, entonces $J =] -\infty, -\ln y_0[$. En cambio, si $y_0 > 1$, se tiene $J =] -\ln y_0, \infty[$. En los dos últimos casos, notemos que

$$\lim_{t \rightarrow -\ln y_0} \varphi(t; x_0, y_0) = “(\infty, 1)”,$$

si hacemos abuso de la notación. Es decir, el límite se indefine y, por ende, no existe.

2.6. Dependencia de las soluciones a las condiciones iniciales

Si tenemos un problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = y, \end{cases} \quad (2.4)$$

podemos preguntarnos cómo cambia la solución obtenida si no tenemos certeza del valor exacto del dato inicial $x(t_0) = y$. Este problema es equivalente a analizar la dependencia explícita de la solución $x(t) = u(t; y)$ con respecto a la condición inicial y .

El resultado principal se formaliza en el siguiente teorema cuya demostración omitimos pero se puede hallar en [2, 14, 15, 17].

Teorema 6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto, y supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en t y de clase C^1 con respecto a x . Entonces existe una constante $a > 0$ tal que la solución $u(t, y)$ de (2.4) es de clase C^1 con respecto a la condición inicial y para $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.*

La idea de este teorema se ilustra en la figura 2.10. Bajo las condiciones de regularidad del teorema, al variar la condición inicial y , las soluciones respectivas $u(t, y)$ cambian en forma suave.

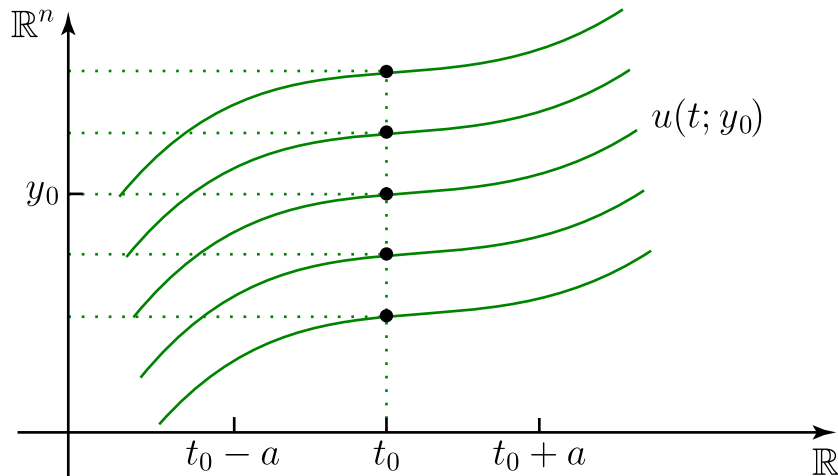


Figura 2.10: Bajo las condiciones del teorema 6, al variar la condición inicial y desde y_0 , las soluciones respectivas $u(t, y)$ cambian en forma suave.

2.7. Dependencia de las soluciones a los parámetros

Similarmente, podemos preguntarnos cómo cambian las soluciones de un problema de Cauchy si variamos los valores de los parámetros de la ecuación dife-

rencial. Supongamos ahora el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x; \mu), & x \in \mathbb{R}^n, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^d$ es un vector de parámetros. El siguiente teorema nos dice que si f es uniformemente continua en μ , entonces la solución también depende continuamente de μ . Este resultado está relacionado al concepto de *estabilidad estructural*: Si uno realiza una perturbación suficientemente pequeña a los valores de los parámetros de un sistema, genéricamente las propiedades de las soluciones no deberían cambiar dramáticamente. Esto es muy útil, por ejemplo, al modelar un fenómeno mediante ecuaciones diferenciales, pues típicamente uno no conoce los valores exactos de los parámetros.

El resultado principal se formaliza en el siguiente teorema cuya demostración omitimos pero se puede hallar en [2, 14, 15, 17].

Teorema 7 *Supongamos que $f : I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \times B_r(\mu_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en $t \in I_\alpha(t_0)$, posee una dependencia uniformemente Lipschitz en $x \in B_b(x_0)$ y es uniformemente continua con respecto a $\mu \in B_r(\mu_0)$. Entonces el problema de Cauchy (2.5) posee una única solución $u(t; y, \mu)$ para $y \in B_b(x_0)$ que es uniformemente continua en $\mu \in B_r(\mu_0)$ en algún intervalo J , con $t \in J$.*

2.8. Sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior

Aquí veremos que podemos estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales de orden superior esencialmente de forma equivalente a las ecuaciones de primer orden de las secciones anteriores. En consecuencia, todos los resultados de existencia, unicidad, intervalos máximos de definición, y dependencia suave con respecto a condiciones iniciales y parámetros vistos anteriormente también son válidos en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones de orden superior.

2.8.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ y consideremos el sistema de m ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_m), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_m), \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} = f_m(t, x_1, \dots, x_m), \end{array} \right. \quad (2.6)$$

donde $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ son funciones continuas. Sea la familia $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, donde cada función $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_i(t)$, es diferenciable en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entonces decimos que la familia $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, m}$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales (2.6) si las dos condiciones siguientes se satisfacen simultáneamente:

- (i) El punto $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$;
- (ii) La colección $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, m}$ satisface $\dot{\varphi}_i = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$, con $i = 1, \dots, m$.

El sistema (2.6) se puede escribir en forma abreviada como

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, m,$$

o en forma vectorial equivalente por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Luego, una familia $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, m}$ de funciones es solución del sistema (2.6) si y solo si $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ es solución del sistema (2.7) en I . Por lo tanto, una ecuación vectorial de la forma (2.7) es equivalente a un sistema de ecuaciones del tipo (2.6), donde f_i es la i -ésima coordenada de \mathbf{F} en \mathbb{R}^m .

Problema de Cauchy

El problema de Cauchy para sistemas de ecuaciones de la forma (2.6) se formula de la siguiente manera: dados $t_0, x_{1,0}, \dots, x_{m,0}$ tales que $(t_0, x_{1,0}, \dots, x_{m,0}) \in \Omega$, encontrar una solución $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ de (2.6) en un intervalo I que contiene a t_0 tal que $\varphi_i(t_0) = x_{i,0}$ para todo $i = 1, \dots, m$. Abreviadamente escribimos:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_m), \quad x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Este problema se puede formular en forma equivalentemente al problema de Cauchy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

donde $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{m,0})$. La función vectorial $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m)$ es continua, lipschitziana con constante de Lipschitz K , diferenciable con respecto a \mathbf{x} , etc., si y solo si cada una de las funciones coordenadas f_i es del mismo tipo. Por lo tanto, todos los teoremas de existencia, unicidad y soluciones máximas de las secciones anteriores son válidos para soluciones de (2.6).

2.8.2. Ecuaciones diferenciales de orden superior

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ un abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la EDO de orden m

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}). \quad (2.8)$$

Una función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^m es solución de (2.8) en un intervalo I si y solo si las dos condiciones siguientes se satisfacen simultáneamente:

- (i) El punto $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(m-1)}(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$;
- (ii) La función φ satisface $\frac{d^m \varphi(t)}{dt^m} = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(m-1)}(t))$, para todo $t \in I$.

Notemos que (2.8) puede escribirse de forma equivalente como el sistema de

m ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{m-1} &= x_m, \\ \dot{x}_m &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_m). \end{cases} \quad (2.9)$$

Luego, si φ es solución de (2.8), entonces la familia de funciones $\{\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(m-1)}\}$ es solución de (2.9). Recíprocamente, si $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$ es solución del sistema (2.9) en el sentido de la sección 2.8.1, entonces $\varphi = \psi_1$ es solución de (2.8), i.e., φ es de clase C^m y satisface las propiedades (i) y (ii) de arriba.

Problema de Cauchy

El problema de Cauchy para la ecuación (2.8) se formula de la siguiente manera: Dado un punto $(t_0, x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{m-1}) \in \Omega$, encontrar una solución φ de (2.8) definida en un intervalo I que contenga al punto t_0 y que satisfaga

$$\varphi(t_0) = x_0^0, \quad \varphi'(t_0) = x_0^1, \quad \dots \quad \varphi^{m-1}(t_0) = x_0^{m-1}.$$

Abreviadamente escribimos

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}), \quad \frac{d^k x}{dt^k}(t_0) = x_0^k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Este problema es equivalente al siguiente problema de Cauchy para sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{m-1} &= x_m, \\ \dot{x}_m &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \\ x_k(t_0) &= x_0^{k-1}, \quad k = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.10)$$

el cual es un caso particular de un problema de Cauchy como los vistos en la sección 2.8.1. Por lo tanto, los problemas relativos a existencia, unicidad e intervalos

máximos de soluciones de (2.8) se reducen a preguntas similares para sistemas de la forma (2.9), y por tanto a ecuaciones vistas en las secciones anteriores. En particular, todos los resultados relativos a estas preguntas son válidos para ecuaciones diferenciales ordinarias de un orden m arbitrario.

2.9. Ejercicios

1. Considere la EDO lineal de segundo orden

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + 2y = 2t^3.$$

- Mediante la sustitución $x = \dot{y}$, transforme la EDO en un sistema de ecuaciones de primer orden.
- Verifique que la solución general viene dada por $y(t) = c_1 t^2 + c_2 t + t^3$, $x(t) = 2c_1 t + c_2 + 3t^2$.
- Demuestre que por el punto $(x, y) = (1, 0)$ en $t = 0$ pasan infinitas soluciones. Justifique por qué esto no contradice al Teorema de Picard.

2. En cada uno de los siguientes ejemplos, encuentre (o demuestre que no existe) una constante de Lipschitz en los dominios indicados:

- $f(t, x) = t|x|$, $|t| < a$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- $f(t, x) = 1/x$, $1 \leq x < \infty$.

3. Demuestre que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(t)|x|^{1/2}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

posee al menos dos soluciones diferentes. Bosqueje estas soluciones en el plano (t, x) . ¿Por qué no hay unicidad de soluciones?

4. Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3, \\ x(0) = a, \end{cases}$$

- a) Usando las iteraciones de Picard con $\varphi_0(t) = 0$, encuentre las primeras tres aproximaciones sucesivas $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ de la solución.
- b) Encuentre la solución exacta de este problema y haga una expansión en serie de Taylor alrededor de $t = 0$. Muestre que los primeros términos de esta serie coinciden con las iteraciones de Picard.
- c) ¿Cómo crece el número de términos correctos con la iteración?

5. Considere la ecuación lineal no autónoma, no homogénea y el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = tx + 3, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

- a) Usando el método de aproximaciones sucesivas de Picard, construya una sucesión de funciones que converge a la solución del problema de Cauchy.
- b) Haga un bosquejo gráfico de al menos las tres primeras funciones de la sucesión construida.

6. Considere la sucesión $p_0(t) = 1 + t$, $p_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t p_k(s) ds$.

- a) Demuestre que $p_k(t)$ converge uniformemente en cada intervalo compacto de \mathbb{R} cuando $k \rightarrow \infty$ y calcule $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(t)$.
- b) Determine el problema de Cauchy que satisface $\varphi(t)$.

7. Sea $f(t, x)$ definida y continua en $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que $f(t, x) = f(t + 1, x)$. Suponga además que f es lipschitziana en $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Demuestre que toda solución $\varphi = \varphi(t; t_0, x_0)$ de $\boxed{\dot{x} = f(t, x)}$, que pasa por el punto (t_0, x_0) , está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y que $\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t + 1; t_0 + 1, x_0)$.

8. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) = \alpha$. Encuentre todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0; \\ y(x_0) = y_0; \\ \frac{dy}{dx}(x_0) = y'(x_0) = p_0; \end{cases}$$

posea solución única en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Justifique su respuesta.

9. Considere la ecuación diferencial escalar $x' = f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) Demuestre que el Problema de Cauchy $\boxed{x' = f(x), x(t_0) = x_0}$ posee localmente solución única para todo $x_0 \neq 0$.

b) Demuestre que las funciones $\varphi_k(t) \equiv \frac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ son soluciones de $\boxed{x' = f(x)}$.

c) Demuestre que $\varphi_0(t) \equiv 0$ es la **única** solución de $\boxed{x' = f(x), x(t_0) = 0}$.

d) Se sabe que la función $f(x)$ **NO** es localmente Lipschitziana en ninguna vecindad de $x = 0$ (¡No es necesario probarlo!). ¿Contradice esto al teorema de existencia y unicidad de soluciones? ¿Por qué?

10. Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ dos soluciones de la EDO escalar $\boxed{y' = dy/dx = F(x, y)}$, con $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suponga que F es continua y satisface la siguiente condición de Lipschitz “unilateral” para alguna constante finita L :

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) \leq L(y_2 - y_1), \text{ si } y_2 > y_1.$$

(a) Demuestre que $(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))(\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)) \leq L(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))^2$.

(b) Demuestre que $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq e^{L(x-a)}|\varphi_1(a) - \varphi_2(a)|$, si $x > a$.

Sugerencia: Pruebe que una función diferenciable g que satisface la desigualdad $g'(x) \leq Kg(x)$, $a \leq x \leq b$, para K constante, también satisface $g(x) \leq g(a)e^{K(x-a)}$, para $a \leq x \leq b$. Luego considere $g(x) = (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))^2$.

(c) ¿Qué puede decir sobre la unicidad de soluciones del problema de valor inicial $\boxed{y' = F(x, y), y(a) = y_0}$? ¿Para qué rango de valores de $x \in \mathbb{R}$ estaría garantizada la unicidad?

11. Considere el problema de Cauchy $\boxed{\dot{x} = f(x), x(0) = y}$ y denote por $u(t) = u(t; y)$ a la familia de soluciones parametrizadas por la condición inicial. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y denotemos por $B_r(x_0)$ a la bola de radio r centrada en x_0 . Suponga que existe $b > 0$ tal que $f : B_b(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface una condición de Lipschitz con constante K , y que $M = \max_{x \in B_b(x_0)} |f(x)|$. Demuestre que la familia de soluciones $u(t; y)$ existe para todo $y \in B_{b/2}(x_0)$ y es única para $t \in [-\alpha, \alpha]$

si $\alpha < \min \left\{ \frac{1}{K}, \frac{b}{2M} \right\}$. *Sugerencia:* Defina convenientemente un operador en un espacio de funciones apropiado y pruebe que para todo $y \in B_{b/2}(x_0)$, el operador posee un único punto fijo.

12. Una demostración alternativa de que las soluciones son únicas y tienen dependencia Lipschitz en las condiciones iniciales cuando f es Lipschitz. Suponga que $u, v : J \rightarrow B_b(x_0)$ son dos soluciones de la EDO

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde $f : J \times B_b(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene dependencia uniformemente Lipschitz en x con constante K . (No hacemos ninguna suposición sobre la dependencia de f en t .) Defina $\varphi(t) = |u(t) - v(t)|^2$.

- a) Use el producto interno $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ y la desigualdad de Schwarz, $|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|$ para vectores en \mathbb{R}^n , para hallar una desigualdad diferencial ordinaria para φ , es decir, una expresión de la forma $\dot{\varphi}(t) \leq F(t, \varphi)$.
- b) Usando la desigualdad demuestre que $\frac{d}{dt} (e^{-2Kt} \varphi(t)) \leq 0$. Por lo tanto, si $t > t_0$, muestre que

$$|u(t) - v(t)| \leq e^{2K(t-t_0)} |u(t_0) - v(t_0)|.$$

Concluya que la solución es única y que dos soluciones cercanas se desvían a lo más exponencialmente en el tiempo.

13. Considere el Problema de Cauchy: $x' = x^2, x(0) = x_0$, con $x \in \mathbb{R}$.

- a) Resuelva el Problema de Cauchy.
- b) Para cada $x_0 \neq 0$, encuentre el intervalo máximo de definición $I = (\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))$ de la solución del Problema de Cauchy. Haga un bosquejo de la gráfica de las soluciones maximales $x(t) = x(t; 0, x_0)$.

14. Sea la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) ¿Es f una función tipo Lipschitz?
 b) ¿Qué se puede decir de la existencia y unicidad de soluciones de la EDO?

15. Demuestre que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{|x|}, & x \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

posee **al menos dos soluciones diferentes** si y sólo si $x_0 = 0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad de soluciones? En el caso $x_0 = 0$ encuentre estas dos soluciones y bosquejelas en el plano (t, x) .

16. Sea $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Demuestre que toda solución de $\dot{x} = f(x)$ distinta de las soluciones $\varphi_+ \equiv 1$ y $\varphi_- \equiv -1$ es de la forma

$$\varphi(t) = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}, \quad c \neq 0.$$

Encuentre el intervalo máximo $I_c = (\omega_-(c), \omega_+(c))$ de definición de estas soluciones. Haga un esbozo geométrico de las soluciones en $\Omega = \mathbb{R}^2$.

17. Encuentre el intervalo máximo de definición (y las respectivas soluciones explícitas) para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = tx^3, & x \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Además, grafique estos intervalos maximales en el plano (t, x_0) .

18. Encuentre el intervalo máximo de definición (y las respectivas soluciones explícitas) para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 2tx^2, & x \geq 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Además, en el caso $t_0 = 0$ grafique estos intervalos maximales en el plano (t, x_0) .

19. Encuentre el intervalo maximal de existencia (α, β) para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, si $\alpha > -\infty$ o $\beta < \infty$, discuta el límite de la solución a medida que $t \rightarrow \alpha^+$ o $t \rightarrow \beta^-$, respectivamente.

a) $x' = \sec x$, $x(0) = 0$.

b) $x' = x^2 - 4$, $x(0) = 0$.

c) $x'_1 = x_1^2$, $x'_2 = x_2 + x_1^{-1}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

d) $x'_1 = 1/2x_1$, $x'_2 = x_2^2$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

e) $x'_1 = 1/2x_1$, $x'_2 = x_1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

20. Para las siguientes EDOs de orden uno, determine todas las posibles líneas de fase para distintos valores del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$. En cada caso, encuentre el valor crítico μ^* en donde la línea de fase cambia cualitativamente, y describa en palabras qué le sucede a las soluciones a medida que $\mu \rightarrow \mu^*$. *Sugerencia:* Considere los resultados de dependencia continua de las soluciones con respecto a los parámetros y condiciones iniciales.

a) $x' = \mu - x^2$.

b) $x' = \mu x - x^2$.

c) $x' = \mu x - x^3$.

21. Determine condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de segundo orden

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t),$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = z_0$, donde p, q y f son funciones continuas en algún intervalo $a < t < b$, donde $a < t_0 < b$.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales lineales

Consideremos la ecuación del péndulo con fricción

$$x'' + g \sin x + \epsilon x' = 0.$$

Esta ecuación puede deducirse a partir de la segunda ley de Newton y modela los desplazamientos angulares (x) de un péndulo sometido a la fuerza de gravedad ($g \sin x$), el cual además pierde energía debido al roce con el aire ($\epsilon x'$).

Esta es una EDO de segundo orden no-lineal, pues involucra un término no-lineal ($\sin x$). Del cálculo elemental sabemos que para ángulos pequeños ($x \approx 0$), se tiene la aproximación $\sin x \approx x$; en rigor, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Otra forma equivalente de expresar este hecho es mirando la expansión en serie de Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Si $x \approx 0$, el término dominante en la expansión es justamente el término lineal o de grado 1. Por lo tanto, si x es suficientemente pequeño, podemos aproximar la función $\sin x$ mediante su serie de Taylor *truncada* simplemente hasta el término lineal. Al sustituir esta aproximación $\sin x \approx x$ en la EDO obtenemos la llamada ecuación *linealizada*

$$x'' + gx + \epsilon x' = 0,$$

para $x \approx 0$. Este argumento nos dice que podemos simplificar el estudio (local) de una EDO no-lineal mediante el análisis de su linealización. Por lo tanto, esto nos lleva a querer entender cómo caracterizar las posibles soluciones de una EDO lineal.

3.1. Preliminares

Sea \mathbb{R}^n el espacio euclidiano n -dimensional dotado de la norma $\|x\| = \sup |x_i|$, con $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

con $a_{ij}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, $i, j = 1, \dots, n$. El sistema (3.1) se puede escribir en forma abreviada

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + b_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Una familia de n funciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, con $\varphi_i : I_0 \subset I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \varphi_i(t)$, es solución de (3.1) (o equivalentemente de (3.2)) si para todo $t \in I_0$ se cumple

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\varphi_j(t) + b_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

En ocasiones es más conveniente reescribir (3.1) o (3.2) en la forma matricial equivalente

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (3.3)$$

donde $A(t) = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz cuadrada de tamaño n , y $b(t) = (b_i(t))_{n \times 1}$ es un vector columna. Dada una familia $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de soluciones (3.1), entonces la aplicación vectorial $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^t$ es solución de (3.3) en I_0 , es decir,

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), \quad \forall t \in I_0.$$

El recíproco también es válido.

Definición 6 *El sistema de EDOs (3.1) o la ecuación matricial (3.3) en $I \times \mathbb{R}^n$ se dice **lineal**. Si $b(t) \equiv 0$, se le llama **lineal homogénea**.*

3.1.1. El problema de Cauchy para EDOs lineales

Teorema 8 *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Entonces para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe una única solución $\varphi(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$ definida en I tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

La demostración de este teorema de existencia y unicidad puede llevarse a cabo con los mismos métodos vistos en el capítulo anterior. Sin embargo, es conveniente dar otra prueba aquí que ilustra el método de aproximaciones sucesivas de Picard para “construir” soluciones. Pero antes de eso, es necesario realizar un recordatorio del Criterio de Weierstrass, el cual es un test para la convergencia uniforme de series (ver [16] para la demostración):

Lema 2 (*Criterio de Weierstrass*) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en un intervalo I tales que $\sup |f_n| \leq M_n$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge de forma uniforme en I .*

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 8. Sea la sucesión de aplicaciones $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por la aproximación de sucesiones de Picard:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = x_0, \\ \varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\varphi_{i-1}(s) + b(s)) ds. \end{cases} \quad (3.4)$$

Probaremos que para todo intervalo compacto $[a, b] \subset I$, la sucesión $\{\varphi_i(t)\}$ definida en (3.4) converge uniformemente a una solución de (3.3). Definamos la constante

$$K = \sup_{s \in [a, b]} \|A(s)\|.$$

Además, dado que $A(s)x_0 + b(s)$ es continua en $[a, b]$, entonces $\varphi_1(s)$ definida en (3.4) es acotada en $[a, b]$. Luego, podemos definir

$$C = \sup_{s \in [a, b]} |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)|.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
 |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(r)(\varphi_1(s) - \varphi_0(s))ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t \|A(r)\| |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \\
 &\leq K \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \\
 &\leq KC|t - t_0|.
 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
 |\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(r)(\varphi_2(s) - \varphi_1(s))ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t \|A(r)\| |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds \\
 &\leq K \int_{t_0}^t KC|s - t_0| ds \\
 &\leq \frac{K^2 C}{2!} |t - t_0|^2.
 \end{aligned}$$

Por inducción es fácil ver que:

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{K^i C |t - t_0|^i}{i!}.$$

Por lo tanto

$$\sup_{t \in [a, b]} |\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{(K(b-a))^i C}{i!}. \quad (3.5)$$

Ahora notemos que podemos escribir

$$\varphi_i = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \cdots + (\varphi_i - \varphi_{i-1}).$$

Por (3.5), y dado que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(K(b-a))^i C}{i!}$ es convergente, entonces por el Criterio de Weierstrass, la sucesión $\{\varphi_i\}$ converge de forma uniforme en $[a, b]$.

Luego, sea $\varphi(t)$ el límite puntual de la sucesión $\{\varphi_i\}$ en $[a, b]$ (Dado que I es la unión de intervalos compactos, el límite existe en todo I). Luego, haciendo tender al límite $i \rightarrow \infty$ en (3.4) tenemos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\varphi(s) + b(s)) ds,$$

para todo $t \in [a, b]$. Luego, derivando a ambos lados con respecto a t , se verifica directamente que φ satisface (3.3) con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$. En conclusión, hemos probado que la sucesión $\{\varphi_i\}$ converge uniformemente a una solución del problema de Cauchy.

A continuación, solo resta probar la unicidad de (3.3). Sea ψ otra solución del problema de Cauchy en I , entonces:

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\psi(s) + b(s)) ds, \quad \forall t \in I.$$

Sea $m = \sup_{t \in [a, b]} |\psi(t) - \varphi_1(t)|$. Luego:

$$\begin{aligned} |\psi(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\psi(s) - \varphi_1(s)) ds \right| \\ &\leq Km|t - t_0|. \end{aligned}$$

De nuevo por inducción podemos ver que

$$|\psi(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{K^{n-1}m|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{K^{n-1}m(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Y podemos ver que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \psi$ de forma uniforme. Pero, por la unicidad del límite $\psi = \varphi$ en I . ■

Ejemplo 17 Consideremos el problema de Cauchy unidimensional

$$\begin{cases} x' = ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Aplicando el método de aproximaciones sucesivas (3.4) tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= x_0 \\ \varphi_1(t) &= x_0(1 + at) \\ \varphi_2(t) &= x_0 \left(1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 \right) \\ &\vdots \\ \varphi_k(t) &= x_0 \left(1 + at + \dots + \frac{1}{k!}(at)^k \right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución a este problema de Cauchy está dada por $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0e^{at}$ (ver figura 3.1).

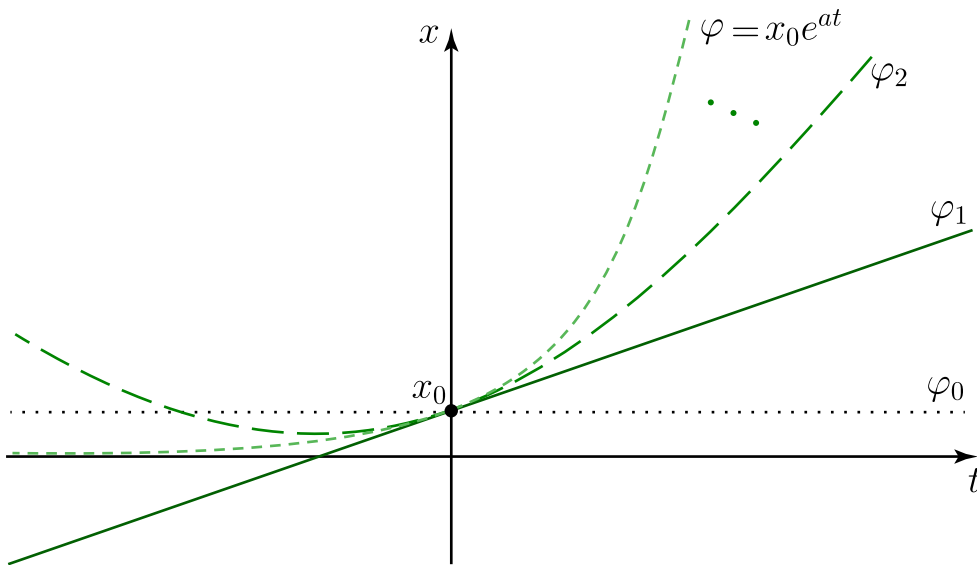


Figura 3.1: Aproximaciones sucesivas para $\varphi(t) = x_0e^{at}$.

3.1.2. Espacio de soluciones de una EDO lineal homogénea

Proposición 1 Sean φ , ψ soluciones de la EDO lineal homogénea

$$x' = A(t)x, \tag{3.6}$$

con $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$.

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias, entonces:

$$\gamma = a\varphi + b\psi$$

es solución de (3.6).

2. Si $\varphi(s) = 0$, para algún $s \in I$, entonces $\varphi \equiv 0$ para todo $t \in I$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Por sustitución directa tenemos que:

$$\begin{aligned} \gamma' &= a\varphi' + b\psi' \\ &= aA(t)\varphi + bA(t)\psi \\ &= A(t)(a\varphi + b\psi) \\ &= A(t)\gamma. \end{aligned}$$

2. Este resultado es consecuencia directa de la unicidad de soluciones, pues la función nula $\Phi(t) \equiv 0$ satisface

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x, \\ x(s) = 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Definición 7 Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones continuas de $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^n , como espacio vectorial con la operación de suma de funciones y producto por un escalar. Se dice que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ son linealmente independientes si no existen constantes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (no todas nulas) tales que

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i = 0.$$

De la Proposición anterior, el conjunto \mathcal{A} de soluciones de $x' = A(t)x$ forma un subespacio vectorial de \mathcal{C} . Además, si $s \in I$ y si consideramos la aplicación $\Psi_s : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi \mapsto \Psi_s(\varphi) = \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que Ψ define un isomorfismo entre \mathcal{A} y \mathbb{R}^n (¿Por qué?). Gracias a esto, obtenemos el siguiente resultado que caracteriza el espacio de soluciones de $x' = A(t)x$.

Proposición 2 *El conjunto \mathcal{A} de todas las soluciones de $x' = A(t)x$, con $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$, es un espacio vectorial de dimensión n . En particular, $\forall s \in I$ la aplicación que a cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le asocia la solución $\varphi(t; s, x_0)$ que pasa por $(s, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, es un isomorfismo de \mathbb{R}^n sobre \mathcal{A} . En particular, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n , entonces la colección*

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \varphi(t; s, v_1), \\ \vdots \\ \varphi_n(t) = \varphi(t; s, v_n) \end{cases}$$

forma una base para \mathcal{A} , o sea, toda φ solución de $x' = A(t)x$ se puede escribir como combinación lineal única de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, con coeficientes en \mathbb{R} .

Corolario 5 *Sea $\varphi(t; s, x)$ la solución (única) de la EDO $x' = A(t)x$ que pasa por el punto $(s, x) \in I \times \mathbb{R}^n$. La aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi_s^t : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \varphi(t; s, x) =: \Phi_s^t(x) \end{aligned}$$

es un isomorfismo que satisface:

1. $\Phi_s^s = Id$,
2. $\Phi_s^t \circ \Phi_u^s = \Phi_u^t$,
3. $\Phi_s^t = (\Phi_t^s)^{-1}$.

La idea del corolario anterior se muestra en la figura 3.2. La imagen muestra la gráfica esquemática de la solución $\varphi(\cdot; u, x)$ que pasa por el punto $(u, x) \in I \times \mathbb{R}^n$. Al evaluar esta solución en $s \in I$, nos entrega el punto $y := \varphi(s; u, x) = \Phi_u^s(x) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, esta misma gráfica corresponde a la solución $\varphi(\cdot; s, y)$ que pasa por el punto $(s, y) \in I \times \mathbb{R}^n$. En particular, llamemos $z := \varphi(t; s, y) = \Phi_s^t(y) = \Phi_s^t(\Phi_u^s(x)) \in \mathbb{R}^n$. Pero, entonces la gráfica de $\varphi(\cdot; u, x)$ pasa por el punto $(t, z) \in I \times \mathbb{R}^n$, es decir, $\Phi_u^t(x) = z$. La propiedad $\Phi_s^t = (\Phi_t^s)^{-1}$ es consecuencia directa de las dos anteriores en el mismo corolario.

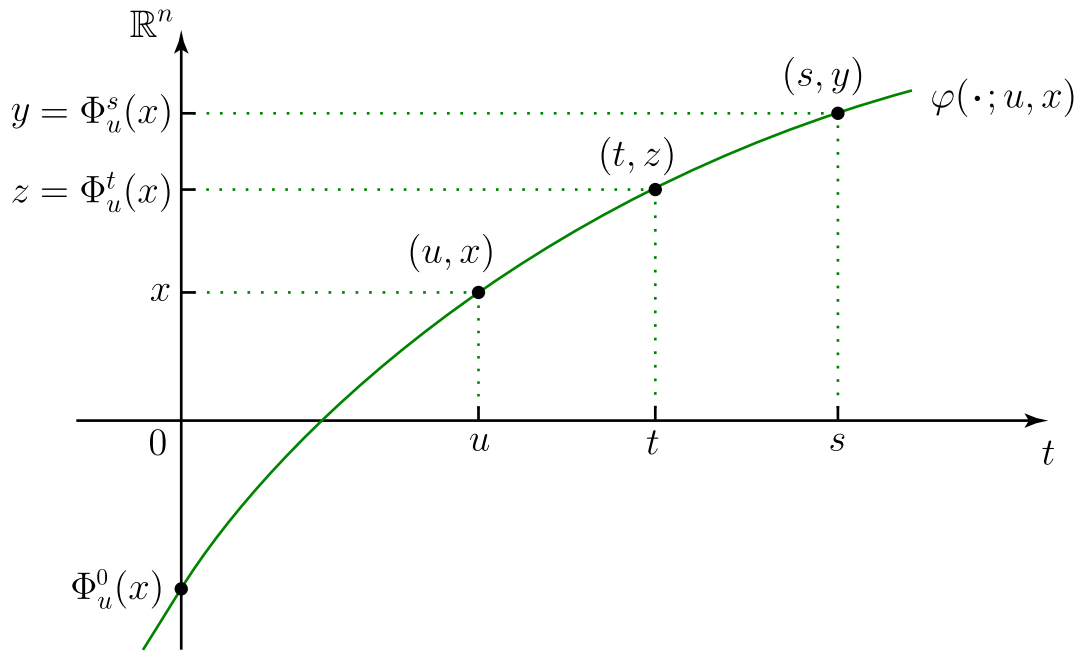


Figura 3.2: Idea del Corolario 5.

3.2. Soluciones fundamentales

Sea $A(t) = (a_{ij}(t))$ una matriz de tamaño $n \times n$ cuyas entradas son funciones continuas definidas en $I \subset \mathbb{R}$, y sea $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, el espacio de matrices de $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} . Consideremos la EDO *matricial* homogénea

$$X' = A(t)X, \quad (3.7)$$

definida en $I \times \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Del álgebra lineal [10, 13] sabemos que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ con la norma $\|X\| = \sup(x_{ij})$. En forma equivalente, podemos escribir (3.7) como

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

y por tanto, se tiene existencia y unicidad de soluciones en I que pasan por el punto $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

En particular, la matriz $\Phi(t) = [\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t)]_{n \times n}$ con vectores columna $\Phi_i(t) \in \mathbb{R}^n$, es solución de la EDO *matricial*

$$X' = A(t)X, \quad X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

si y solo si, para todo $1 \leq j \leq n$, la función Φ_j es solución de la EDO vectorial homogénea

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 8 Una matriz $\Phi(t) = [\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t)]_{n \times n}$, cuyas columnas Φ_j forman una base del espacio vectorial de soluciones de $x' = A(t)x$, con $x \in \mathbb{R}^n$, se llama **matriz fundamental** o **solución fundamental** de $x' = A(t)x$.

Observación 3 A partir de la definición anterior, se tienen las siguientes consecuencias.

1. Por la Proposición 2, tenemos que una matriz $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$ si y solo si $\Phi(t)$ es una solución de $X' = A(t)X$, tal que para algún $t_0 \in I$ (y por tanto para todo $t \in I$), $\Phi(t_0)$ es no singular.
2. Por la unicidad de soluciones, dados $t_0 \in I$ y una matriz no singular M_0 , existe una única matriz fundamental Φ tal que $\Phi(t_0) = M_0$.
3. Por sustitución directa, se verifica que si $\Phi(t)$ es una solución de $X' = A(t)X$, entonces $\Psi(t) = \Phi(t)C$, con $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, es también una solución.

Proposición 3 Sean Φ y Ψ soluciones de $X' = A(t)X$, y supongamos que Φ es una solución fundamental. Entonces existe una única matriz $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que para todo $t \in I$ se tiene

$$\Psi(t) = \Phi(t)C.$$

Más aún, C es no singular si y solo si Ψ es una matriz fundamental.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene

$$(\Phi^{-1}(t)\Psi(t))' = (\Phi^{-1}(t))'\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\Psi'(t).$$

Pero $(\Phi^{-1}(t))' = -\Phi^{-1}(t)\Phi'(t)\Phi^{-1}(t) = -\Phi^{-1}(t)A(t)$. Luego,

$$(\Phi^{-1}(t)\Psi(t))' = -\Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\Phi^{-1}(t)\Psi(t) \equiv C. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 18 Supongamos que $n = 1$ y $A(t) = a(t)$. La EDO lineal se reduce a la ecuación escalar $x' = a(t)x$, con $x \in \mathbb{R}$. Una solución fundamental viene dada por

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Luego, la solución que pasa por el punto (t_0, x_0) es

$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Ejemplo 19 Sea $A(t)$ definida en $I = \mathbb{R}$ una matriz periódica de período T , es decir,

$$A(t + T) = A(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea Φ una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Entonces existe una matriz $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ no singular tal que

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C.$$

La razón es que la solución $\Psi(t) = \Phi(t + T)$ es también una matriz fundamental, pues

$$\Psi'(t) = \Phi'(t + T) = A(t + T)\Phi(t + T) = A(t)\Psi(t).$$

Luego, por la Proposición anterior, existe una matriz $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\Phi(t + T) = \Phi(t)C$. Además, las columnas de Ψ son linealmente independientes por definición, luego C es no singular.

El siguiente teorema nos entrega una fórmula para determinar la solución de una EDO lineal no-homogénea a partir de la matriz fundamental de la ecuación homogénea asociada.

Teorema 9 Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Entonces la solución $\varphi(t; t_0, x_0)$ de

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

está dada por

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \right].$$

DEMOSTRACIÓN. Aunque por sustitución directa es fácil ver que esto se cumple, también es conveniente ver de dónde sale esta fórmula.

Método de variación de parámetros. Busquemos una solución del problema no homogéneo en la forma $\varphi(t) = \varphi(t; t_0, x_0) = \Phi(t)C(t)$, donde $C(t)$ es una matriz de tamaño $n \times 1$. Entonces: Entonces

$$\begin{aligned} A(t)\varphi(t) + b(t) &= \varphi'(t) \\ &= \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) \\ &= A(t)\Phi(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + \Phi(t)C'(t). \end{aligned}$$

Luego, $C(t)$ satisface la EDO de variables separables $C'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$. Como $C(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_0$, tenemos

$$C(t) = \Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds. \quad \blacksquare$$

Teorema 10 (*Fórmula de Liouville-Abel*) Sea $\Phi(t)$ una matriz cuyas columnas son soluciones de $x' = A(t)x$. Entonces, dado $t_0 \in I$ fijo, tenemos que

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0))e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}$$

para todo $t \in I$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN. Basta probar que $\varphi(t) = \det(\Phi(t))$ es una solución de la EDO lineal escalar $u' = \text{tr}(A(t))u$, tomando en cuenta las propiedades del determinante de matrices como una aplicación n -lineal alternada. ■

3.3. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Sea la EDO lineal

$$x' = Ax, \tag{3.8}$$

donde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz de coeficientes constantes y $x \in \mathbb{R}^n$. Podemos pensar que esta EDO está asociada a una aplicación lineal $x \mapsto Ax$ que va desde

\mathbb{R}^n en sí mismo. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de esta EDO, tal que $\Phi(0) = \mathbf{I}$ es la matriz identidad. Por el teorema de existencia y unicidad Φ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, en el caso $n = 1$, $A = a \in \mathbb{R}$, y se tiene $\Phi(t) = e^{at}$, con $\Phi(0) = 1$.

A continuación mostraremos que la aplicación $t \mapsto \Phi(t)$ tiene propiedades análogas a la función exponencial.

Proposición 4 *Sea $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz fundamental de (3.8) tal que $\Phi(0) = \mathbf{I}$. Entonces se cumple:*

1. $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, $\Phi(0) = \mathbf{I}$.
2. $\Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.
3. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.
4. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ converge a $\Phi(t)$ en \mathbb{R} , en forma uniforme en cada intervalo compacto.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Inmediato por la definición de matriz fundamental.

(2) Fijemos $s \in \mathbb{R}$ y denotemos $\Psi(t) = \Phi(t + s)$, $\Theta(t) = \Phi(t)\Phi(s)$. Es fácil verificar por sustitución directa que $\Psi(t)$ y $\Theta(t)$ son soluciones de la EDO matricial $X' = AX$, con condición inicial $X(0) = \Phi(s)$. Luego, por la unicidad de soluciones se debe tener $\Psi = \Theta$.

(3) Es consecuencia de (2) tomando $s = -t$.

(4) Sea la sucesión $\{\Phi_k(t)\}$ dada por las aproximaciones sucesivas de Picard

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) &= \mathbf{I} \\ \Phi_k(t) &= \mathbf{I} + \int_0^t A\Phi_{k-1}(s)ds,\end{aligned}$$

la cual converge uniformemente a Φ en cada intervalo compacto. Notemos que

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= \mathbf{I} + \int_0^t A \mathbf{I} ds = \mathbf{I} + tA, \\ \Phi_2(t) &= \mathbf{I} + \int_0^t A(\mathbf{I} + As) ds = \mathbf{I} + tA + \frac{t^2 A^2}{2!}, \\ &\vdots \\ \Phi_k(t) &= \mathbf{I} + \int_0^t A \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^j A^j}{j!} \right) ds = \sum_{j=0}^k \frac{t^j A^j}{j!}.\end{aligned}$$

Luego, la sucesión $\{\Phi_k(t)\}$ es la secuencia de sumas parciales de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. ■

Definición 9 La matriz $e^A := \Phi(1)$ se llama **matriz exponencial** de la matriz A .

Siguiendo con la analogía con la función exponencial, si ocupamos la notación $e^{tA} := \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ para reescribir la Proposición anterior, obtenemos

1. $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$, $e^{0A} = \mathbf{I}$.
2. $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.
3. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.
4. $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$.

Si ahora definimos $\varphi(t, x) = e^{tA}x$, por las propiedades anteriores es fácil ver que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = \frac{d}{dt}(e^{tA})x = Ae^{tA}x$, $\varphi(0, x) = x$. En conclusión, la proposición anterior nos dice que, por cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, la aplicación $\varphi(t, x)$ define la (única) solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay, \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (3.9)$$

Y esta solución $\varphi(t, x)$ se puede determinar explícitamente en términos de la matriz fundamental del mismo sistema lineal en la forma

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x.$$

Por lo tanto, para determinar la solución del problema de Cauchy (3.9), solo debemos hallar la matriz fundamental e^{tA} asociada (!!!).

A continuación veremos algunos ejemplos de matrices fundamentales e^{tA} concretas dependiendo de la forma de A .

Ejemplo 20 Supongamos que la matriz A es diagonal con bloques cuadrados (posiblemente de diferentes órdenes) en la diagonal principal:

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

con $A_k \in \mathbb{M}_k(\mathbb{R})$. Entonces

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tA_1}, e^{tA_2}, \dots, e^{tA_m}).$$

En efecto, por definición y álgebra de matrices, se tiene:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m))^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{diag}(A_1^k t^k, A_2^k t^k, \dots, A_m^k t^k) \\ &= \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k t^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_2^k t^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_m^k t^k}{k!} \right) \\ &= \text{diag}(e^{tA_1}, e^{tA_2}, \dots, e^{tA_m}). \end{aligned}$$

En particular, si $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$, con $a_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \dots, e^{a_m t}) = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{a_m t} \end{pmatrix}.$$

Para hacer aún más concreto este ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces, si $x_0 \in \mathbb{R}^2$, la solución del problema de Cauchy (3.9) es

$$\varphi(t, x_0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} x_0.$$

Ejemplo 21 Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

En efecto, por verificación directa, las funciones columna de e^{tA}

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t), -\sin(\beta t))^T, \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t} (\sin(\beta t), \cos(\beta t))^T, \end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes de $y' = Ay$, con $y \in \mathbb{R}^2$, y satisfacen las condiciones iniciales $\varphi_1(0) = (1, 0)^T$, y $\varphi_2(0) = (0, 1)^T$, respectivamente. Luego, $e^{0A} = \mathbf{I}$. Por lo tanto, e^{tA} es la matriz fundamental.

Por lo tanto, si $x_0 \in \mathbb{R}^2$, la solución del problema de Cauchy (3.9) es

$$\varphi(t, x_0) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} x_0.$$

Ejemplo 22 Sea A una matriz nilpotente, o sea, existe un entero positivo $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $A^r = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula. Entonces

$$e^{tA} = \mathbf{I} + tA + \dots + \frac{t^{r-1} A^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Un ejemplo de matriz nilpotente es

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, E_1 es una matriz $n \times n$, con todos sus elementos $a_{i,i+1} = 1$, un lugar a la derecha de la diagonal principal, y el resto de los elementos iguales a 0. E_1 es nilpotente, pues $E_1^n = 0$.

En particular,

$$e^{tE_1} = \mathbf{I} + tE_1 + \frac{t^2 E_1^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1} E_1^{n-1}}{(n-1)!},$$

o más explícitamente,

$$e^{tE_1} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & t^2/2! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Los ejemplos 20 y 21 asocian explícitamente la matriz exponencial de una matriz con sus valores propios. De hecho, veremos que existe una relación entre los valores propios, vectores propios y soluciones fundamentales de una matriz.

Lema 3 *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Si λ es un valor propio real de A , sea \vec{v} uno de sus vectores propios. Entonces:*

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$$

es una solución de $x' = Ax$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición se tiene $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lambda e^{t\lambda} \vec{v} \\ &= e^{t\lambda} \lambda \vec{v} \\ &= e^{t\lambda} A\vec{v} \\ &= A e^{t\lambda} \vec{v} \\ &= A\varphi(t), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Como consecuencia directa del lema anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 11 *Sea la EDO lineal $x' = Ax$ donde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n valores propios reales de A , y v_1, \dots, v_n sus vectores linealmente independientes, i.e., $Av_i = \lambda_i v_i$. Entonces, la matriz $V(t)$ cuya i -ésima columna es*

$$\varphi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t},$$

es una matriz fundamental de la EDO. Es decir, la colección de funciones

$$\{v_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, v_n e^{\lambda_n t}\}$$

forma una base del espacio de soluciones y la solución general viene dada por

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

donde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias. En particular, $e^{tA} = V(t)V^{-1}(0)$. Más aún, las afirmaciones anteriores siguen siendo válidas si consideramos $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ como una matriz con entradas complejas, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n valores propios complejos de A , y v_1, \dots, v_n sus vectores linealmente independientes en \mathbb{C}^n .

Ejemplo 23 *Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz con entradas reales. Supongamos que A tiene un par de valores propios complejos conjugados $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Aún cuando A posea entradas reales, podemos pensar que se trata de un caso particular del caso complejo descrito en el Teorema anterior.*

Llamemos $v = v_1 + iv_2$ y $\bar{v} = v_1 - iv_2$ a sus vectores propios respectivos en \mathbb{C}^n , con partes real e imaginaria $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Del Álgebra Lineal [10, 13] sabemos que $v, \bar{v} \in \mathbb{C}^n$ son vectores linealmente independientes en \mathbb{C}^n . Luego, por el teorema anterior, las funciones

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{\lambda t} v, \\ \bar{\varphi}(t) &= e^{\bar{\lambda} t} \bar{v},\end{aligned}$$

son soluciones (complejas) linealmente independientes de $x' = Ax$, si A es considerada una matriz compleja.

Pero nos gustaría hallar soluciones reales, pues A es en esencia una matriz real. Para esto, basta tomar las partes real e imaginaria de φ y $\bar{\varphi}$, esto es,

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}(\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)) = \operatorname{Re}(\varphi(t)), \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2i}(\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)) = \operatorname{Im}(\varphi(t))\end{aligned}$$

son soluciones *reales* de $\boxed{x' = Ax}$, con $\varphi_1(0) = v_1$ y $\varphi_2(0) = v_2$. Además, φ_1 y φ_2 son linealmente independientes como funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Tarea!). Este hecho proviene de que v_1 y v_2 son vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n . En efecto, supongamos que son linealmente dependientes, es decir, existe una constante $c \in \mathbb{R}$, tal que $v_2 = cv_1$. Entonces, $v = (1 + ic)v_1$, $\bar{v} = (1 - ic)v_1$. Luego, $\bar{v} = \frac{1}{1-ic}v$, lo que implicaría que v y \bar{v} son linealmente dependientes en \mathbb{C}^n , llegando a una contradicción.

Veamos el caso particular $n = 2$. Expresando $e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) \pm i \sin(\beta t))$, se tiene:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) = \operatorname{Re}(\varphi(t)), \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t}(\sin(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2) = \operatorname{Im}(\varphi(t))\end{aligned}$$

es una base de soluciones de $\boxed{x' = Ax}$, donde $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^2$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$.

3.4. Sistemas lineales bidimensionales

Consideremos ahora sistemas de la forma

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$, y además $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Equivalentemente, nos interesan ecuaciones lineales homogéneas del tipo

$$x' = Ax, \quad \text{con } x = (x_1, x_2)^T, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(A) \neq 0. \quad (3.11)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) están asociadas a transformaciones lineales en \mathbb{R}^2 , cuya representación matricial es la matriz A . La condición $\det(A) \neq 0$ es equivalente a que el origen $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ es el único punto en el kernel de A . Por lo tanto, el origen es el único punto tal que $Ax = 0$. Decimos que el origen es un **punto de equilibrio** de la ecuación (3.10) o (3.11), pues la solución $\varphi(t, x) = e^{tA}x$ tiene un (único) punto fijo en $x = 0$.

El polinomio característico de A es

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Luego, los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}. \quad (3.12)$$

Distinguiremos los siguientes casos:

- a) λ_1, λ_2 son reales y distintos. Aquí necesariamente $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$.
- b) λ_1, λ_2 son complejos conjugados: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\beta \neq 0$.
- c) λ_1, λ_2 son reales e iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

3.4.1. Caso a) Valores propios reales y distintos

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ los vectores propios asociados a λ_1, λ_2 , respectivamente. Y denotemos por $E_1 = \langle v_1 \rangle$ y $E_2 = \langle v_2 \rangle$, los espacios propios asociados (que en este caso corresponden a dos rectas que pasan por el origen).

Del Teorema 11, sabemos que la solución general de (3.10) o (3.11) puede escribirse en la forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad (3.13)$$

donde c_1, c_2 son constantes que dependen de la condición inicial.

El comportamiento asintótico (i.e., para $t \rightarrow \pm\infty$) de esta solución dependerá de los signos de λ_1 y λ_2 .

Caso a.1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (**Nodo atractor**)

A partir de (3.12), para que este caso ocurra es necesario y suficiente que $\text{tr}(A) < 0$, $\det(A) > 0$ y

$$\Delta \equiv (\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A) > 0.$$

De la expresión (3.13) se desprende que todas las soluciones tienden al origen en tiempo positivo, pues $\varphi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$, para todo c_1, c_2 ; además, $\varphi(t) \rightarrow \pm\infty$ si $t \rightarrow -\infty$, excepto si $c_1 = c_2 = 0$. En particular, si $c_1 \neq 0$, entonces si $t \rightarrow \infty$ se tiene:

$$\frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0,$$

pues $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. Por lo tanto, todas las soluciones tienden al origen tangentes a la dirección de menor contracción, es decir, a lo largo de E_1 , como en la figura 3.3. Si $c_1 = 0$, las soluciones corresponden a las semirectas de E_2 ; análogamente, si $c_2 = 0$, la solución está contenida en una de las semirectas de E_1 . Decimos que el origen de \mathbb{R}^2 es un **nodo atractor**. Además, los subespacios E_1 y E_2 son **invariantes**, pues si la condición inicial $(x_1, x_2) \in E_i$, $i = 1, 2$, entonces todos los puntos de la solución que pasa por (x_1, x_2) están contenidos en E_i , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Caso a.2) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (**Nodo repulsor**)

El razonamiento es similar al caso a.1), invirtiendo el sentido de las flechas. Decimos que el origen es un **nodo repulsor**; ver figura 3.4. Este caso solo es posible ssi $\text{tr}(A) > 0$, $\det(A) > 0$ y $\Delta > 0$.

Caso a.3) $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ (**Punto silla**)

Para que este escenario suceda basta que $\det(A) < 0$. Al igual que en los casos a.1) y a.2), las soluciones que pasan por puntos de E_1 (resp. E_2), permanecen en E_1 (resp. E_2). En E_1 , se tiene $c_2 = 0$, luego la solución satisface $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 \rightarrow 0$, si $t \rightarrow \infty$. Similarmente, en E_2 , se tiene $c_1 = 0$, luego la solución satisface $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \rightarrow 0$, si $t \rightarrow -\infty$; ver figura 3.5.

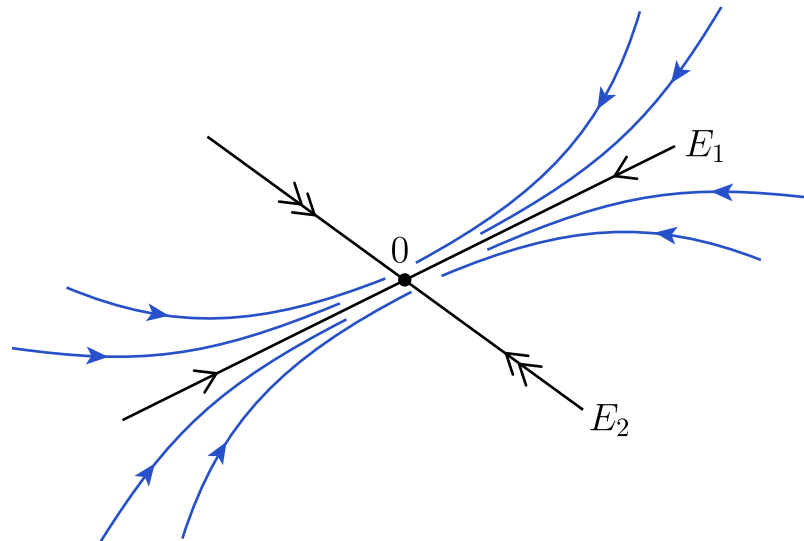


Figura 3.3: Un nodo atractor.

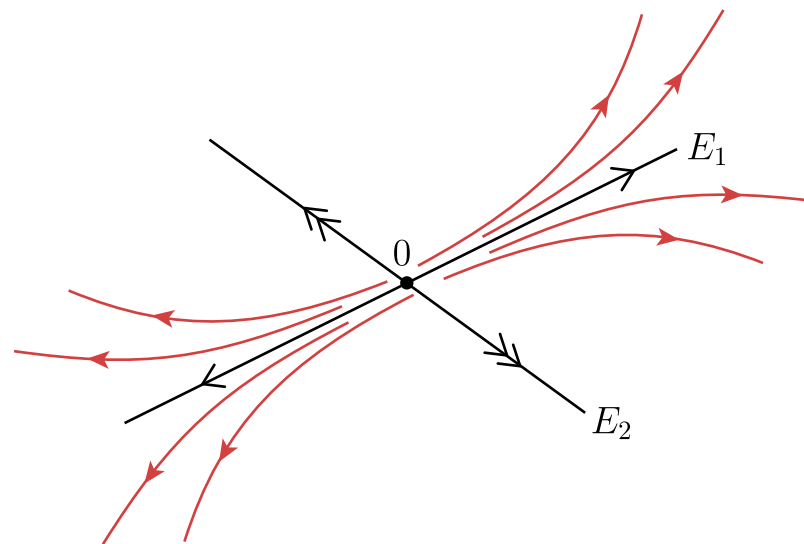


Figura 3.4: Un nodo repulsor.

Por otro lado, si $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la componente de la solución en la dirección de E_1 tiende a 0 (resp. $\pm\infty$) cuando $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$); la componente de la solución en la dirección de E_2 tiende a $\pm\infty$ (resp. 0) cuando $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$). Como resultado, las soluciones tienden al infinito cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

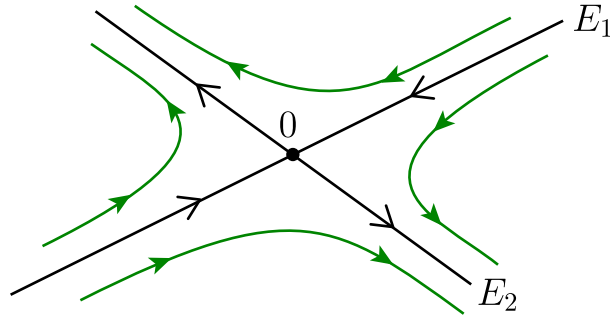


Figura 3.5: Un punto silla.

Decimos que el origen es un **punto silla**; ver figura 3.5.

3.4.2. Caso b) Valores propios complejos conjugados

A partir del Ejemplo 23 se tiene que toda solución de (3.10) se puede escribir en la forma

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t),$$

con

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2), \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t} (\sin(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2),\end{aligned}$$

donde $v_1 \pm iv_2 \in \mathbb{C}^2$ son los vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Reescribamos las constantes $c_1 = \rho \cos \omega$, $c_2 = \rho \sin \omega$, y tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{\alpha t} \rho ((\cos(\omega) \cos(\beta t) + \sin(\omega) \sin(\beta t))v_1 + (\sin(\omega) \cos(\beta t) - \cos(\omega) \sin(\beta t))v_2) \\ &= e^{\alpha t} \rho (\cos(\omega - \beta t)v_1 + \sin(\omega - \beta t)v_2).\end{aligned}$$

Caso b.1) $\alpha = 0$ (Centro)

A partir de (3.12), este escenario sucede solo si $\text{tr}(A) = 0$ y $\det(A) > 0$. Todas las soluciones, excepto la nula, son elipses que rodean al equilibrio en el origen. Decimos que el origen es un **centro**; ver figura 3.6.

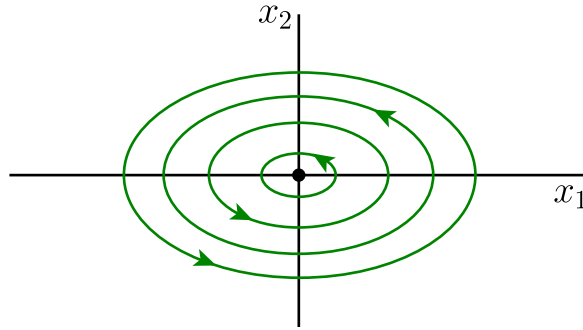


Figura 3.6: Un centro.

Caso b.2) $\alpha < 0$ (Foco estable)

Para que este caso ocurra es necesario y suficiente que $\text{tr}(A) < 0$ y $\Delta < 0$. Se tiene $|\varphi(t)| \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Luego, toda solución tiende al origen en forma de espiral. Además, $\omega - \beta t$ es el ángulo entre $\varphi(t)$ y E_1 , y tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\beta < 0$ (resp. > 0). Decimos que el origen es un **foco estable**; ver figura 3.7.

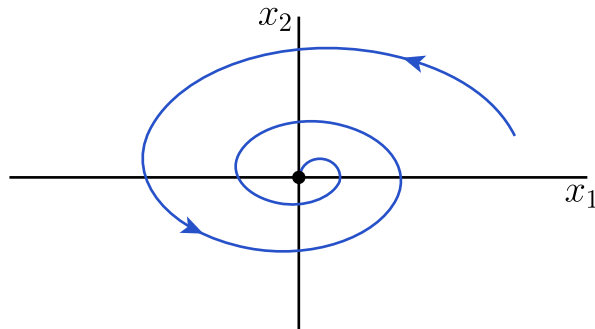


Figura 3.7: Un foco estable.

Caso b.3) $\alpha > 0$ (Foco inestable)

Aquí es necesario que $\text{tr}(A) > 0$ y $\Delta < 0$. El razonamiento es similar al caso b.2), invirtiendo el sentido de las flechas. Toda solución tiende a 0 espiraleando en torno al origen cuando $t \rightarrow -\infty$. Decimos que el origen es un **foco inestable**; ver figura 3.8.

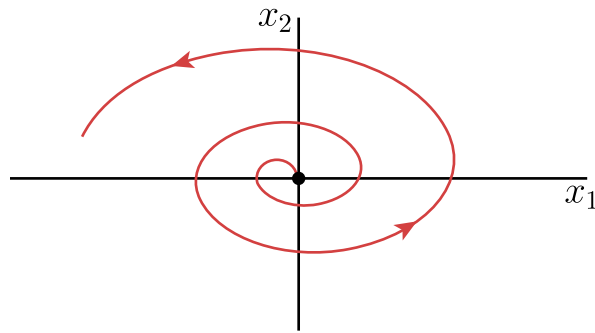


Figura 3.8: Un foco inestable.

3.4.3. Caso c) Valores propios reales e iguales

Estos escenarios suceden si $\Delta = 0$. Distinguiamos dos casos. El polinomio característico de A posee una raíz doble λ , luego la *multiplicidad algebraica* de λ es 2. Sin embargo, la *multiplicidad geométrica* de λ podría ser 1 o 2, dependiendo de la dimensión del espacio propio asociado; es decir, del número de vectores propios linealmente independientes que estén asociados a λ .

Caso c.1) Multiplicidad geométrica 2

Sean v_1 y v_2 los vectores propios linealmente independientes asociados a λ . Entonces la solución de (3.10) queda de la forma

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2).$$

Luego, todas las soluciones, excepto la nula, son semirectas. Si $\lambda < 0$ (resp. > 0) decimos que el origen es un **nodo estelar atractor** (resp. **repulsor**); ver figura 3.9.

Caso c.2) Multiplicidad geométrica 1

El valor propio doble posee un único vector propio v . Del Álgebra Lineal [10, 13] sabemos que existe un vector $w \notin E_1 = \langle v \rangle$ (i.e., linealmente independiente con respecto a v) tal que el operador lineal $x \mapsto Ax$ en la base $\{v, w\}$ de \mathbb{R}^2 se escribe

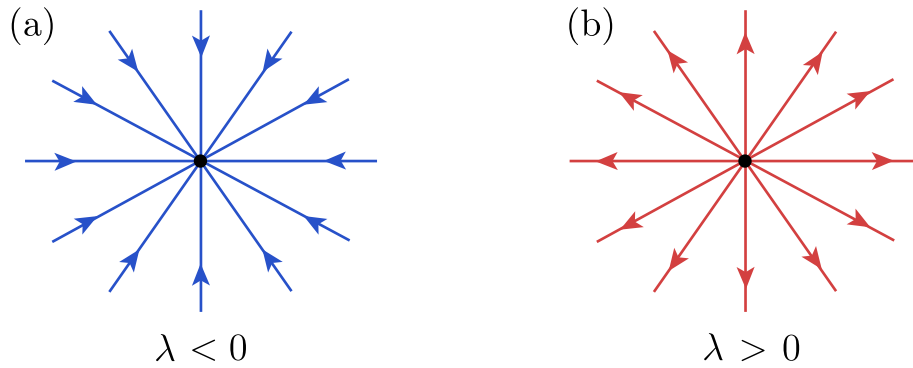


Figura 3.9: Nodo estelar atractor (a) y repulsor (b).

en su Forma Canónica de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Más aún, el par $\{v, w\}$ se puede obtener al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} Av = \lambda v, \\ Aw = \lambda w + v. \end{cases}$$

Usando estas propiedades, se verifica por sustitución directa que

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}((c_1 + c_2 t)v + c_2 w)$$

es la solución de (3.10) tal que $\varphi(0) = c_1 v + c_2 w$.

Las soluciones que pasan por E_1 (i.e., con $c_2 = 0$), excepto el origen, son semirectas. Para toda otra solución (i.e., $c_2 \neq 0$), si comparamos las componentes en la dirección de E_1 y $E_2 = \langle w \rangle$, se tiene

$$\frac{c_2 e^{\lambda t}}{(c_1 + t c_2) e^{\lambda t}} = \frac{1}{\frac{c_1}{c_2} + t} \longrightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Si $\lambda < 0$ (resp. > 0), toda solución tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$). Decimos que el origen es un **nodo atractor** (resp. **repulsor**) de una **tangente**; ver figura 3.10.

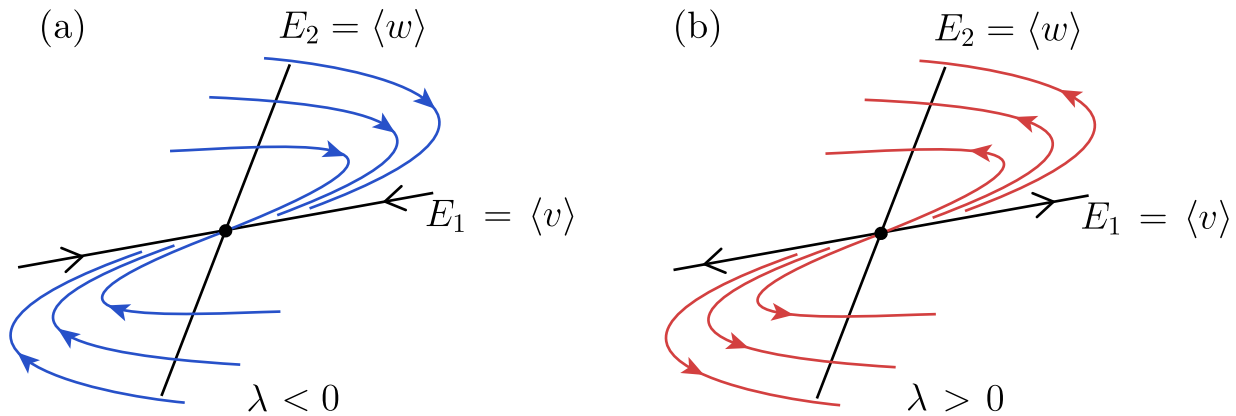


Figura 3.10: Nodo atractor (a) y repulsor (b) de una tangente. Notemos que solo el subespacio E_1 es invariante.

3.4.4. Resumen: Estabilidad de sistemas lineales en el plano

A partir de la fórmula (3.12) para las raíces del polinomio característico tenemos la partición del plano $\text{Tr}(A), \det(A)$ en las regiones de la figura 3.11:

- En 1 y 1a, el origen es un atractor.
- En 2 y 2a, el origen es un repulsor.
- En 3, el origen es un punto silla.

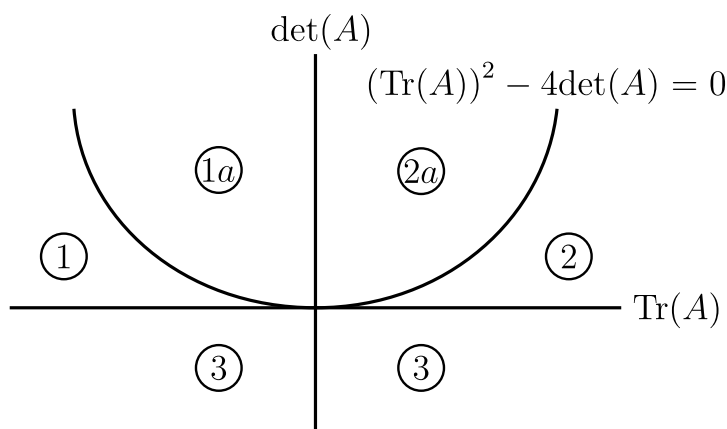


Figura 3.11: Naturaleza de los valores propios de la matriz A dependiendo de $\text{Tr}(A)$ y $\det(A)$.

Si $\det(A) > 0$ vemos que la estabilidad del origen queda completamente determinada por el signo de $\text{Tr}(A)$. La transición ocurre sobre el semieje positivo $\text{Tr}(A) = 0$ en donde los valores propios son imaginarios puros y el origen no es hiperbólico. En cambio, en el semiplano inferior $\det(A) < 0$, el origen siempre es un punto silla. Luego, sobre el eje $\det(A) = 0$ hay un valor propio que está anulándose al cambiar de signo positivo a negativo (o viceversa) y el origen deja de ser hiperbólico en esta transición. Además, los valores propios de A son complejos conjugados en las regiones $1a$ y $2a$ en donde el discriminante $(\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A) < 0$; y son reales y distintos en las regiones 1, 2 y 3 cuando $(\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A) > 0$. Sobre la parábola $(\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A) = 0$ el sistema tiene un único valor propio (real) con multiplicidad 2. En tal caso, el equilibrio sigue siendo hiperbólico siempre que $\det(A) \neq 0$.

3.5. Conjugación de sistemas lineales

Del Álgebra Lineal sabemos que existe una noción de equivalencia de dos matrices: decimos que son *similares* si poseen la misma forma canónica de Jordan; ver [10, 13] para más detalles. Dado que podemos describir las soluciones de una ecuación diferencial lineal completamente en términos de su matriz asociada, es de esperar que podamos definir una idea de equivalencia de dos EDOs lineales basados en sus respectivas matrices asociadas.

Ejemplo 24 Consideremos el sistema bidimensional $x' = Ax$, con $x = (x_1, x_2)^T$, donde A es una matriz real de tamaño 2×2 , con valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y vectores propios asociados v_1, v_2 . A modo de ilustración, supongamos que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Luego, el origen es un punto silla y las soluciones se comportan como en la sección 3.4.1 y la figura 3.5.

Consideremos ahora la siguiente transformación lineal $x = P(y)$, con

$$\begin{aligned} (x_1, x_2)^T &= P(y_1, y_2)^T \\ &= [v_1 \ v_2](y_1, y_2)^T \\ &= y_1v_1 + y_2v_2, \end{aligned}$$

donde $P = [v_1 \ v_2]$ es la matriz cuyas columnas son v_1, v_2 . Por la independencia lineal de v_1, v_2 , P es un isomorfismo lineal. De hecho, es una matriz cambio de base. Luego, del Álgebra Lineal [10, 13], la matriz A se puede expresar como

$$A = PDP^{-1},$$

donde D es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Es decir, las matrices A y D representan la misma aplicación lineal, pero en bases distintas de \mathbb{R}^2 . En particular, la EDO $x' = Ax$ representada en las nuevas coordenadas $y = (y_1, y_2)^T$ es $y' = Dy$, o equivalentemente como el sistema desacoplado

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2, \end{cases}$$

cuyas soluciones se comportan como en la figura 3.12. Luego, los sistemas $x' = Ax$ y $y' = Dy$ son cualitativamente equivalentes: uno es una versión “distorsionada” del otro, luego de aplicar el cambio de coordenadas lineal invertible P ; compare con la figura 3.5.

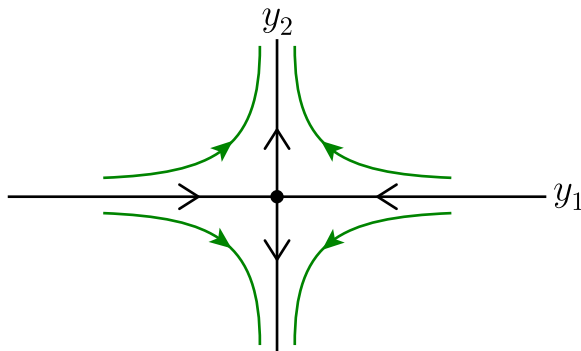


Figura 3.12: Un punto silla en el sistema $y' = Dy$, cualitativamente equivalentemente a la figura 3.5.

De hecho, para cada uno de los casos vistos en la sección anterior, podemos hallar un cambio de coordenadas lineal P tal que el sistema $x' = Ax$ se pueda escribir en las nuevas coordenadas en alguna de las siguientes formas equivalentes

(¡y más simples!): (i) $y' = Dy$, donde D es una matriz diagonal de A , o bien como (ii) $y' = Jy$, donde J la matriz de Jordan de A .

Definición 10 Consideremos dos sistemas lineales $x' = Ax$ y $x' = Bx$, donde $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Denotemos por $\varphi(t, x) = e^{tA}x$ y $\psi(t, x) = e^{tB}x$ a las soluciones respectivas que pasan por el punto $(0, x)$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Decimos que las soluciones φ y ψ son **conjugadas** si existe una biyección

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

(no necesariamente lineal), llamada **conjugación**, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, y para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Es decir, $h \circ \varphi = \psi \circ h$ como en el diagrama conmutativo de la figura 3.13.

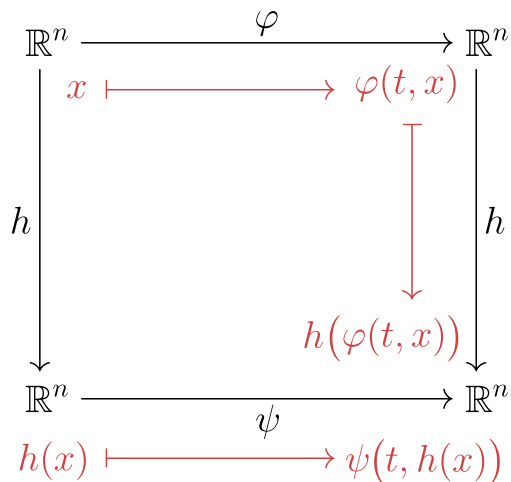


Figura 3.13: Diagrama conmutativo de dos soluciones conjugadas.

Si h es un isomorfismo lineal, o un C^r -difeomorfismo, o un homeomorfismo, se dice que los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son **linealmente conjugados**, **C^r -conjugados**, o **topológicamente conjugados**, respectivamente.

Una conjugación h es un cambio de coordenadas que preserva el parámetro t de cada curva solución. Una solución de $x' = Ax$ es llevada mediante h a una solución de $x' = Bx$ que posee las mismas propiedades dinámicas (compare las

figuras 3.5 y 3.12). Más aún, h es una relación de equivalencia entre sistemas lineales.

Ejemplo 25 Consideremos un sistema bidimensional $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, donde los valores propios de A son reales y distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces, el sistema es linealmente conjugado al sistema desacoplado

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x.$$

Análogamente, si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ son los valores propios de A , entonces $x' = Ax$ es linealmente conjugado a

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x.$$

Por último, si los valores propios de A son reales e iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ con multiplicidad geométrica 1, entonces $x' = Ax$ es linealmente conjugado a

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x.$$

Ejemplo 26 Un centro no puede ser conjugado a una silla. En efecto, para un centro se tiene $\varphi(2\pi/\beta, x) = x$, pues todas las soluciones, excepto el origen, son periódicas con período $T = 2\pi/\beta$. Sea $\psi(t, x)$ la solución del sistema con un punto silla. Supongamos que existe una conjugación h . Luego:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(\varphi(2\pi/\beta, x)) \\ &= \psi(2\pi/\beta, h(x)), \end{aligned}$$

es decir, $y = \psi(2\pi/\beta, y)$, lo cual implica que hay soluciones periódicas en una vecindad del punto silla, lo que es una contradicción.

Ejemplo 27 Los sistemas unidimensionales $x' = x$, $x' = \lambda x$, con $\lambda > 0$, y $x \in \mathbb{R}$, son topológicamente conjugados. En efecto, sean $\varphi(t, x) = e^t x$ y $\psi(t, x) = e^{\lambda t} x$ sus soluciones. Entonces

$$h(x) = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -(-x)^\lambda, & x < 0, \end{cases}$$

es una conjugación topológica. De hecho, para $x > 0$ se tiene $h(\varphi(t, x)) = h(e^t x) = e^{\lambda t} x^\lambda = e^{\lambda t} h(x) = \psi(t, h(x))$. Para $x < 0$, es similar; y para $x = 0$, es trivial. Es claro que si $\lambda \neq 1$, h no es un difeomorfismo.

Gracias a que una conjugación define una clase de equivalencia entre sistemas lineales, las nociones de *atractor* o *repulsor* dadas en la sección anterior están bien definidas y pueden formalizarse de una manera muy simple.

Definición 11 *Sea un sistema lineal $x' = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^n$. El origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ se dice un **atractor** del sistema si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} x = \mathbf{0}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Análogamente, el origen se dice un **repulsor** del sistema si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA} x = \mathbf{0}.$$

Proposición 5 *Supongamos que los sistemas lineales $x' = Ax$ y $x' = Bx$, con $x \in \mathbb{R}^n$, son topológicamente conjugados. Entonces, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un atractor de $x' = Ax$ (resp. repulsor) si y solo si también es un atractor (resp. repulsor) de $x' = Bx$.*

DEMOSTRACIÓN. La idea central es que una conjugación h entre los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ lleva puntos de equilibrio de uno en puntos de equilibrio del otro, y preserva la orientación de las curvas solución, parametrizadas por la variable independiente t .

Por definición, si h es una conjugación, se tiene $e^{tA} x = h^{-1}(e^{tB} h(x))$. Supongamos que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un atractor de $x' = Ax$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} x = \lim_{t \rightarrow \infty} h^{-1}(e^{tB} h(x)) \\ &= h^{-1}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tB} h(x)\right), \end{aligned}$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, pues h es un homeomorfismo. Si denotamos $y = h(x)$, entonces, $\mathbf{0} = h(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{tB} y$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto,

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ también es un atractor de $y' = By$. La demostración es análoga en el caso de un repulsor. ■

A partir de los resultados y conceptos de esta sección y las anteriores, emergen en forma natural y casi intuitiva los siguientes teoremas, los cuales caracterizan completamente los sistemas lineales atractores y repulsores.

Teorema 12 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. El origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ del sistema $x' = Ax$ es un atractor.
2. Todos los valores propios de A tienen parte real negativa.
3. Existen constantes $\mu > 0$ y $K \geq 1$ tales que $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.
4. El sistema $x' = Ax$ es topológicamente conjugado a $x' = -x$.

Teorema 13 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. El origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ del sistema $x' = Ax$ es un repulsor.
2. Todos los valores propios de A tienen parte real positiva.
3. Existen constantes $\mu > 0$ y $K \geq 1$ tales que $|e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.
4. El sistema $x' = Ax$ es topológicamente conjugado a $x' = x$.

Ambas demostraciones son análogas entre sí; y aunque no son difíciles de seguir, contienen pasos técnicos algo extensos y laboriosos, por lo que las omitimos. Pueden verse, por ejemplo, en [17].

3.6. Clasificación topológica de sistemas lineales hiperbólicos

Definición 12 *Un sistema lineal $x' = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^n$, se dice **hiperbólico** si todos los valores propios de A tiene parte real no nula.*

Por ejemplo, los sistemas bidimensionales simples considerados en la sección 3.4 son todos hiperbólicos, excepto el centro.

Definición 13 *Llamamos subespacio estable de $x' = Ax$ al subespacio vectorial E^s invariante por A (i.e., $Av \in E^s$ para todo $v \in E^s$) tal que $A|_{E^s}$ tiene todos sus valores propios con parte real negativa. Análogamente, E^u es el **subespacio inestable** de $x' = Ax$ si es el subespacio vectorial invariante por A tal que $A|_{E^u}$ tiene todos sus valores propios con parte real positiva.*

Del Álgebra Lineal podemos obtener E^s (resp. E^u) como el subespacio de \mathbb{R}^n generado por los vectores propios (generalizados) asociados a los valores propios con parte real negativa (resp. positiva); ver [10, 13]. Por ejemplo, de esta definición, notemos que para un atractor, $E^s = \mathbb{R}^n$, $E^u = \{\mathbf{0}\}$; y para un repulsor, $E^s = \{\mathbf{0}\}$, $E^u = \mathbb{R}^n$.

La figura 3.14 muestra el **retrato de fase** (es decir, la forma cualitativa global de la familia de soluciones) de algunos sistemas lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^3 . ¿Puedes distinguir sus subespacios estable e inestable? ¿Puedes identificar cuáles de estos sistemas son topológicamente conjugados entre sí?

Proposición 6 *Sea $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, un sistema lineal hiperbólico con s valores propios con parte real negativa (contando multiplicidad). Entonces:*

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
2. Los subespacios E^s y E^u son invariantes bajo el sistema, es decir, para todo $x \in E^s$ (resp. E^u), la solución $e^{tA}x \in E^s$ (resp. E^u), para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. $\dim E^s = s$, y $\dim E^u = n - s$.
4. Existen constantes $\mu > 0$ y $K \geq 1$ tales que
 - (a) $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|$, para todo $x \in E^s$, $t \geq 0$.
 - (b) $|e^{tA}x| \leq Ke^{\mu t}|x|$, para todo $x \in E^u$, $t \leq 0$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba se basa en las siguientes observaciones.

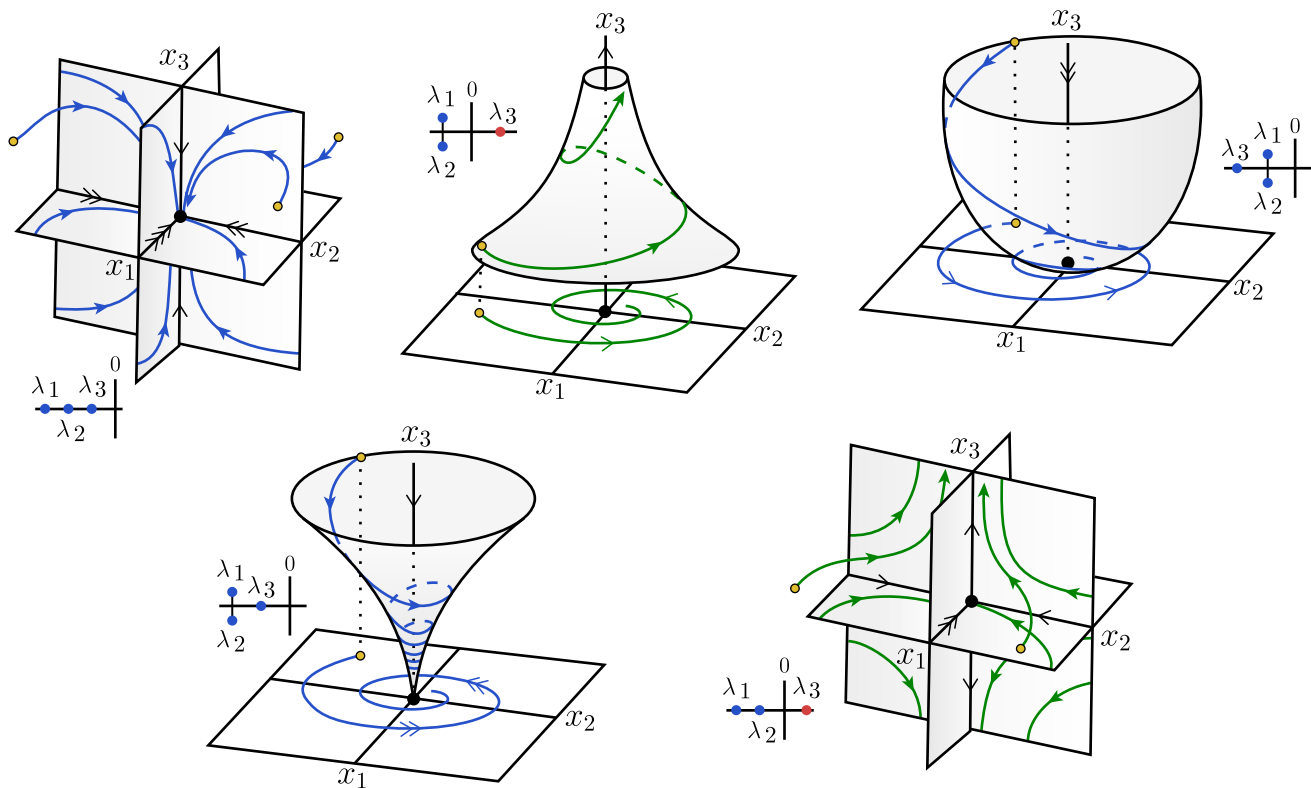


Figura 3.14: Algunos sistemas lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^3 .

1. En primer lugar, si h es una conjugación lineal (isomorfismo) entre dos sistemas, $x' = Ax$ y $x' = Bx$, entonces h debe llevar un subespacio estable en otro subespacio estable, i.e., $h(E_A^s) = E_B^s$. En efecto, $A|_{E_A^s}$ posee los mismos valores propios que $B|_{h(E_A^s)}$, pues son matrices similares.
2. Si $x' = Ax$ es un sistema lineal hiperbólico con s valores propios con parte real negativa, entonces es linealmente conjugado a un sistema de la forma

$$\begin{cases} x_1' = A_1^s x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^s, \\ x_2' = A_2^u x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^{n-s}, \end{cases} \quad (3.14)$$

donde los valores propios de A_1^s tienen parte real negativa, y los de A_2^u tienen parte real positiva. Idea: Ocupar la descomposición en la forma canónica de Jordan.

Luego, basta probar el enunciado de la Proposición para sistemas de la forma (3.14). Para estos sistemas, se tiene $E^s = \mathbb{R}^s \times \{\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-s}\}$ y $E^u = \{\mathbf{0} \in \mathbb{R}^s\} \times \mathbb{R}^{n-s}$. De aquí se obtienen en forma directa las afirmaciones (1)-(3) (¡complete los detalles!).

Para la parte (4), notemos que la conclusión no depende de la norma ni de la clase de similaridad de la matriz A (esto es, de su forma canónica de Jordan específica). Luego, basta aplicar el teorema 12 al subsistema $x'_1 = A_1^s x_1$, el que es un atractor; similarmente, $x'_2 = A_2^u x_2$ es un repulsor y aplicamos los resultados del teorema 13. ■

Corolario 6 *Bajo las hipótesis de la Proposición anterior, tenemos*

$$(a') \quad |e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|, \text{ para todo } x \in E^u, t \geq 0.$$

$$(b') \quad |e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{-\mu t}|x|, \text{ para todo } x \in E^s, t \leq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad (b) de la proposición anterior, aplicada a $\tau = -t \leq 0$ y haciendo $\bar{x} = e^{tA}x \in E^u$, tenemos

$$|x| = |e^{(\tau+t)A}x| = |e^{\tau A}\bar{x}| \leq Ke^{\mu\tau}|\bar{x}| = Ke^{-\mu t}|e^{tA}x|.$$

Luego,

$$|e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|.$$

Esto prueba (a'); la desigualdad (b') es similar (Tarea!). ■

Observación 4 La desigualdad (a) del inciso 4 de la Proposición 6 significa que todas las soluciones que pasan por puntos de E^s tienden al origen exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$. La desigualdad (b') del Corolario 6 implica que estas mismas soluciones, excepto la nula, se alejan exponencialmente del origen cuando $t \rightarrow -\infty$. En otras palabras, el comportamiento de un sistema hiperbólico en E^s es análogo al comportamiento de un atractor. Para E^u se tiene consideraciones análogas, donde el comportamiento es similar a un repulsor.

Observación 5 Las soluciones que pasan por puntos fuera de $E^s \cup E^u$, se comportan en forma similar a hipérbolas. En efecto, por el inciso 1 de la Proposición 6, la solución se puede descomponer como

$$e^{tA}x = e^{tA}x_s + e^{tA}x_u,$$

donde $x_s \in E^s$, $x_u \in E^u$ y $x = x_s + x_u$. Para $t \rightarrow \infty$, tenemos $e^{tA}x_s \rightarrow 0$ y $e^{tA}x_u \rightarrow \pm\infty$. Luego, las componentes en la dirección de E^s tienden a cero, y las componentes en dirección de E^u tienden a infinito cuando $t \rightarrow \infty$. Análogamente, cuando $t \rightarrow -\infty$, las componentes en la dirección de E^s tienden a infinito, y las componentes en dirección de E^u tienden a cero.

Teorema 14 *Dos sistemas lineales hiperbólicos $x' = Ax$ y $x' = Bx$, con $x \in \mathbb{R}^n$, son topológicamente conjugados si y solo si ambos tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea s el número de valores propios con parte real negativa para (ambos) $x' = Ax$ y $x' = Bx$. Luego, por la demostración de la Proposición 6, el sistema $x' = Ax$ es topológicamente equivalente a (3.14). Similarmente $x' = Bx$ es topológicamente equivalente a

$$\begin{cases} x'_1 = B_1^s x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^s, \\ x'_2 = B_2^u x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^{n-s}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Pero tanto $x'_1 = A_1^s x_1$ como $x'_1 = B_1^s x_1$ son atractores en \mathbb{R}^s . Luego, existe una conjugación topológica h_s entre ambos atractores, $h_s : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$. De hecho, $h_s(e^{tA_1}x_1) = e^{tB_1}h_s(x_1)$.

Análogamente, $x'_2 = A_2^u x_2$ y $x'_2 = B_2^u x_2$ son ambos repulsores en \mathbb{R}^{n-s} . Luego, existe una conjugación topológica h_u entre ambos, $h_u : \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$.

Por lo tanto, basta definir $h = (h_s, h_u) : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ como conjugación topológica en \mathbb{R}^n tal que

$$h(e^{tA_1}x_1, e^{tA_2}x_2) = (h_1(e^{tA_1}x_1), h_2(e^{tA_2}x_2)) = (e^{tB_1}, e^{tB_2})(h_s(x_1), h_u(x_2)). \quad \blacksquare$$

3.7. Ejercicios

1. Considere la ecuación lineal $x' = a(t)x$, donde $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

- a) Encuentre todas las soluciones de la ecuación.
- b) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *Existe una solución no-nula periódica de período T si y sólo si $\int_0^T a(s)ds = 0$.*
- c) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *Existe una solución no-acotada definida en \mathbb{R}^+ si y sólo si $\int_0^t a(s)ds \neq 0$ para algún $t > 0$.*
2. Sea la ecuación $x' = A(t)x$ en \mathbb{R}^3 , donde la matriz $A(t) \in M_3(\mathbb{R})$ varía continuamente con $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $\text{tr}A(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces dadas 3 soluciones linealmente independientes x_1, x_2, x_3 , el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $x_1(t), x_2(t), x_3(t) \in \mathbb{R}^3$ es independiente de t .
3. Sean $f(t) = t^3$, $g(t) = t^4$. Demuestre que las funciones f y g no pueden ser soluciones de una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0,$$

donde $a(t), b(t)$ son continuas para todo $t \in \mathbb{R}$.

4. Sea $\phi(t)$ una matriz $n \times n$ cuyos elementos son funciones de clase C^1 , no singular para cada $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que existe una única matriz $A(t)$ continua tal que $\phi(t)$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$.
5. Sea $A(t)$ una matriz antisimétrica para todo $t \in I$, es decir, $A^T(t) = -A(t)$, donde $A^T(t)$ es la traspuesta de $A(t)$. Demuestre que toda matriz fundamental $\Phi(t)$ de $\boxed{x' = A(t)x}$ satisface

$$\Phi^T(t)\Phi(t) = C,$$

donde C es una matriz constante.

6. Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ de funciones continuas en un intervalo de \mathbb{R} . Suponga que para todo t se tiene que

$$\left(\int_{t_0}^t A(s)ds \right) A(t) = A(t) \left(\int_{t_0}^t A(s)ds \right).$$

a) Demuestre que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)^m = m A(t) \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

b) Demuestre que $\Phi(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right)$ es una matriz fundamental de

$x' = A(t)x$. *Sugerencia:* Imita la demostración de la Proposición 4. Es decir:

- 1) Defina la matriz $B(t) = \int_{t_0}^t A(s) ds$ y la sucesión dada por $\phi_{k+1}(t) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t A(s) \phi_k(s) ds$, $\phi_0(t) = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad.
- 2) Demuestre que $\phi_n(t)$ converge uniformemente a

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k(t)}{k!}$$

en cada intervalo compacto.

- 3) Pruebe que $\Phi(t)$ satisface la ecuación diferencial matricial $X' = A(t)X$, con $X(t_0) = \mathbf{I}$.
- 4) Argumente por qué esto implica, a su vez, que las columnas de $\Phi(t)$ forman una base del espacio de soluciones de $x' = A(t)x$.

7. Sean a_0, \dots, a_{n-1} funciones continuas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La siguiente ecuación lineal

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)x, \quad (3.16)$$

se llama **ecuación lineal de orden n** . Considere $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones reales de clase C^n en I .

- a) Demuestre que el conjunto de las soluciones de (3.16) es un subespacio vectorial de \mathcal{C}^n de dimensión n .
- b) Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ en \mathcal{C}^n y defina el **Wronskiano del sistema de funciones** $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, denotado por

$$W(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t),$$

como el determinante de la matriz $n \times n$ cuya i -ésima fila está formada por

$$\frac{d^{i-1} \varphi_1}{dt^{i-1}}, \dots, \frac{d^{i-1} \varphi_n}{dt^{i-1}},$$

las derivadas de orden $i - 1$, $i = 1, \dots, n$ de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son soluciones de (3.16), pruebe que

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds \right).$$

- c) Demuestre que n funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ soluciones de (3.16) son linealmente independientes si y solo si

$$W(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$$

para todo $t \in I$.

- d) Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, n funciones de \mathcal{C}^n , tales que $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$ en I . Demuestre que existe una única ecuación de la forma (3.16) que tiene a $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ como base de soluciones.

8. Denotemos como $M_2(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de matrices de tamaño 2×2 de coeficientes constantes en \mathbb{R} . Considere la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- a) Encuentre una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\Phi(t)$ sea solución de la ecuación diferencial **matricial** $X' = AX$, donde $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $t \mapsto X(t)$.
- b) ¿Es $\Phi(t)$ una solución fundamental del sistema de ecuaciones diferenciales lineales **escalares** $x' = Ax$, donde $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto x(t)$? Justifique su respuesta.
- c) En el caso afirmativo, encuentre la solución $\varphi(t)$ del sistema no-homogéneo $x' = Ax + b(t)$, donde $b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ y $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9. Considere la matriz $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Demuestre que las columnas $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$, de $\Phi(t)$, con $v_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, son funciones linealmente independientes.

- b) ¿Existe una matriz $A(t)$ de orden 3×3 tal que $\Phi(t)$ sea una solución fundamental del sistema $x' = A(t)x$? En caso afirmativo, encuentre $A(t)$. En caso negativo, justifique por qué esto no contradice lo demostrado en la parte (a).
10. Se sabe que la ecuación lineal de segundo orden $x'' - b(t)x' - a(t)x = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, tiene dos soluciones linealmente independientes $\varphi_1(t) = e^{t^2}$ y $\varphi_2(t) = e^{-t^2}$ (¡No es necesario probarlo!). Sea $x' = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^2$, la representación de esta EDO como un sistema de ecuaciones diferenciales.
- (a) Encuentre una solución fundamental $\Phi(t)$, con $t \in I \subset \mathbb{R}$, para $x' = A(t)x$, especificando el dominio I de $\Phi(t)$, y determinando los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$.
- (b) Determine si el problema de Cauchy $x' = A(t)x$, $x(0) = x_0$ posee solución única.
11. Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ cuyos coeficientes son funciones reales, continuas y **periódicas** de período T . Sean $X(t), Y(t)$ soluciones fundamentales de $x' = A(t)x$. Demuestre que existen matrices $n \times n$ **invertibles** C, D y S tales que $S^{-1}CS = D$, $X(t+T) = X(t)C$, $Y(t+T) = Y(t)D$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
12. Sean A y B matrices de orden n cuyos elementos son funciones continuas, reales o complejas, definidas en un intervalo I .
- a) Sea $U = U(t)$ una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Demuestre que la inversa de U satisface la ecuación $y' = -yA(t)$.
- b) Sean $U(t)$ y $V(t)$ soluciones de $X' = A(t)X$, $X(t_0) = \mathbf{I}$ y $X' = X B(t)$, $X(t_0) = \mathbf{I}$, respectivamente, donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Demuestre que $\Phi(t) = U(t) X_0 V(t)$ es solución de $X' = A(t)X + X B(t)$, $X(t_0) = X_0$.
- c) Sea $\{U, V\}$ una solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t)Y, \\ Y' = C(t)X + D(t)Y. \end{cases}$$

Demuestre que si V es invertible en I , entonces $W(t) = U(t)V^{-1}(t)$ es una solución de la ecuación

$$Z' = B(t) + A(t)Z - ZD(t) - ZC(t)Z.$$

13. Considere los siguientes sistemas de EDOs lineales con coeficientes constantes:

$$a) \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$b) \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

$$c) \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$d) \dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} x.$$

- a) Para cada uno de estos sistemas encuentre la matriz exponencial e^{tA} .
- b) Resuelva el problema de valor inicial para el sistema (b) con valor inicial $x(0) = (1, 0)$.
- c) Encuentre un cambio de coordenadas (dado por una matriz) que diagonalice la matriz del sistema (d).

14. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre una base del espacio de soluciones de $x' = Ax$, y determine todos los valores de $\mu \in \mathbb{R}$ tal que **toda** solución $\varphi(t)$ del sistema satisfaga $|\varphi(t)| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

15. Sean las matrices de coeficientes constantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Encuentre una base del espacio de soluciones de $x' = Ax$ y pruebe que toda solución de esta ecuación tiende a 0 cuando $t \rightarrow -\infty$.
- b) Encuentre la solución φ de $x' = Bx$, con condición inicial $x(0) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Pruebe que $|\varphi(t)|$ es acotada para todo $t \in \mathbb{R}$ si y sólo si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

16. Muestre que si un sistema real homogéneo de dos ecuaciones lineales de primer orden posee matriz fundamental (compleja)

$$\begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

es también una matriz fundamental (real). Encuentre otra matriz fundamental (real) si es posible.

17. Sean $x' = Ax$ y $x' = Bx$ dos sistemas lineales atractores, tales que $AB = BA$. Demuestre que $x' = (A + B)x$ es también un atractor.
18. Decimos que una solución $x(t)$ de $x' = Ax$ es **periódica** si existe $T > 0$ tal que $x(T) = x(0)$, pero $x(t) \neq x(0)$ para $0 < t < T$; en este caso, T se denomina el **período** de la solución. Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ una matriz de orden 2×2 y suponga que $x' = Ax$ tiene una solución periódica de período $T > 0$. Demuestre que A no posee valores propios reales y que toda solución de $x' = Ax$ es trivial o bien periódica con el mismo período T .

19. Considere la ecuación

$$\dot{x} = Ax + B(t)x,$$

donde A es una matriz no singular $n \times n$ de coeficientes constantes, $B(t)$ es una matriz $n \times n$ cuyas entradas son funciones continuas para $t \geq t_0$. Suponga que:

- a) Los valores propios λ_k de A , $k = 1, \dots, n$ tienen $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$; y aquellos valores propios con $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$ son distintos.
- b) $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt$ es acotada.

Demuestre que las soluciones de la EDO son acotadas.

20. Considere la ecuación

$$\dot{x} = Ax + B(t)x,$$

donde $B(t)$ es una matriz $n \times n$ cuyas entradas son funciones continuas para $t \geq t_0$. Suponga que:

- a) A es una matriz $n \times n$ de coeficientes constantes con valores propios λ_k , $k = 1, \dots, n$ tales que $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$.
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$.

Demuestre que para todas las soluciones de esta EDO se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

21. Considere el sistema lineal $\boxed{x' = Ax}$ donde A es una matriz cuadrada real de tamaño $n \times n$.

- (a) Sea λ un valor propio de A con vector propio v . Si $x_0 \in \langle v \rangle$, demuestre que la solución del problema de Cauchy $\boxed{x' = Ax, x(0) = x_0}$ es $\varphi(t) = e^{\lambda t} x_0$. (Aquí, $\langle v \rangle$ denota el subespacio vectorial generado por v .)
- (b) Suponga que A tiene al menos un valor propio λ , real o complejo, con $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Demuestre que la EDO posee al menos una solución real no-nula $\varphi(t)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \mathbf{0}.$$

(c) Considere $n = 4$ y sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 2020 & 2021 \\ 0 & \cos(\pi/2) & \ln(0,4) & 42 \end{pmatrix}$. Determine una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^4$, con $x_0 \neq \mathbf{0}$, tal que la solución $\varphi(t)$ del problema de Cauchy $\boxed{x' = Ax, x(0) = x_0}$ satisfaga $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \mathbf{0}$.

22. Considere el sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, cuando la matriz A está dada por:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,
 d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

En cada uno de estos casos,

- a) Haga un bosquejo cualitativo de las soluciones en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 , indicando si se trata de un nodo atractor/repulsor, punto silla, foco atractor/repulsor, centro, etc., y determinando las rectas invariantes (si las hay).
- b) Identifique la forma canónica de Jordan o la matriz diagonal asociada a A , y determine la respectiva matriz de cambio de base.

23. Sea $\boxed{x' = Ax}$ un sistema bidimensional real. En términos de $\Delta = \det A$ y $\tau = \text{tr} A$, decida cuándo este sistema define una silla, nodo estable, foco estable, nodo inestable, nodo de una tangente, centro, etc. Por ejemplo, si $\Delta < 0$, tenemos una silla, etc. Ilustre gráficamente sus conclusiones.

24. Sea U el conjunto de las matrices reales 2×2 tales que el sistema $\boxed{x' = Ax}$, con $A \in U$, define alguno de los siguientes casos:

- a) una silla;
- b) un nodo (o foco) atractor;

c) un centro.

Demuestre que U es abierto en los casos (a) y (b), y que U tiene interior vacío en el caso (c).

25. Un sistema lineal $\boxed{x' = Ax}$ se dice *estructuralmente estable* si existe una vecindad $V(A)$ de la matriz A en el espacio de matrices $n \times n$, tal que para toda matriz $B \in V(A)$ el sistema lineal $\boxed{x' = Bx}$ es topológicamente conjugado a $\boxed{x' = Ax}$. Demuestre que $x' = Ax$ es estructuralmente estable si y sólo si $x' = Ax$ es hiperbólico.
26. En cada uno de los siguientes casos, encuentre los subespacios invariantes E^s y E^u , y haga un bosquejo suficientemente claro del retrato de fase del sistema lineal $\boxed{x' = Ax}$. Justifique sus razonamientos.

$$(a) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (b) A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

27. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ y considere los sistemas lineales $\boxed{\mathbf{x}' = A\mathbf{x}}$ e $\boxed{\mathbf{y}' = B\mathbf{y}}$, dados por

$$A : x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = -x_3, \quad y B : y'_1 = y_1 + y_2, y'_2 = y_2, y'_3 = -y_3.$$

- (a) ¿Verdadero o falso? Los sistemas $\boxed{\mathbf{x}' = A\mathbf{x}}$ e $\boxed{\mathbf{y}' = B\mathbf{y}}$ son linealmente conjugados. Justifique su respuesta.
- (b) Si I denota la matriz identidad de orden 3, determine todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{\mathbf{x}' = (A + \alpha I)\mathbf{x}}$ sea hiperbólico.
- (c) Determine las dimensiones de los subespacios E^s y E^u de $\boxed{\mathbf{x}' = (A + \alpha I)\mathbf{x}}$ para todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ hallados en (b) donde este sistema sea hiperbólico.
- (d) Demuestre que existen constantes $\mu > 0$, $K \geq 1$ y $\beta^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$|e^{t(B-\beta I)}\mathbf{y}| \leq Ke^{-\mu t}|\mathbf{y}|$$

para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, y $\beta > \beta^*$. Encuentre el valor de β^* .

28. Considere el sistema bidimensional $\boxed{x' = Ax}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son tales que $\det A \neq 0$. Encuentre condiciones sobre los parámetros α, β tales que el origen de \mathbb{R}^2 sea un nodo atractor/repulsor, un foco atractor/repulsor, un punto silla, o un centro. Grafique las respectivas regiones de los casos anteriores en el plano (α, β) .

29. Considere el sistema bidimensional $\boxed{\mathbf{x}' = A\mathbf{x}}$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y $A =$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Verdadero o falso? Si $\alpha + \beta \neq 0$, no existen soluciones periódicas.

(b) Para cada uno de los siguientes casos, haga un bosquejo cualitativo (a mano) suficientemente claro de las soluciones en el plano (x_1, x_2) . Incluya en su bosquejo las rectas invariantes (si las hay).

(i) $\alpha + \beta < 0$, $(\alpha - \beta)^2 < 4$;

(ii) $\alpha + \beta > 0$, $(\alpha - \beta)^2 > 4$, $\alpha\beta > -1$, $\beta > \alpha$;

(iii) $\alpha\beta < -1$, $\beta > \alpha$.

30. Considere el sistema bidimensional $\boxed{\mathbf{x}' = A(\alpha)\mathbf{x}}$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y $A(\alpha) =$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Fije el valor de $\alpha = -2$ y haga un dibujo del retrato de fase del sistema.

(b) Encuentre todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $\boxed{\mathbf{x}' = A(\alpha)\mathbf{x}}$ sea topológicamente conjugado al caso $\alpha = -2$.

(c) Encuentre los subespacios estable e inestable E^s y E^u y dibuje el retrato de fase del sistema para $\alpha > 0$.

(d) Sea el sistema $\boxed{\mathbf{x}' = B(\beta)\mathbf{x}}$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, y $B(\beta) =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro. ¿Cómo deben escogerse

β y la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ de manera que el origen sea hiperbólico y la solución respectiva sea no nula y satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \mathbf{0} ?$$

Capítulo 4

Teoría cualitativa y sistemas dinámicos

En el capítulo anterior estudiamos cómo caracterizar analíticamente a las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Entre otras cosas, fuimos capaces de expresar sus soluciones mediante fórmulas cerradas y describir por completo el espacio vectorial en el que viven estas soluciones. Sin embargo, aquí estamos interesados en sistemas de EDOs no lineales de la forma

$$\begin{cases} x'_1 = X_1(x_1, \dots, x_n), \\ x'_2 = X_2(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = X_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (4.1)$$

Para este tipo de sistemas más generales, la mayoría de las veces es imposible resolverlos analíticamente. Igualmente problemático es el hecho de que, como veremos en el último capítulo, los sistemas de mayor dimensión pueden exhibir comportamiento caótico, una propiedad que hace que conocer una solución explícita sea esencialmente algo inútil si buscamos entender el comportamiento global del sistema. Por ello, debemos recurrir a métodos alternativos, basados en argumentos geométricos y topológicos, para determinar las propiedades globales de las familias de soluciones de un sistema no lineal a partir del estudio directo de las funciones X_1, \dots, X_n . Este enfoque, conocido como *teoría cualitativa*, está íntimamente ligado al estudio de campos vectoriales y su rol como generadores de flujos o sistemas dinámicos a tiempo continuo.

4.1. Campos de vectores, sistemas dinámicos y flujos

Comenzaremos entregando un poco de la terminología de los sistemas dinámicos y de la teoría cualitativa.

Definición 14 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Un **campo de vectores** de clase C^k , $1 \leq k \leq \infty$, en Ω es una aplicación

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n)),$$

de clase C^k , que a cada punto $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ le asocia un vector

$$X(x_1, \dots, x_n) = (X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^n.$$

Al campo vectorial X le asociamos la EDO (4.1), o equivalentemente,

$$x' = X(x), \tag{4.2}$$

con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Las soluciones de (4.1) o (4.2) son funciones diferenciables $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ tales que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)), \tag{4.3}$$

para todo $t \in I$, y son llamadas **trayectorias** o **curvas integrales** de X . La expresión (4.3) implica que la gráfica de φ es una curva integral del campo X si y solo si, en cada instante t , su vector velocidad $\varphi'(t)$ coincide con el campo X evaluado en $\varphi(t)$; ver figura 4.1. Equivalentemente, el campo X define un campo de vectores tangente a las trayectorias de la EDO (4.1) o (4.2).

El campo vectorial X o EDO (4.2) corresponde a una regla que nos dice cómo cambia la cantidad x en el tiempo. Decimos que (4.2) define un **sistema dinámico**: Dada una posición inicial $x_0 \in \Omega$, el sistema dinámico definido por (4.2) nos dice dónde se ubicará x en un instante futuro $t > 0$. La trayectoria de X con condición inicial $\varphi(0) = x_0$ nos describe completamente el “itinerario” del sistema dinámico desde el punto x_0 .

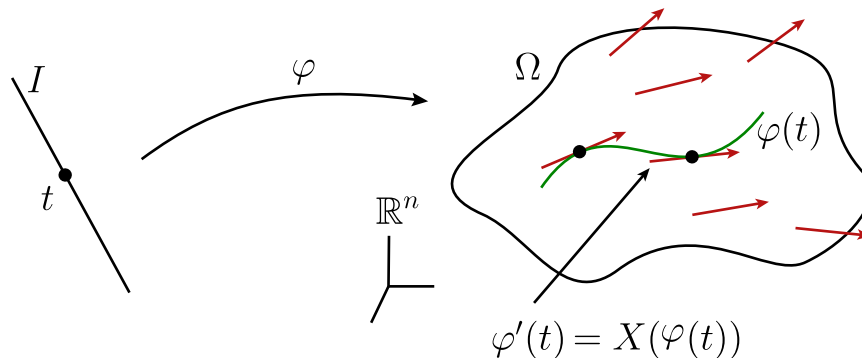


Figura 4.1: φ es una curva integral de X si y solo si su vector velocidad $\varphi'(t)$ en t coincide con el campo X en $\varphi(t)$.

Definición 15 Un punto $x^* \in \Omega$ se dice un **punto de equilibrio** de X si

$$X(x^*) = 0;$$

es decir, x^* corresponde a un estado del sistema (4.1) para el cual las variables no cambian en el tiempo y tienen un valor fijo. En cambio, si $X(x) \neq 0$, x es un **punto regular**.

Es claro que si x^* es un punto de equilibrio de X , entonces la función constante tal que $\varphi(t) \equiv x^*$, para todo $-\infty < t < \infty$, es solución de (4.2). Recíprocamente, si $\varphi(t) \equiv x^*$, para todo $-\infty < t < \infty$, es solución de (4.2), entonces x^* es un punto de equilibrio de X , pues $0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x^*)$. En distintos contextos y aplicaciones, los puntos de equilibrio reciben también otros nombres; por ejemplo: punto singular, singularidad o estado estacionario.

Haciendo un paralelo con los conceptos del Capítulo 1, una curva integral $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ de X se dice **máxima** si para toda curva integral $\Psi : J \rightarrow \Omega$ tal que $I \subset J$ y $\varphi = \Psi|_I$, entonces $I = J$ y, en consecuencia, $\varphi = \Psi$. En este caso, I se llama **intervalo máximo**.

Una ecuación diferencial del tipo (4.1) o (4.2) es llamada **ecuación diferencial autónoma**, es decir, independiente de t . Para ponerla en el contexto del Capítulo 1, podemos definir $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t, x) = X(x)$, donde $D = \mathbb{R} \times \Omega$.

Por otro lado, toda ecuación $x' = f(t, x)$ no autónoma en $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se puede considerar como una ecuación autónoma al considerar la variable independiente t como una nueva incógnita “ficticia” $s(t) = t$, al añadir la ecuación $ds/dt = 1$.

Formalmente, obtenemos una EDO extendida (i.e., con una ecuación adicional) pero autónoma, la que queda definida por $z' = F(z)$ en D , donde $z = (s, x)$ y $F(z) = (1, f(z))$. Es fácil verificar la correspondencia biunívoca entre las soluciones de la ecuación no autónoma $x' = f(x)$ y las soluciones de la ecuación autónoma asociada $z' = F(z)$.

Podemos aplicar los resultados principales del Capítulo 1 a las ecuaciones autónomas (4.2) y concluir lo siguiente.

Teorema 15 *Sea X un campo de vectores de clase C^r , $1 \leq r \leq \infty$, en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *(Existencia y unicidad de soluciones máximas) Para cada $x \in \Omega$, existe un intervalo abierto I_x donde está definida la única solución máxima $\varphi_x(t)$ de (4.2) tal que $\varphi_x(0) = x$.*
2. *(Propiedad de grupo) Si $y = \varphi_x(t)$ y $t \in I_x$, entonces la solución $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$ está definida para todo $s \in I_y := \{s = \tau - t : \tau \in I_x\}$.*
3. *(Diferenciabilidad) El conjunto $D = I_x \times \Omega$ es abierto en \mathbb{R}^{n+1} y la aplicación $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(t, x) := \varphi_x(t)$ es de clase C^r . Además, el mapeo φ satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt} (d\varphi(t, x)) = dX(\varphi(t, x)) \cdot d\varphi(t, x),$$

donde $d\varphi(t, x) = \partial\varphi/\partial x(t, x)$ y $dX = \partial X/\partial x$ denotan las respectivas matrices jacobianas con respecto a x (también llamadas derivadas espaciales).

El teorema anterior de hecho nos dice que $d\varphi(t, x)$ es la solución de un problema de valor inicial en el espacio de las aplicaciones lineales en \mathbb{R}^n : Para cada $x_0 \in \Omega$ la derivada espacial $d\varphi(t, x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} (d\varphi(t, x_0)) = dX(\varphi(t, x_0)) \cdot d\varphi(t, x_0), \quad (4.4)$$

con la condición inicial $d\varphi(0, x_0) = I$. Aquí podemos considerar la condición inicial x_0 como un parámetro.

Definición 16 La aplicación $\varphi : D \rightarrow \Omega$ del Teorema 15, inciso (3), se llama **flujo** generado por el campo vectorial X . El flujo $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ determina el estado del sistema como función del “tiempo” t desde una condición inicial $x \in \Omega$. Así, el flujo determina un **sistema dinámico**: un proceso que describe la evolución en el tiempo (t) de una cantidad (x) mediante una regla determinística (el flujo $\varphi_x(t)$).

La idea intuitiva es que los puntos de Ω “fluyen” a lo largo de las trayectorias del campo X a medida que t avanza. Notemos que, del teorema anterior, se tiene que el flujo φ o sistema dinámico satisface:

- $\varphi(0, x) = x$,
(Si el tiempo no corre, no hay evolución de la cantidad x .)
- $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$.
(Evolución en el tiempo es determinística y sólo depende del punto inicial x y no de cómo “contamos” el paso del tiempo.)

Ejemplo 28 Para sistemas lineales de la forma

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

el flujo viene dado por:

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x,$$

donde

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$$

En particular, los flujos lineales para las matrices de Jordan de tamaño 2×2 , $x \in \mathbb{R}^2$, son los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad e^{tA}x = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} x;$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad e^{tA}x = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} x;$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad e^{tA}x = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Ejemplo 29 Consideremos el sistema no lineal en $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + x^3, \end{cases}$$

Definamos el campo de vectores $X(x, y) = (x, -y + x^3)$. La primera ecuación es desacoplada y puede integrarse directamente para obtener $x(t) = ae^t$. Sustituyendo este resultado en la ecuación para y e integrando, el flujo de este campo está dado entonces por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right),$$

con $t \in \mathbb{R}$ y donde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ representa una condición inicial.

Es claro que si el intervalo de definición $I_x = \mathbb{R}$ para todo x , entonces el flujo generado por X es un flujo de clase C^r en todo Ω . Es decir, posee la misma clase de diferenciabilidad que el campo X . Más aún, el flujo nos entrega toda la “historia” de x a medida que el tiempo corre desde $-\infty$ a $+\infty$. En los casos en que $I_x \neq \mathbb{R}$, decimos que φ es un **flujo local**.

Un caso importante es la de un punto de equilibrio x^* tal que $\varphi(t, x^*) = x^*$. Denotando $dX(x^*) = A$ a la matriz jacobiana del campo X en el punto de equilibrio x^* , a partir de (4.4) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} (d\varphi(t, x^*)) = A d\varphi(t, x^*),$$

con $d\varphi(0, x^*) = I$. La solución de esta ecuación lineal es

$$d\varphi(t, x^*) = e^{tA}.$$

Esto significa que, en una vecindad de un punto de equilibrio, el flujo es “aproximadamente” lineal. Ahondaremos más en los detalles técnicos y alcances de esta observación en la sección 5.

4.2. Retrato de fase de un campo vectorial

Definición 17 El conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$, es decir, la imagen de la curva integral de X por el punto p , se llama la **órbita** de X por el punto $p \in \Omega$.

Una órbita nos indica qué le sucede a un punto inicial $p \in \Omega$ a medida que pasa el tiempo. También puede entenderse como el “itinerario” del sistema dinámico al partir desde el punto p . Las órbitas son curvas en Ω parametrizadas por t y orientadas en la dirección de crecimiento de t . Si el campo de vectores X es suficientemente suave también podemos ir “hacia atrás” en el tiempo y seguir el flujo en reversa y ver “desde dónde” venía el punto p . En lo que nos concierne, asumiremos que el campo X es suficientemente suave de manera que el pasado y el futuro estén únicamente determinados por la condición inicial $\varphi(0) = p$. En otras palabras, la EDO siempre tendrá soluciones únicas para un número suficiente de condiciones iniciales.

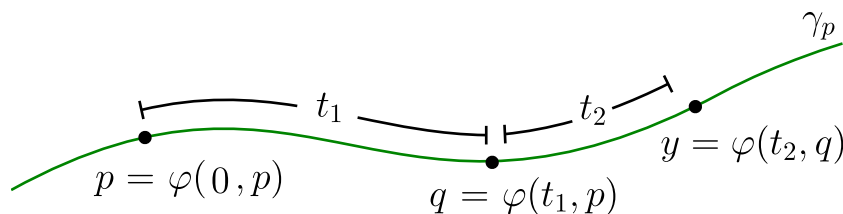


Figura 4.2: $q \in \gamma_p$ si y solo si $\gamma_p = \gamma_q$.

Notemos que si $q \in \gamma_p$, entonces $q = \varphi(t_1, p)$, para algún $t_1 \in I_p$. Sea $y \in \gamma_q$. Luego, $y = \varphi(t_2, q) = \varphi(t_2 + t_1, p)$, para algún t_2 tal que $t_2 + t_1 \in I_p$; ver figura 4.2. Por lo tanto, $y \in \gamma_p$. En conclusión, $q \in \gamma_p$ si y solo si $\gamma_p = \gamma_q$. Por lo tanto, dos órbitas de X coinciden, o bien, son disjuntas.

Esto implica que el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ admite una descomposición en una unión disjunta de curvas diferenciables. Cada una de estas órbitas puede ser de alguno de los siguientes tipos:

- a) Imagen biunívoca de un intervalo de \mathbb{R} ,
- b) Un punto (esto es, un equilibrio del campo X),

c) Difeomorfa a un círculo (es decir, una curva cerrada o solución periódica).

Definición 18 *El conjunto abierto Ω , dotado de una descomposición en órbitas de X se llama **retrato de fase** de X . Las órbitas están orientadas en el sentido de las curvas integrales de X , es decir, en el sentido inducido por $t \in I$.*

Ejemplo 30 La línea de fase de una ecuación diferencial autónoma unidimensional $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es el retrato de fase del campo $X(x) = f(x)$. Aquí, las únicas órbitas posibles corresponden a puntos de equilibrio y segmentos abiertos de la recta.

Ejemplo 31 Todos los bosquejos y figuras de las soluciones de los sistemas bidimensionales simples y sistemas lineales hiperbólicos vistos en el capítulo anterior corresponden a representaciones esquemáticas de los retratos de fase respectivos.

Ejemplo 32 Consideremos el sistema no lineal en $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$X : \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + x^3, \end{cases}$$

En la sección anterior calculamos el flujo de X , el cual viene dado por:

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right),$$

con $t \in \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. ¿Cuál es el retrato de fase de X ? A pesar de que tenemos una fórmula explícita para el flujo, no es trivial graficar las órbitas asociadas como curvas en \mathbb{R}^2 , por cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Esto plantea una pregunta más general: *¿Cuál es el retrato de fase para un sistema no lineal?, es decir, ¿Cómo podemos caracterizar el comportamiento cualitativo de las soluciones de una EDO no lineal, incluso cuando no tengamos una fórmula para las soluciones (como ocurrirá en la mayoría de las veces)?*

Para orientar las respuestas a estas preguntas, consideremos el cambio de coordenadas $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4} \right).$$

Se puede verificar que $h^{-1}(\varphi(t, h(x, y))) = (e^t x, e^{-t} y)$, el cual es el flujo de una silla lineal

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Como h es una biyección, uno esperaría que el retrato de fase del campo X sea *cualitativamente* como el de una silla hiperbólica dada por el campo $Y(x, y) = (x, -y)$. Efectivamente, los retratos de fase son como los de la figura 4.3.

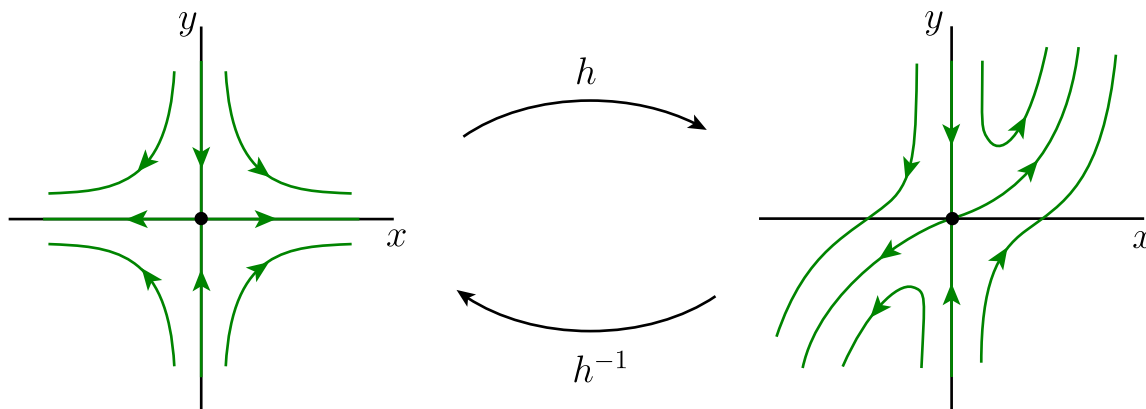


Figura 4.3: Retratos de fase del ejemplo 32.

4.3. Equivalencia y conjugación de campos vectoriales

Motivados por el ejemplo anterior, introducimos algunas nociones de equivalencia entre dos campos vectoriales, las cuales permiten comparar sus retratos de fase.

Definición 19 Sean X_1, X_2 dos campos de vectores definidos en abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente. Se dice que X_1 es **topológicamente equivalente** (resp. **C^r -equivalente**) a X_2 si existe un homeomorfismo (resp. un C^r -difeomorfismo) $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, que lleva órbitas de X_1 en órbitas de X_2 preservando su orientación. Es decir, sea $p \in \Omega_1$ y sea $\gamma^1(p)$ la órbita orientada de X_1 que pasa por p ; entonces, $h(\gamma^1(p))$ es la órbita orientada $\gamma^2(h(p))$ de X_2 pasando por $h(p)$; ver figura 4.4. El mapeo h se dice una **equivalencia topológica** (resp. **C^r -equivalencia**) entre X_1 y X_2 .

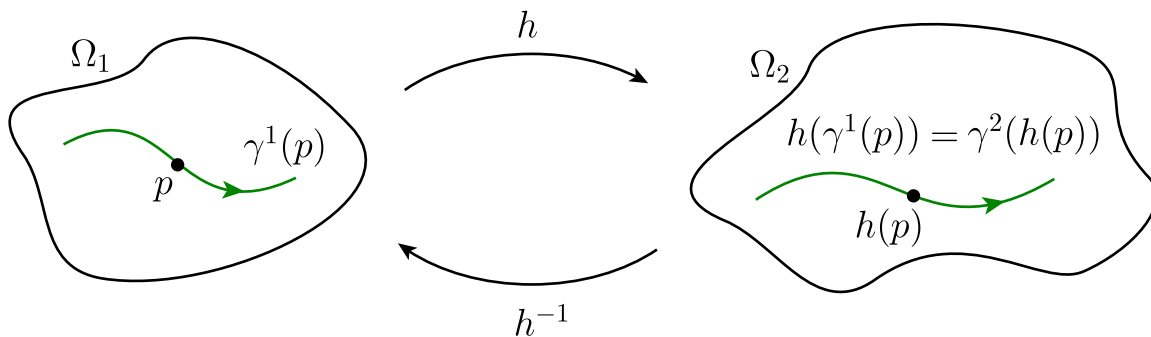


Figura 4.4: Equivalencia topológica.

Notemos que esta definición define una relación de equivalencia entre campos de vectores definidos en abiertos de \mathbb{R}^n .

Definición 20 Sean los campos de vectores $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sean φ_1 y φ_2 sus flujos respectivos. Decimos que X_1 es **topológicamente conjugado** (resp. **C^r -conjugado**) a X_2 si existe un homeomorfismo (resp. un C^r -difeomorfismo) $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)),$$

para todo $x \in \Omega_1$ y todo $t \in I_x$. Es decir, h satisface

$$\varphi_1 = h^{-1} \circ \varphi_2 \circ h.$$

El mapeo h se dice una **conjugación topológica** (resp. **C^r -conjugación**) entre X_1 y X_2 .

Esta definición extiende los conceptos de conjugación definidos en el capítulo anterior para el caso lineal. Una relación de conjugación también es una relación de equivalencia entre campos definidos en abiertos de \mathbb{R}^n . Notemos también que toda conjugación es una equivalencia; sin embargo, una conjugación *preserva* el parámetro t del flujo, lo cual, en general, no es cierto para equivalencias. Una equivalencia h entre X_1 y X_2 lleva puntos de equilibrio en puntos de equilibrio, y órbitas periódicas en órbitas periódicas. Si h es además una conjugación, entonces el período de las órbitas periódicas también es preservado.

Ejemplo 33 En el ejemplo 32, la aplicación $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$ es una conjugación entre $X(x, y) = (x, -y + x^3)$ e $Y(x, y) = (x, -y)$.

Ejemplo 34 Sean las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, con $a > 0$, $b > 0$. Los sistemas lineales $x' = Ax$ y $x' = Bx$ definen centros cuyas órbitas periódicas tienen período $T_A = 2\pi/a$ y $T_B = 2\pi/b$, respectivamente. Luego, estos sistemas son conjugados si y solo si $a = b$. Por otro lado, la función identidad en \mathbb{R}^2 es una C^∞ -equivalencia.

Proposición 7 Sean $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de vectores de clase C^r , y sea $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un difeomorfismo de clase C^r . Entonces, h es una conjugación entre X_1 y X_2 si y solo si

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \quad (4.5)$$

para todo punto $p \in \Omega_1$.

Desde esta Proposición en adelante, $Dh(p)$ es la notación que usaremos para la matriz Jacobiana de h evaluada en p . Notemos además que (4.5) es equivalente a

$$X_1(p) = (Dh(p))^{-1} X_2(h(p)). \quad (4.6)$$

DEMOSTRACIÓN. Sean φ_1 y φ_2 los flujos de X_1 y X_2 , respectivamente. Supongamos que h satisface (4.5). Sea $p \in \Omega_1$. Denotemos $\Psi(t) := h(\varphi_1(t, p))$, con $t \in I_p$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi(t) &= Dh(\varphi_1(t, p)) \frac{d}{dt}\varphi_1(t, p), \\ &= Dh(\varphi_1(t, p))X_1(\varphi_1(t, p)), \\ &= X_2(h(\varphi_1(t, p))), \\ &= X_2(\Psi(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Ψ es solución de $x' = X_2(x)$, con $x(0) = h(p)$. Luego,

$$\Psi(t) = h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p)),$$

y por lo tanto, h es una conjugación.

Recíprocamente, supongamos que h es una conjugación. Dado $p \in \Omega_1$, se tiene $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$, para todo $t \in I_p$. Derivando esta relación a ambos lados con respecto a t y evaluando en $t = 0$ se obtiene (4.5). ■

Ejemplo 35 Considere el sistema planar dado por el campo de vectores X :

$$X : \begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Sea el cambio de coordenadas $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ dado por la transformación

$$h : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases} \quad (4.7)$$

Luego, para determinar cómo h transforma el campo vectorial X en otro campo Y definido en el sistema de coordenadas (u, v) , aplicamos la fórmula (4.6) y obtenemos:

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= (Dh)^{-1} \cdot X(x(u, v), y(u, v)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P(x(u, v), y(u, v)) \\ Q(x(u, v), y(u, v)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

(La igualdad (4.8) también puede obtenerse derivando (4.7) a ambos lados con respecto a t y ocupando la regla de la cadena.)

En particular, si $P(x, y) = x - 2y$ y $Q(x, y) = -y$, el campo de vectores X es lineal y su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la transformación de coordenadas h dada por la matriz cambio de base cuyas columnas corresponden a vectores propios (o vectores propios generalizados, si fuese el caso) de A , es decir, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ con

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

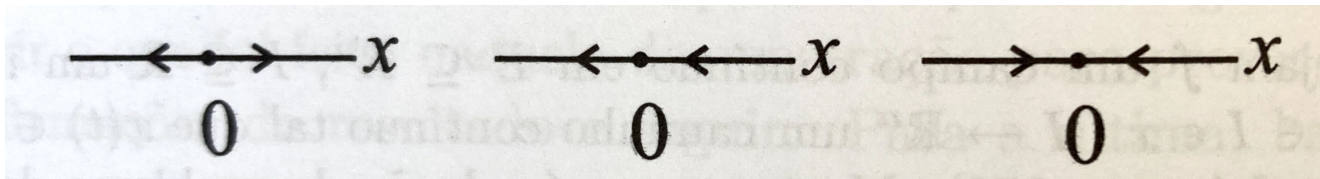
(Aquí, los valores propios de A son 1 y -1 .) Con esto, según (4.8), el campo de vectores Y en las coordenadas (u, v) es

$$Y : \begin{cases} \dot{u} = u, \\ \dot{v} = -v, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

es también un sistema lineal y su matriz asociada es justamente la forma diagonal (en general, la Forma Canónica de Jordan) de la matriz A en las coordenadas originales.

4.4. Ejercicios

1. Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un campo de clase C^1 con un solo punto de equilibrio, ubicado en el origen. Muestre que el retrato de fase de X consiste en *exactamente* tres órbitas distintas (i.e., ni más ni menos) y que corresponde a uno de los tres siguientes tipos (módulo conjugación):



2. Demuestre que una conjugación topológica lleva puntos de equilibrio en puntos de equilibrio y órbitas periódicas en órbitas periódicas preservando el período.
3. Considere la ecuación diferencial dada por

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \\ x_2' = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \end{cases}$$

Demuestre que fuera del origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$, esta ecuación diferencial es C^1 -conjugada al sistema

$$\begin{cases} r' = r(r^2 - 1), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

donde (r, θ) son coordenadas polares.

4. Identifique las funciones siguientes como homeomorfismos, difeomorfismos (o como ninguno) en sus dominios de definición:
(a) $h(x) = 2x + 1$; (b) $h(x) = 2x^2$; (c) $h(x) = x^3$;
(d) $h(x) = \frac{5}{3}x^{5/3}$; (e) $h(x) = e^x$; (f) $h(x) = \arctan x$.
5. Construya un homeomorfismo de la recta real que sirva para establecer una equivalencia topológica entre las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = 2x$ y $\dot{x} = x + 2$.
6. Muestre que los campos de vectores $\dot{x} = -x$, $\dot{x} = -4x$, y $\dot{x} = -x^3$ son todos topológicamente equivalentes. Encuentre explícitamente homeomorfismos que relacionen sus órbitas.
7. Considere la ecuación $\dot{x} = x^2 - 1 + \lambda$ que depende del parámetro real λ . Demuestre que esta EDO es topológicamente equivalente a:
(a) $\dot{x} = x^2 - 1$ si $-\infty < \lambda < 1$,
(b) $\dot{x} = x^2$ si $\lambda = 1$,
(c) $\dot{x} = x^2 + 1$ si $\lambda > 1$.

Capítulo 5

Estabilidad local de equilibrios hiperbólicos

Sea p un punto regular de un campo X , de clase C^r , $r \geq 1$. Se puede demostrar que en una vecindad de p , todas las órbitas de X son cualitativamente equivalentes a líneas rectas que fluyen con la misma dirección y sentido. Este resultado formal se conoce como *teorema del flujo tubular* (*flow-box theorem*, en inglés) y dice que existe un cambio de coordenadas de clase C^r que conjuga X , en una vecindad de p , en el campo constante $Y \equiv (1, 0, \dots, 0)$; ver figura 5.1. Por lo tanto, dos campos X e Y son siempre C^r -conjugados en torno a puntos regulares. Se pueden hallar más detalles sobre el teorema del flujo tubular en [2, 17].

Si p es un punto de equilibrio, la situación es más compleja. Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 para un sistema lineal teníamos sillas, centros, focos, nodos, etc. Y en más dimensiones, es de esperar que la variedad de tipos de equilibrios aumente. Afortunadamente, podemos reducir nuestro análisis a aquellos tipos de puntos de equilibrio que son más típicos o *genéricos*, es decir, aquellos que son (en algún sentido) más probables de encontrar en un sistema. Estos son los equilibrios hiperbólicos.

Para ser más precisos, si el campo de vectores viene dado por

$$X(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces consideremos su matriz Jacobiana $DX(p)$ en p , definida como la ma-

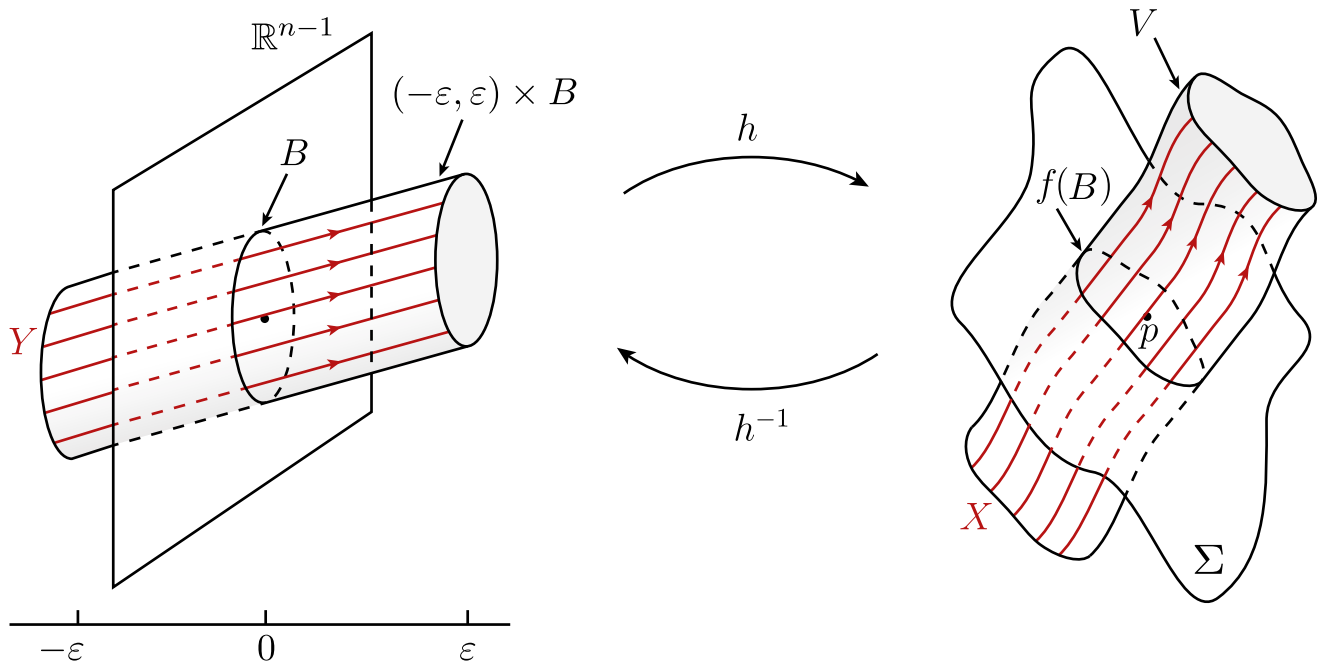


Figura 5.1: Teorema de la vecindad tubular.

triz $n \times n$

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

Definición 21 *Un punto de equilibrio p del campo X de clase C^r , $r \geq 1$, se dice **hiperbólico** si todos los valores propios de la matriz jacobiana $DX(p)$ tienen parte real diferente de cero.*

Para un equilibrio hiperbólico p , veremos que el número de valores propios con parte real negativa de $DX(p)$ determina por completo las propiedades de estabilidad de p y el retrato de fase local. Esto se conoce como el teorema de Hartman-Grobman, del cual omitimos su demostración pues se escapa del dominio de este curso, pero remitimos al lector a las siguientes referencias [14, 15, 17].

Teorema 16 (Hartman-Grobman) *Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de vectores de clase C^1 y sea $p \in \Omega$ un punto de equilibrio hiperbólico. Entonces, existen vecindades V de p y W del origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, tal que*

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in V,$$

es topológicamente conjugado al sistema linealizado

$$\dot{u} = DX(p)u, \quad u \in W.$$

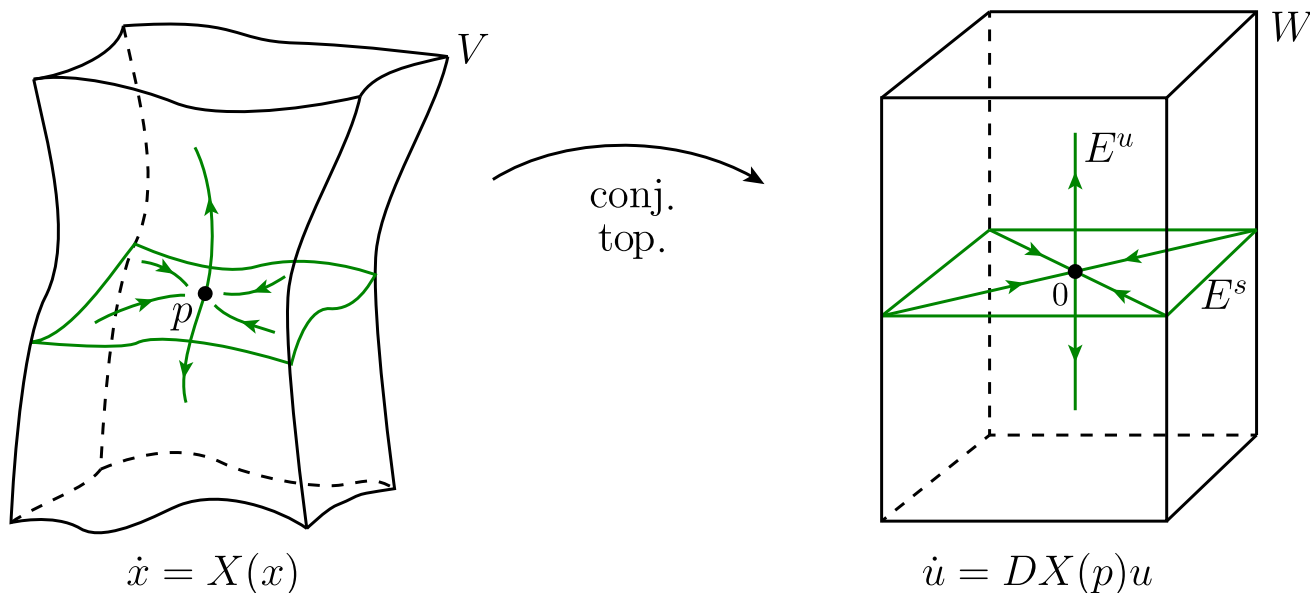


Figura 5.2: Teorema de Hartman-Grobman.

El teorema de Hartman-Grobman nos dice que la dinámica de cualquier sistema de EDOs no lineales es cualitativamente equivalente a la dinámica de un sistema lineal cerca de sus equilibrios hiperbólicos; es decir, como aquellos retratos de fase vistos en el capítulo anterior. La idea geométrica es mostrada en la figura 5.2: Si p es un equilibrio hiperbólico, existe un cambio de coordenadas que “endereza”, “aplana” y “rectifica” las trayectorias dejándolas (localmente) como las de un sistema lineal hiperbólico.

Otra consecuencia del teorema de Hartman-Grobman es que podemos extender la misma clasificación de equilibrios hiperbólicos atractores, repulsores y silla del

capítulo anterior (para sistemas lineales) al caso general (no lineal). Definamos las tres cantidades siguientes:

- n_0 = Número de valores propios de $DX(p)$ con parte real nula;
- n_+ = Número de valores propios de $DX(p)$ con parte real positiva;
- n_- = Número de valores propios de $DX(p)$ con parte real negativa.

Obviamente, $n_0 + n_+ + n_- = n$ al considerar la multiplicidad de valores propios. Además, un equilibrio p del sistema $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, es **hiperbólico** si y solo si $n_0 = 0$.

Definición 22 *Un equilibrio hiperbólico p del sistema $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, se dice un **atractor** si $n_- = n$; p es un **repulsor** si $n_+ = n$; y p es un **punto silla** si el producto $n_+ \cdot n_- \neq 0$.*

El siguiente teorema es consecuencia directa del teorema de Hartman-Grobman y del teorema 14:

Teorema 17 *Considere los dos sistemas no-lineales*

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.1)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad (5.2)$$

con equilibrios hiperbólicos x_0 de (5.1) e y_0 de (5.2). Entonces, los retratos de fase de (5.1) y (5.2) son localmente topológicamente equivalentes cerca de x_0 e y_0 , respectivamente, si y sólo si estos equilibrios tienen el mismo número n_- (y n_+) de valores propios con parte real negativa (y positiva).

Ejemplo 36 Consideremos el sistema en \mathbb{R}^3

$$X : \begin{cases} x'_1 = -x_1, \\ x'_2 = -x_2 + x_1^2, \\ x'_3 = x_3 + x_1^2. \end{cases}$$

Es fácil verificar que el origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ es el único punto de equilibrio del sistema. La linealización del campo X en el origen es la matriz diagonal

$$A := DX(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$ y $\lambda_3 = 1 > 0$. Como $n_0 = 0$, entonces $\mathbf{0}$ es un equilibrio hiperbólico. Más aún, por el teorema de Hartman-Grobman, dado que $n_- = 2$ y $n_+ = 1$, entonces el origen es un punto silla.

De hecho, podemos decir mucho más sobre el retrato de fase de X cerca del origen. La matriz A posee un subespacio estable E^s , con $\dim E^s = 2$, y un subespacio inestable E^u , con $\dim E^u = 1$. Más aún, E^s corresponde al plano xy , mientras que E^u es el eje z . Dado que X es conjugado al sistema lineal dado por la matriz A , deberíamos esperar que existieran “análogos no lineales” de E^s y E^u en el sistema original no lineal.

Busquemos el análogo a E^s . Este conjunto debe ser 2-dimensional y debe corresponder a aquellas soluciones que convergen al origen a medida que $t \rightarrow \infty$. Integrando la ecuación $x_1' = -x_1$, obtenemos

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}.$$

Sustituyendo esta solución en el resto de las componentes del campo X e integrando llegamos a

$$\begin{aligned} x_2(t) &= c_2 e^{-t} + c_1^2 (e^{-t} - e^{-2t}) \\ x_3(t) &= c_3 e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^t - e^{-2t}). \end{aligned}$$

Aquí, las constantes $c = (c_1, c_2, c_3) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ corresponden a la condición inicial.

Si denotamos $\varphi(t, x)$ al flujo de X que pasa por $\varphi(0, x) = x$, las soluciones que convergen al origen a medida que $t \rightarrow \infty$ deben satisfacer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, c) = 0 \Leftrightarrow c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0.$$

Luego, el conjunto no lineal “análogo” a E^s , al cual denotaremos por W^s , viene dado por

$$\begin{aligned} W^s &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(t, x) \rightarrow 0, \text{ para } t \rightarrow \infty\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -x_1^2/3\}. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, c) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Luego, el conjunto no lineal “análogo” a E^u , denotado por W^u , viene dado por

$$\begin{aligned} W^u &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(t, x) \rightarrow 0, \text{ para } t \rightarrow -\infty\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

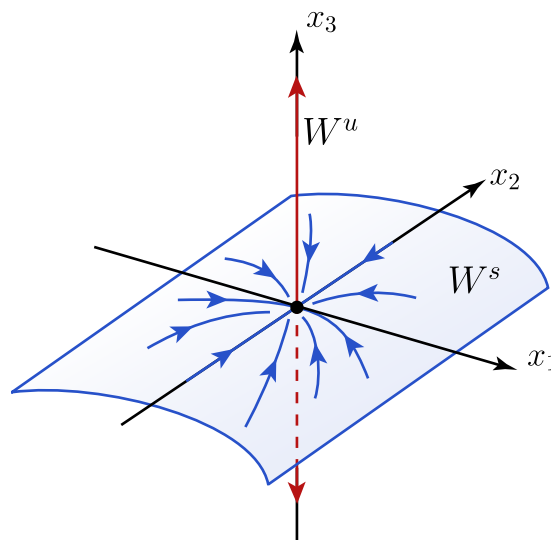


Figura 5.3: Retrato de fase del ejemplo 36.

La figura 5.3 muestra el retrato de fase en una vecindad del origen para el campo de vectores no lineal X . Los conjuntos W^s y W^u se denominan **variedad estable** e **inestable**, respectivamente, de un equilibrio hiperbólico, y son los análogos no lineales de los subespacios E^s y E^u del caso lineal. Existe un resultado formal, conocido como el *teorema de la variedad estable*, el que asegura que W^s y W^u son conjuntos invariantes bajo el flujo de X , W^s es localmente la gráfica

de una función diferenciable (y por tanto, una superficie suave) de dimensión n_- ; similarmente, W^u es también suave y posee dimensión n_+ . Además, W^s es tangente a E^s y W^u es tangente a E^u en el punto de equilibrio (de hecho, en el ejemplo anterior, W^u y E^u son el mismo conjunto! ...aunque esto no es algo usual). Más detalles se pueden hallar en [14, 15].

5.1. Ejercicios

1. Usando el Teorema de Hartman-Grobman (cuando sea posible), encuentre y clasifique los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas no-lineales, haga un bosquejo cualitativo del retrato de fase en una vecindad de cada punto de equilibrio, e intente llenar el resto del retrato de fase:

a) $\dot{x} = -x + x^2, \dot{y} = x + y.$

b) $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x^2 - 4.$

c) $\dot{x} = 1 + y - e^{-x}, \dot{y} = x^3 - y.$

d) $\dot{x} = \sin y, \dot{y} = \cos x.$

e) $\dot{x} = \sin y, \dot{y} = x - x^3.$

f) $\dot{x} = y + x - x^3, \dot{y} = -y.$

g) $\dot{x} = xy - 1, \dot{y} = x - y^3.$

Para cada uno de los sistemas anteriores, plotee un retrato de fase generado por computador y compare con sus bosquejos aproximados.

2. Encuentre todos los puntos de equilibrio **en el primer cuadrante** del sistema en \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = x^2 + 3y^2 - 4, \\ y' = xy - 1, \end{cases}$$

y clasifíquelos según su estabilidad.

3. Un método de control de plagas consiste en generar o introducir un número de insectos estériles en una población. Si la fracción de insectos que nacen

estériles es γ , un modelo sugerido es:

$$\begin{cases} \dot{N} = \left(\frac{aN}{N+n} - b \right) N - kN(N+n), \\ \dot{n} = \gamma N - bn, \end{cases}$$

donde $N(t)$ y $n(t)$ es el número de insectos fértiles e infértiles, respectivamente, y $a > b > 0$ y $k > 0$ son parámetros. Determine las condiciones necesarias sobre el parámetro γ para la erradicación de la peste.

4. Considere los sistemas no lineales planares

$$X : \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y^3, \\ \dot{y} = x^3 - y. \end{cases} \quad Y : \begin{cases} \dot{x} = x - y^3, \\ \dot{y} = x^3 - y. \end{cases}$$

- Encuentre **todos** los puntos de equilibrio en \mathbb{R}^2 del sistema X .
- Determine la estabilidad de los puntos de equilibrio **hiperbólicos** del sistema X y haga un bosquejo del retrato de fase.
- Para el sistema Y responda las mismas preguntas (a) y (b).
- ¿Es el sistema Y localmente topológicamente equivalente al sistema X en una vecindad del origen $(0, 0)$?

5. Sea la transformación continua $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $h(\mathbf{x}) = h(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + \frac{x_1^2}{3} \right)$.

- Demuestre que h es una conjugación entre el sistema $\boxed{\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})}$ y el sistema $\boxed{\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}}$, donde

$$X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix},$$

y $A = DX(\mathbf{0})$ es la matriz jacobiana del campo X en el origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.

Sugerencia: Considere el teorema de la función inversa, o equivalentemente, el teorema de cambio de coordenadas en \mathbb{R}^n . Con esto pruebe la existencia y diferenciabilidad de h^{-1} . Luego, si $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$, pruebe que $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.

b) Determine la estabilidad local de los puntos de equilibrio de $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$.

6. Considere **dos** sistemas no-lineales de clase C^k , $k \geq 1$,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.3)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (5.4)$$

con equilibrios hiperbólicos x_0 de (5.3) e y_0 de (5.4). Demuestre que los retratos de fase de (5.3) y (5.4) son localmente topológicamente equivalentes cerca de x_0 e y_0 , respectivamente, si y sólo si estos equilibrios tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa.

7. Considere una ecuación de primer orden

$$x' = f(x, a),$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable de estado y $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro constante. Suponga que existen x_0, a^* tales que $f(x_0, a^*) = 0$ y $\partial f / \partial x|_{(x_0, a^*)} \neq 0$. Demuestre que la ecuación diferencial

$$x' = f(x, a^* + \epsilon)$$

tiene un equilibrio $x_0(\epsilon)$ donde $\epsilon \mapsto x_0(\epsilon)$ es una función suave que satisface $x_0(0) = x_0$ para ϵ suficientemente pequeño.

8. Suponga un campo de vectores bidimensional con dos puntos de equilibrio: uno tiene un valor propio positivo y uno negativo, y el otro tiene dos valores propios complejos conjugados con parte real negativa. Si este campo de vectores no tiene más puntos de equilibrio, dé al menos dos ejemplos topológicamente no-equivalentes de un posible retrato de fase.

9. Sean φ y ψ dos flujos en \mathbb{R}^2 que poseen exactamente dos puntos de equilibrio cada uno y ambos son sillas. Suponga que para el flujo φ la variedad inestable de una de las sillas corresponde a la variedad estable de la otra, pero esta propiedad no es verdad para ψ . Demuestre que φ y ψ no son topológicamente equivalentes.

Observación: Asuma que las variedades estable e inestable locales se pueden

extender en forma global al resto del espacio de fase \mathbb{R}^2 al hacer que puntos en W_{loc}^s (resp. W_{loc}^u) evolucionen mediante el flujo para todo $t < 0$ (resp. $t > 0$).

Capítulo 6

Estabilidad local de soluciones periódicas

Un tipo de órbita muy especial de un campo de vectores es aquella que viene dada por una curva cerrada difeomorfa a un círculo. Estas corresponden a soluciones periódicas del sistema de ecuaciones asociado.

Definición 23 Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un campo de vectores con φ el flujo asociado. Supongamos que para un punto $x^* \in \Omega$ existe un instante $\tau \in \mathbb{R}$ con $\tau > 0$ tal que $\varphi(\tau, x^*) = x^*$. Entonces, la órbita cerrada

$$\gamma = \{\varphi(t, x^*) \in \Omega : 0 \leq t < \tau^*\},$$

que pasa por x^* se dice una **órbita periódica** o **ciclo**. Aquí $\tau^* > 0$ es el número τ más pequeño tal que $\varphi(\tau, x^*) = x^*$ y se llama el **período** de γ .

Si todas las órbitas vecinas se aproximan a la órbita periódica, decimos que el ciclo es *estable* o *atractor*. En caso contrario, el ciclo es *inestable*, o en casos excepcionales, *semi-estable*. Formalizaremos mejor estas definiciones algunas páginas más adelante.

Las órbitas periódicas estables son muy importantes científicamente: ellas modelan sistemas que exhiben oscilaciones auto-sostenidas. En otras palabras, estos sistemas oscilan incluso en ausencia de fuerzas externas. Algunos ejemplos son: los latidos del corazón, los disparos periódicos de impulsos nerviosos en neuronas, los ritmos diarios en la temperatura corporal humana y en la secreción de hormonas, reacciones químicas que oscilan espontáneamente, vibraciones auto-excitadas

peligrosas en puentes y alas de aviones, etc. En cada caso, existe una oscilación natural estándar con algún período, frecuencia, forma de onda y amplitud. Si el sistema es perturbado ligeramente, éste siempre regresa a un estado de oscilación periódica dado por el ciclo primario original.

A continuación exploramos las principales ideas y métodos para estudiar la estabilidad de órbitas periódicas y el retrato de fase en su vecindad.

6.1. Del campo de vectores a la aplicación de Poincaré

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales definido por

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (6.1)$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de vectores de clase C^k , $k \geq 1$. Supongamos que (6.1) posee una órbita periódica L_0 de período τ_0 . Para analizar el retrato de fase en una vecindad de L_0 , podemos reducir la dimensión del problema. Sea $x_0 \in L_0$ y definamos una **sección transversal** Σ al ciclo en el punto x_0 como en la figura 6.1. El conjunto $\Sigma \subset \Omega$ es una hipersuperficie suave de dimensión $n - 1$ intersectando L_0 en un ángulo no-nulo, (es decir, el campo f “atraviesa” la sección Σ). Decimos que Σ posee *codimensión 1*, y escribimos $\text{codim}(\Sigma) = 1$. Por ejemplo, supongamos que Σ está definida cerca de x_0 como conjunto de nivel cero de una función escalar suave $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_0) = 0$, es decir,

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = g^{-1}(0).$$

Dado que $f(x_0)$ es un vector tangente a L_0 en x_0 , el ángulo de intersección no-nulo de Σ con L_0 implica que

$$\langle \nabla g(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto euclidiano en \mathbb{R}^n . Es decir, la función g posee una tasa de cambio no-nula en la dirección del campo f en x_0 . Notemos que, en caso contrario, L_0 y Σ serían tangentes en x_0 .

La elección más simple de Σ satisfaciendo estas condiciones es un hiperplano ortogonal al ciclo L_0 en x_0 . Tal elección viene dada por el conjuntos de nivel cero de la función lineal

$$g(x) = \langle f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

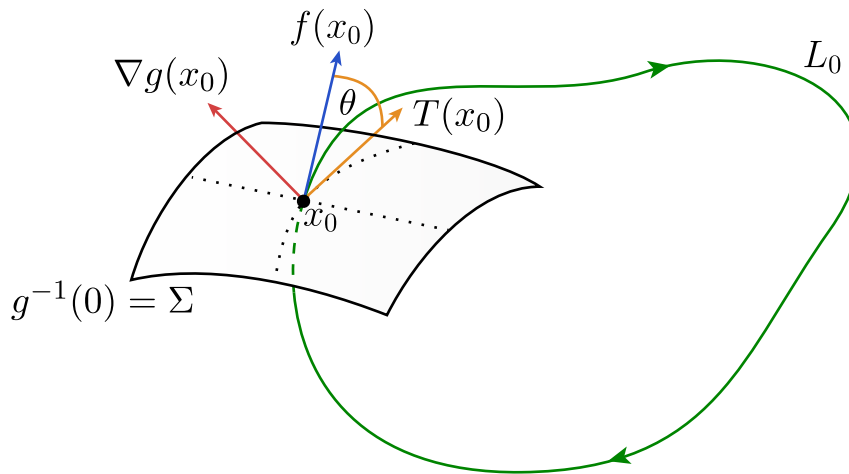


Figura 6.1: Sección transversal Σ a la órbita periódica L_0 en el punto x_0 .

Por la dependencia suave de las órbitas con respecto a sus condiciones iniciales, una órbita que empieza en un punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_0 también regresa por primera vez a Σ en algún punto $\tilde{x} \in \Sigma$ cerca de x_0 . Más aún, órbitas cercanas también intersectan Σ transversalmente como en la figura 6.2. Más formalmente, sea φ el flujo del campo (6.1). Como φ es continuo, entonces para todo $x \in \Sigma$, suficientemente cerca de x_0 , la trayectoria $\varphi(t, x)$ permanece próxima a L_0 , con t en un intervalo compacto prefijado, por ejemplo, $[0, 2\tau_0]$. De esta manera, construimos el mapeo

$$P : \Sigma_0 \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$x \mapsto P(x) = \tilde{x},$$

donde $P(x) = \tilde{x}$ es el primer punto donde la órbita $\varphi(t, x)$ que pasa por x regresa (e intersecta) a la sección Σ . Así, obtenemos una correspondencia exacta entre el sistema n -dimensional (6.1) en una vecindad de L_0 y la aplicación $(n - 1)$ -dimensional P definida en la sección de Poincaré Σ .

Definición 24 *El mapeo P se llama la **aplicación de retorno de Poincaré** asociada al ciclo L_0 .*

Muchas propiedades del campo f cerca de la órbita cerrada L_0 se reflejan en

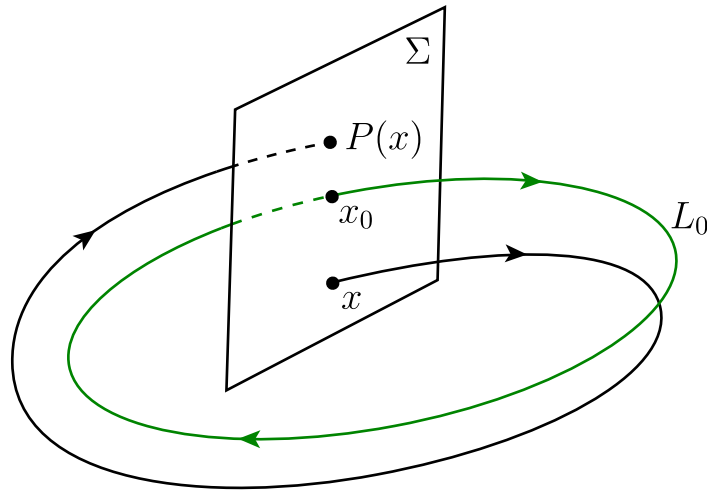


Figura 6.2: Aplicación de retorno de Poincaré.

P . A partir de la definición, es claro que $P(x_0) = x_0$, pues x_0 está en L_0 . Es decir, x_0 es un punto fijo de la aplicación P . En general, órbitas periódicas de f cerca de L_0 corresponden a puntos periódicos de P , es decir, puntos $q \in \Sigma_0$ tales que $P^n(q) = q$, para algún entero $n \geq 1$. Aquí $P^n(x)$ significa aplicar P n veces: $P^n(x) = P(P(\cdots P(x)))$. Por otro lado, el comportamiento asintótico de las órbitas de f cerca de L_0 también es descrito por P . Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = x_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), L_0) = 0.$$

Es decir, si la sucesión de puntos $\{x, P(x), P^2(x), \dots, P^n(x), \dots\}$ converge a x_0 , entonces la trayectoria $\varphi(t, x)$ en el espacio n -dimensional también se acerca asintóticamente a la órbita periódica L_0 .

Definición 25 La órbita cerrada L_0 es un **atractor periódico** si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), L_0) = 0,$$

para todo $q \in \mathbb{R}^n$ en una vecindad de L_0 . En tal caso, decimos que L_0 es un **ciclo estable**; de lo contrario, es un **ciclo inestable**.

Proposición 8 El mapeo P es un C^k -difeomorfismo local cerca de x_0 .

DEMOSTRACIÓN. Sea V una vecindad tubular de $x_0 \in L_0$ como en la figura 6.3(a). Supongamos que la sección transversal $\Sigma \subset V$ es tal que L_0 intersecta solo una vez a Σ (de ser necesario, siempre podemos achicar Σ para que esto se cumpla). Si el período de L_0 es τ_0 , entonces $\varphi(\tau_0, x_0) = x_0$. Luego, existe una vecindad $\Sigma_0 \subset \Sigma$ de x_0 , suficientemente pequeña tal que $\varphi(\tau_0, q) \in V$, para todo $q \in \Sigma_0$.

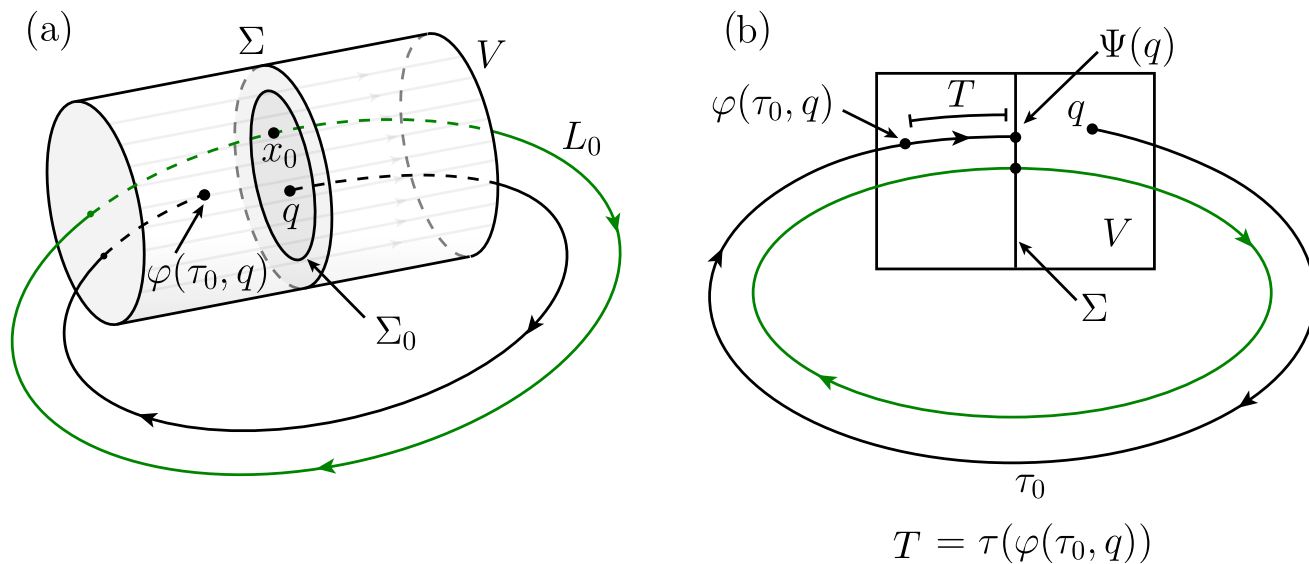


Figura 6.3: Bosquejo de la vecindad tubular V , la sección de Poincaré Σ y la función de “tiempo de vuelo” τ en V . Los tamaños de las vecindades han sido exagerados para ilustrar mejor la idea de la demostración.

Definamos $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\tau(q)$ es el tiempo necesario para que el flujo $\varphi(t, q)$ por $q \in V$ intersekte Σ . A partir de la figura 6.3(b), podemos definir $\Psi : V \rightarrow \Sigma$ como

$$\Psi(q) = \varphi(\tau_0 + \tau(\varphi(\tau_0, q)), q)$$

para $q \in V$. Por definición, Ψ tiene el mismo grado de diferenciabilidad que el flujo y que el campo f , es decir, C^k . Entonces, como $\tau(x_0) = \tau_0$, por el teorema de la función implícita, τ también es de clase C^k .

Nos interesan los “retornos” a Σ . Luego, podemos restringir $\tau = \tau|_{\Sigma}$ y definir $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ como

$$P(q) := \varphi(\tau(q), q).$$

Luego, P es de la misma clase de diferenciabilidad que el campo f . Además, la

inversa $P^{-1} : P(\Sigma_0) \rightarrow \Sigma_0$ está bien definida al tomar el campo $-f$, es decir, invirtiendo el sentido del flujo. Por lo tanto, P^{-1} también es de clase C^k . ■

Ejemplo 37 Considere el campo de vectores en \mathbb{R}^2 dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

y la sección transversal

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}.$$

Transformando el sistema a coordenadas polares obtenemos

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (6.2)$$

donde la sección

$$\Sigma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : r > 0, \theta = 0\}$$

queda parametrizada por $r > 0$. (En otras palabras, la variable r define un sistema de coordenadas locales en Σ).

Resolviendo (6.2) obtenemos el flujo global

$$\varphi(t; r, \theta) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-\frac{1}{2}}, t + \theta \right).$$

Sea $(r, 0) \in \Sigma$ una condición inicial. Sea τ el *tiempo de vuelo* que le toma a la órbita que parte en $(r, 0)$ en volver por primera vez a Σ . Luego, τ satisface

$$\varphi(\tau; r, 0) = (P(r), 0),$$

donde $P(r)$ es la componente radial del flujo después de τ unidades de tiempo. Dado que $\dot{\theta} = 1$, el primer retorno a Σ ocurre después de $\tau = 2\pi$. Luego, el mapeo de Poincaré viene dado por la componente radial del flujo $\varphi(2\pi; r, 0)$ dado por:

$$P(r) = \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Alternativamente, podemos hallar $r_1 = P(r_0)$ al resolver

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

6.2. Ciclos límite en el plano

Definición 26 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 . Una órbita periódica γ de X se llama **ciclo límite** si existe una vecindad V de γ tal que γ es la única órbita cerrada de X que intersecta V .

De esta definición se desprende que un ciclo límite es una órbita periódica aislada. Por ejemplo, las órbitas cerradas de un centro no son ciclos límite.

Proposición 9 Con las notaciones de la definición anterior, existen solamente los siguientes tipos de ciclo límite:

1. Estable, cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$.
2. Inestable, cuando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$.
3. Semiestable, cuando $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V \cap \text{Ext}(\gamma); \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V \cap \text{Int}(\gamma); \end{cases}$ o el caso opuesto. Aquí, $\text{Ext}(\gamma)$ (resp. $\text{Int}(\gamma)$) es la región abierta exterior (resp. interior) a γ .

Estos tres tipos se muestran en la figura 6.4.

DEMOSTRACIÓN. Achicando la vecindad V de ser necesario, podemos suponer que no hay puntos de equilibrio en V . Sean $p \in \gamma$ y Σ una sección transversal a X en p . Sea $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ la aplicación de retorno de Poincaré. Notemos que aquí $\dim(\Sigma) = 1$. Luego, podemos suponer que Σ posee un orden, con un sentido positivo (creciente) yendo desde $\text{Ext}(\gamma)$ hacia $\text{Int}(\gamma)$. Dado $q \in \Sigma_0 \cap \text{Ext}(\gamma)$, se tiene $\pi(q) > q$, o bien, $\pi(q) < q$. Supongamos primero que $\pi(q) > q$ como en la figura 6.5.

Sea A la región limitada por γ , por el segmento de trayectoria entre q y $\pi(q)$ y por el segmento $\overline{q\pi(q)}$ en Σ_0 como en la figura 6.5. Es claro que A es invariante para $t > 0$. En efecto, dado $x \in A$, la órbita $\varphi(t, x)$ no puede “salir” de A pues ello implicaría intersectar la frontera ∂A (i.e., intersectar a γ o bien al segmento de órbita de q entre q y $\pi(q)$); luego, $\varphi(t, x) \in A$, para todo $t > 0$. Además,

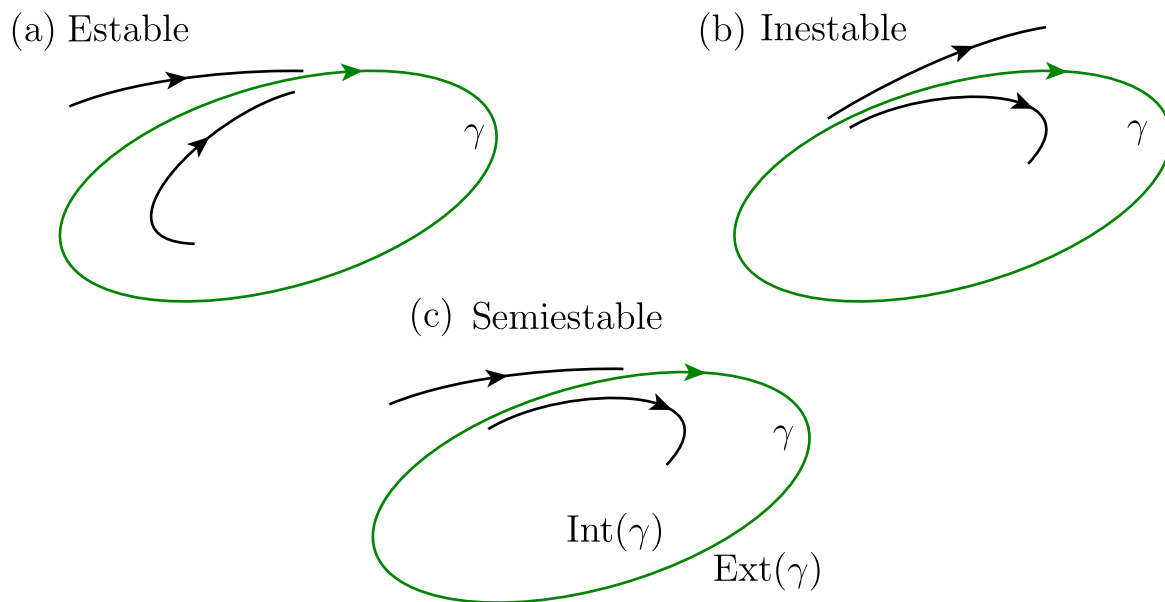


Figura 6.4: Los tres tipos posibles de ciclos límite en el plano.

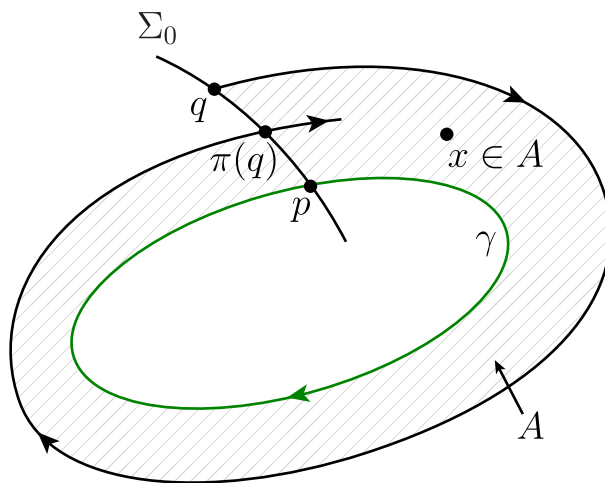


Figura 6.5: La región A delimitada por γ , por el segmento de trayectoria entre q y $\pi(q)$ y por el segmento $\overline{q\pi(q)}$ en Σ_0 es invariante.

debido al orden definido en la sección transversal Σ , la órbita $\varphi(t, x)$ intersecta a

Σ en una sucesión monótona creciente de puntos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi(\tau(x), x) \\ x_2 = \varphi(\tau(x_1), x_1) \\ \vdots \\ x_n = \varphi(\tau(x_{n-1}), x_{n-1}) \\ \vdots \end{array} \right.$$

donde $\tau(x_i)$ es el tiempo necesario para que la órbita que empieza en x_i regrese por primera vez a Σ . Esta sucesión converge monótonamente a $p \in \gamma$. Por lo tanto,

$$d(\varphi(t, x), \gamma) \rightarrow 0, \quad \text{si } t \rightarrow \infty,$$

es decir, γ es estable.

Si $\pi(q) < q$, podemos ocupar argumentos similares con el campo $-X$ y probar que

$$d(\varphi(t, x), \gamma) \rightarrow 0, \quad \text{si } t \rightarrow -\infty, \quad \forall x \in A.$$

Finalmente, el caso en que $q \in \Sigma_0 \cap \text{Int}(\gamma)$ se prueba en forma similar. Combinando todas las posibilidades, se obtiene el resultado de la proposición. ■

Observación 6 Con la notación de la aplicación de retorno de Poincaré, el resultado anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

γ es un ciclo límite si y solo si $p \in \gamma \cap \Sigma$ es un punto fijo aislado de π . Además:

1. *γ es estable si y solo si $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo a p ;*
2. *γ es inestable si y solo si $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo a p ;*
3. *γ es semiestable si y solo si $|\pi(x) - p| < |x - p|$ para todo $x \in \Sigma \cap \text{Ext}(\gamma)$ próximo a p , y $|\pi(x) - p| > |x - p|$ para todo $x \in \Sigma \cap \text{Int}(\gamma)$ próximo a p , o viceversa.*

En particular, si $\pi'(p) < 1$, podemos aplicar el teorema del valor medio y concluir que γ es estable. La idea de este razonamiento es la siguiente. Si $\pi'(p) < 1$ entonces, dado que π es un difeomorfismo, se cumple que $\pi'(q) < 1$ para todo

$q \in \Sigma_0$ suficientemente cerca de p . Consideremos un punto $x \in \Sigma_0$ y supongamos que $x < p$ (en el orden definido en la demostración de la proposición anterior para Σ). Luego siempre existe $q \in (x, p) \subset \Sigma_0$ suficientemente cerca de p tal que

$$\frac{|\pi(x) - \pi(p)|}{|x - p|} = \pi'(q) < 1.$$

(El razonamiento es idéntico si hubiésemos tenido $x > p$.) Por otro lado, mediante argumentos similares podemos concluir que γ es inestable si $\pi'(p) > 1$. Con esto, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 18 *Sea γ un ciclo límite en el plano de un campo de clase C^1 . Sea $p \in \gamma$, y sea π la aplicación de retorno de Poincaré definida en una sección transversal a γ en el punto p .*

1. *Si $\pi'(p) < 1$, el ciclo límite γ es estable;*
2. *Si $\pi'(p) > 1$, el ciclo límite γ es inestable;*
3. *Si $\pi'(p) = 1$, el ciclo límite γ es semi-estable, i.e., es estable en $\text{Ext}(\gamma)$ e inestable en $\text{Int}(\gamma)$, o viceversa.*

La figura 6.6 muestra la interpretación geométrica de la derivada $\pi'(p)$ y su relación con la estabilidad del ciclo límite γ .

Ejemplo 38 Considere el campo de vectores del ejemplo 37 dado en coordenadas polares por

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

y la sección transversal

$$\Sigma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : r > 0, \theta = 0\},$$

la cual queda parametrizada por r .

El mapeo de Poincaré viene dado por:

$$\pi(r) = \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1\right) e^{-4\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

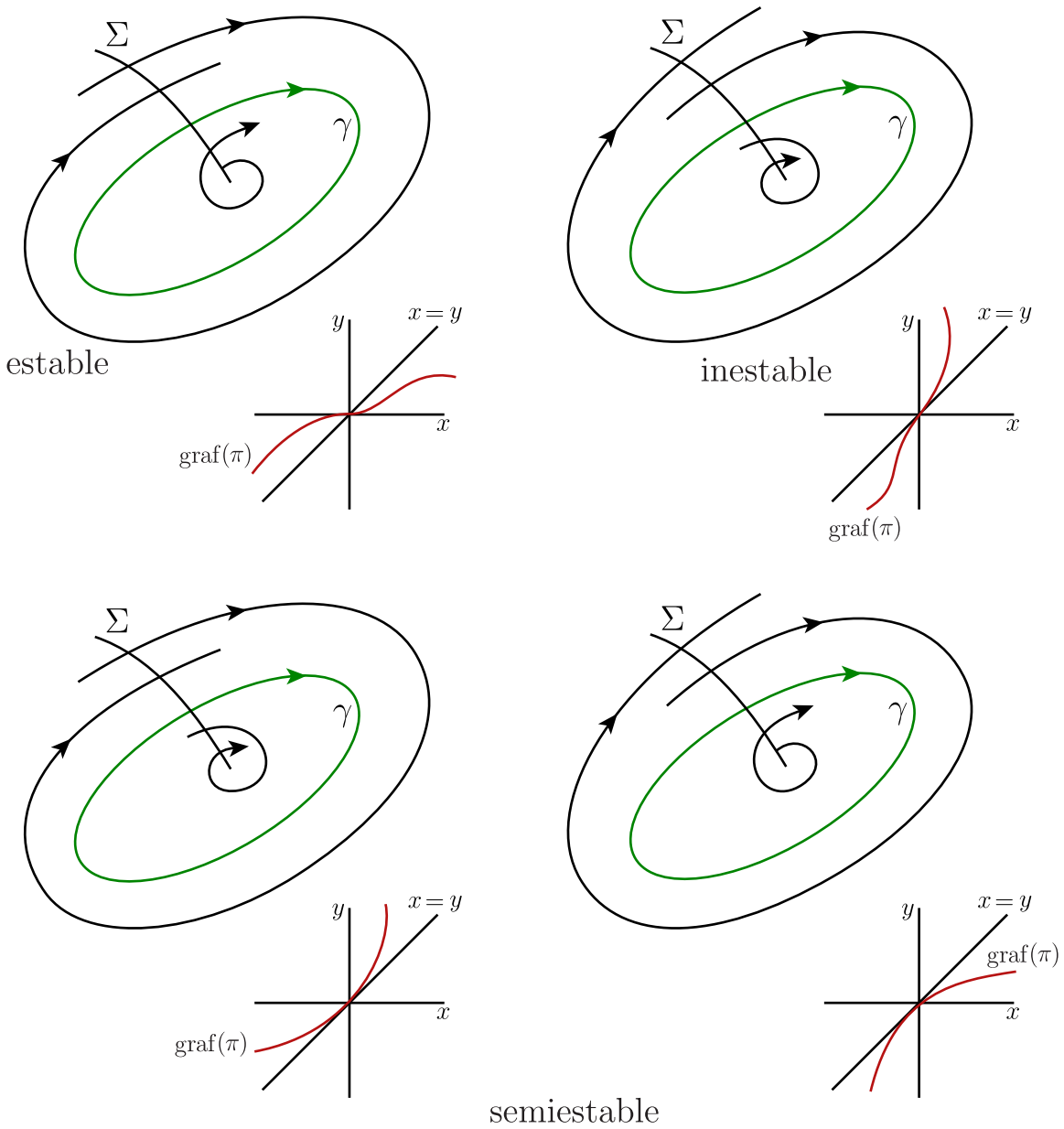


Figura 6.6: La estabilidad del ciclo límite γ queda determinada por la derivada $\pi'(p)$.

Claramente π tiene un punto fijo (aislado) en $r = 1$, el cual corresponde al ciclo límite (circular)

$$L_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

en coordenadas cartesianas. La linealización de π en $r = 1$ viene dada por

$$\begin{aligned}\pi'(1) &= \left. \frac{d\pi}{dr} \right|_{r=1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2e^{-4\pi}}{r^3} \right) \Big|_{r=1} \\ &= e^{-4\pi} < 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto el ciclo límite L_0 es estable.

El siguiente teorema establece una condición equivalente para evaluar la estabilidad de un ciclo límite.

Teorema 19 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y sea $X = (X_1, X_2)^t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1 . Sea γ una órbita periódica de X de período T y $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ la transformación de retorno de Poincaré en una sección transversal Σ en $p \in \gamma$. Entonces*

$$\pi'(p) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \right),$$

donde

$$\operatorname{div} X(x_1, x_2) = (\nabla \cdot X)(x_1, x_2) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

es la divergencia de X . En particular, si $\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt < 0$, entonces γ es estable; y si $\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt > 0$, γ es inestable.

Este resultado es, en parte, consecuencia de la fórmula de Liouville-Abel (vista en el teorema 10) aplicada a la solución fundamental del sistema lineal $x' = A(t)x$, donde $A(t) = DX(\gamma(t))$. Los detalles los omitimos aquí, pero se pueden hallar en [17].

Ejemplo 39 Para el campo de vectores de los ejemplos 37 y 38 de arriba tenemos

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^t;$$

luego,

$$\operatorname{div}X(x, y) = 2 - 4x^2 - 4y^2,$$

y

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div}X(\gamma(t))dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t)dt = -4\pi < 0.$$

Entonces, obtenemos $\pi'(1) = e^{-4\pi} < 1$, lo que coincide con lo hallado por cálculo directo en el ejemplo 38.

6.3. Ejercicios

1. Encuentre los ciclos límite en los siguientes sistemas dados en coordenadas polares y determine su estabilidad:

a) $\dot{r} = r(r-1)(r-2), \dot{\theta} = 1;$

b) $\dot{r} = r(r-1)^2, \dot{\theta} = 1.$

2. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Verifique que la curva $\gamma(t) = \{(\cos t, \sin t)^T, 0 \leq t < 2\pi\}$ es un ciclo límite del sistema y determine la estabilidad de este ciclo mediante los siguientes pasos:

(i) Demuestre que el sistema en coordenadas polares (r, θ) queda de la forma:

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \dot{\theta} = 1.$$

(ii) Tomando como sección transversal al rayo $\Sigma = \{(r, \theta) : \theta = \theta_0\}$ integre el sistema desde una condición inicial $(r_0, \theta_0) \in \Sigma$ y muestre que la transformación de retorno P de Poincaré definida en Σ es

$$P(r) = \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1\right) e^{-4\pi}\right)^{-1/2}, \quad (r, \theta_0) \in \Sigma.$$

Concluya (y justifique) lo pedido al chequear que $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$.

3. Sea $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ la aplicación de retorno de Poincaré de una órbita periódica γ en \mathbb{R}^3 . Suponga que las coordenadas locales definidas en Σ son tales que $P(x) = Ax$, para todo $x \in \Sigma_0 \subset \Sigma$, donde A es una matriz 2×2 no singular diagonal, o bien, está en su forma canónica de Jordan.

- a) Demuestre que $x^* \in \Sigma_0$ corresponde a $\gamma \cap \Sigma_0$ si y solo si $x^* = 0$.
- b) Si todos los valores propios de A tienen magnitud menor que uno, demuestre que $A^k x \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, para todo $x \in \Sigma_0$. ¿Qué se puede decir sobre la estabilidad de γ en este caso?
- c) Si al menos un valor propio de A tiene norma mayor a uno, demuestre que existe un punto $x \in \Sigma_0$ tal que $A^k x \rightarrow 0$ para $k \rightarrow -\infty$. ¿Qué se puede decir sobre la estabilidad de γ en este caso?

4. Muestre que $\gamma(t) = (2 \cos(2t), \sin(2t))^T$ es una solución periódica del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y + \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right), \\ \dot{y} = x + y \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right), \end{cases}$$

que está contenida en la elipse $(x/2)^2 + y^2 = 1$. Luego demuestre que Γ es un ciclo límite estable.

5. Sea γ un ciclo límite en el plano de un campo de clase C^1 . Sea $p \in \gamma$, y sea $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ la aplicación de retorno de Poincaré definida en una sección transversal Σ a γ en el punto p . Demuestre que $\pi'(p) > 0$.

Sugerencia: Defina un orden en Σ y escriba π en su serie de Taylor alrededor de p en una vecindad suficientemente pequeña de p . Luego suponga que $\pi'(p) < 0$.

6. Demuestre que la estabilidad de un ciclo límite γ en el plano es independiente de la elección de la sección transversal (Esta afirmación también es cierta en dimensión $n > 2$).

Sugerencia: Escoja $x_1, x_2 \in \gamma$ arbitrarios, y defina los mapeos de Poincaré π_1, π_2 en dos secciones transversales Σ_1, Σ_2 respectivas. Suponga que x_1 y x_2 se ubican en el origen de las coordenadas locales definidas en Σ_1 y Σ_2 . (Si $x_1 = x_2$, podemos suponer que las secciones Σ_1, Σ_2 representan

curvas idénticas en \mathbb{R}^2 que solo difieren en su parametrización.) Construya un difeomorfismo local $Q : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ que lleva puntos de Σ_1 a puntos de Σ_2 a lo largo de órbitas del campo vectorial. Verifique que $\pi_2 \circ Q = Q \circ \pi_1$. Concluya que $\pi_1'(0) = \pi_2'(0)$.

Capítulo 7

Conjuntos límite y el teorema de Poincaré-Bendixson

7.1. Conjuntos α -límite y ω -límite

Definición 27 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de vectores de clase C^k , $k \geq 1$. Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ la curva integral o trayectoria de X que pasa por el punto $p \in \Omega$, definida en su intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Si $\omega_+(p) = \infty$, definimos el conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Omega : \text{existe } \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow \infty, \text{ tal que } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ para } n \rightarrow \infty\}.$$

Análogamente, si $\omega_-(p) = -\infty$, definimos el conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Omega : \text{existe } \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty, \text{ tal que } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ para } n \rightarrow \infty\}.$$

Los conjuntos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ se llaman el **conjunto ω -límite** y **α -límite de p** , respectivamente; ver figura 7.1.

Ejemplo 40 Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de vectores C^∞ dado por $X(x, y) = (x, -y)^t$. Las curvas integrales de X vienen dadas como en la figura 7.2.

Luego, se tiene:

- Si $p = (0, 0)$, entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \{(0, 0)\}$.
- Si $p \in E^u \setminus \{(0, 0)\}$, entonces $\omega(p) = \emptyset$, $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$.
- Si $p \in E^s \setminus \{(0, 0)\}$, entonces $\omega(p) = \{(0, 0)\}$, $\alpha(p) = \emptyset$.

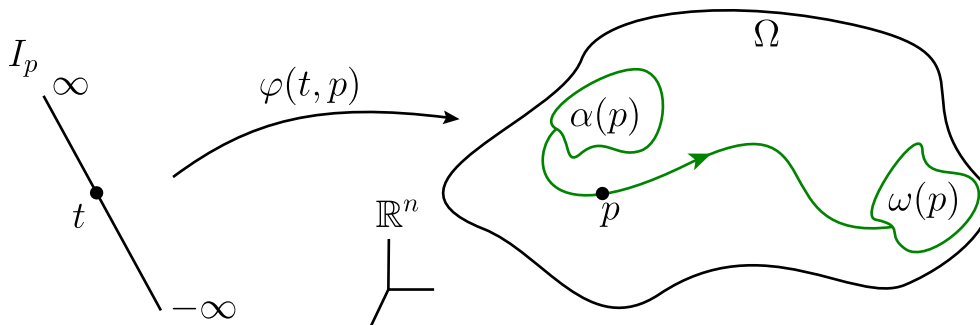


Figura 7.1: Bosquejo esquemático de los conjuntos α -límite y ω -límite de $p \in \Omega$.

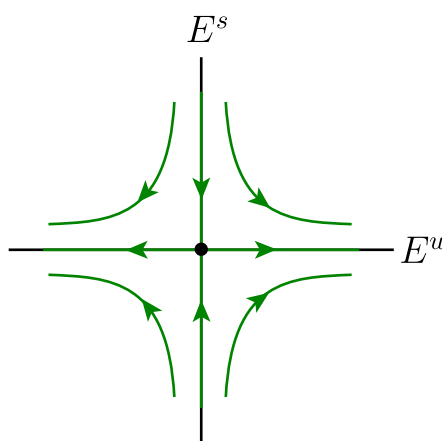


Figura 7.2: Las curvas integrales de $X(x, y) = (x, -y)^t$.

- Si $p \notin E^s \cup E^u$, entonces $\omega(p) = \alpha(p) = \emptyset$.

Ejemplo 41 Si $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ es una función periódica en t de período τ , entonces $\omega(p) = \alpha(p)$ coinciden y corresponden a una órbita periódica, es decir,

$$\omega(p) = \alpha(p) = \gamma(p) = \{\varphi(t, p) \text{ tal que } 0 \leq t < \tau\}.$$

En efecto, por un lado es claro que $\alpha(p) \subset \gamma(p)$ y $\omega(p) \subset \gamma(p)$ (Tarea!). Recíprocamente, si $q \in \gamma(p)$, entonces existe $t' \in [0, \tau[$ tal que $\varphi(t', p) = q$. Definamos la sucesión $t_n = t' + n\tau$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Se tiene que $t_n \rightarrow \infty$ y

$$\varphi(t_n) = \varphi(t' + n\tau) = \varphi(t') = q.$$

Por lo tanto, para todo $q \in \gamma(p)$, existe una sucesión $\{t_n\}$ con $\varphi(t_n) \rightarrow q$, para $n \rightarrow \infty$. Luego, $q \in \omega(p)$ y, entonces, $\gamma(p) \subset \omega(p)$. Para probar que $\alpha(p) = \gamma(p)$, basta tomar $t_n = t' - n\tau$.

Ejemplo 42 Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$, un campo de vectores C^k , cuyas órbitas son espirales exteriores e interiores al círculo C de centro en el origen y radio 1 como en la figura 7.3. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} X_1(x, y) &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ X_2(x, y) &= x + y(1 - x^2 - y^2), \end{aligned}$$

corresponde al campo de los ejemplos 37 y 38 y satisface las condiciones anteriores.

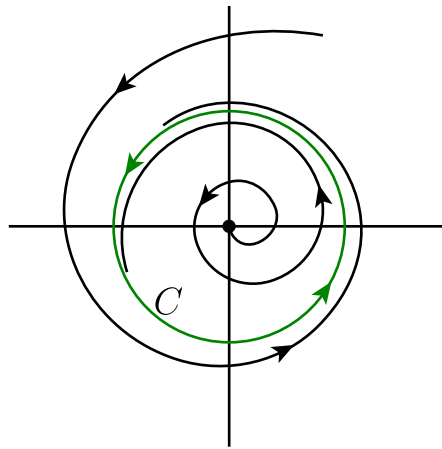


Figura 7.3: Retrato de fase del ejemplo 42.

Luego,

- $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$, si p es interior a C .
- $\alpha(p) = \emptyset$, si p es exterior a C .
- $\alpha(p) = C$, si $p \in C$.
- $\omega(p) = C$, para todo $p \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$.

Observación 7

1. Si p es un equilibrio de X entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$, pues $\varphi(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. Si γ_p es la órbita de X por el punto $p \in \Omega$ y $q \in \gamma_p$, entonces $\omega(p) = \omega(q)$. En efecto, si $q \in \gamma_p$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, p) = \varphi(t + c, q)$; ver figura 7.4. Análogamente, $\alpha(p) = \alpha(q)$.

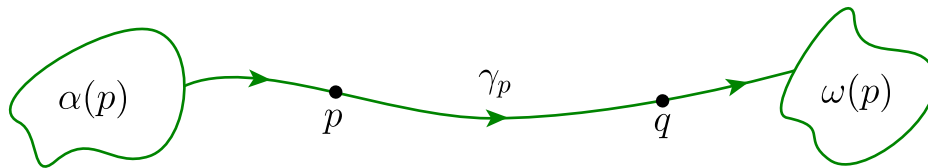


Figura 7.4: Si γ_p es la órbita de X por el punto $p \in \Omega$ y $q \in \gamma_p$, entonces $\omega(p) = \omega(q)$ y $\alpha(p) = \alpha(q)$.

Como consecuencia de esta última observación, entonces podemos definir...

Definición 28 *El conjunto ω -límite de una órbita γ es el conjunto $\omega(p)$ para cualquier $p \in \gamma$. Similarmente, el conjunto α -límite de una órbita γ es el conjunto $\alpha(p)$ para cualquier $p \in \gamma$.*

Si $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ es la curva integral de X por p y si $\psi(t) = \psi(t, p)$ es la curva integral de $-X$ por p , entonces $\psi(t, p) = \varphi(-t, p)$. Por otro lado, notemos que el conjunto ω -límite de $\psi(t)$ es el conjunto α -límite de $\varphi(t)$; similarmente, el conjunto ω -límite de $\varphi(t)$ es el conjunto α -límite de $\psi(t)$. Por lo tanto, basta estudiar las propiedades del conjunto ω -límite de órbitas.

Teorema 20 *Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^k , $k \geq 1$, definido en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Definamos*

$$\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p), t \geq 0\} \quad (\text{resp. } \gamma^-(p) = \{\varphi(t, p), t \leq 0\})$$

como la semi-órbita positiva (resp. negativa) de X por p . Si $\gamma^+(p)$ (resp. $\gamma^-(p)$) está contenida en un compacto $K \subset \Omega$, entonces:

- a) $\omega(p) \neq \emptyset$ (resp. $\alpha(p) \neq \emptyset$);

- b) $\omega(p)$ es compacto (resp. $\alpha(p)$), o sea, $\omega(p)$ es cerrado y acotado;
- c) $\omega(p)$ es invariante por X (resp. $\alpha(p)$), esto es, si $q \in \omega(p)$, entonces $\varphi(t, q) \subset \omega(p)$ (la curva integral de X por q está contenida en $\omega(p)$);
- d) $\omega(p)$ es conexo (resp. $\alpha(p)$), es decir, $\omega(p)$ no se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos no vacíos ($\omega(p)$ está compuesto “de una sola pieza”).

COMENTARIOS. A partir del teorema anterior, podemos obtener las siguientes consecuencias directas:

1. Los conjuntos α - y ω -límite de una órbita γ son subconjuntos invariantes cerrados de Ω .
2. Un punto de equilibrio x^* es su propio conjunto α - y ω -límite pues $\varphi(t, x^*) = x^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. Si una órbita γ tiene un único punto ω -límite x_0 , entonces x_0 es un punto de equilibrio.
4. Un nodo atractor (o un foco estable) es el conjunto ω -límite de toda órbita en alguna vecindad de ese punto.
5. Un nodo repulsor (o un foco inestable) es el conjunto α -límite de toda órbita en alguna vecindad de ese punto.
6. Un punto silla x^* en \mathbb{R}^2 es el conjunto ω -límite de tres órbitas en una vecindad $V(x^*)$ de x^* , pero ninguna otra órbita que pase por $V(x^*)$ se aproxima a x^* a medida que $t \rightarrow \infty$.

Definición 29 Sea γ una órbita del campo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $q \in \Omega$ es cualquier punto regular en $\alpha(\gamma)$ u $\omega(\gamma)$, entonces la órbita por q se dice una **órbita límite** de γ .

Ejemplo 43 Considere la órbita plana

$$C = \{q \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 : \varphi(t, q) \rightarrow x^*, \text{ para } t \rightarrow \pm\infty\}$$

como en la figura 7.5. La curva C se dice una **órbita homoclínica** a x^* . Todo punto en C está en el conjunto ω -límite de todo punto p en el interior de C . Pero el punto silla x^* también está en el conjunto ω -límite de todo punto p en el interior de C . Por lo tanto, $\omega(p) = C \cup \{x^*\}$ y C es una órbita límite.

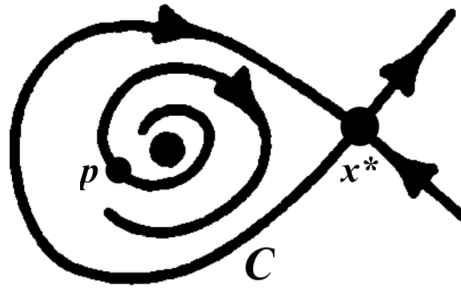


Figura 7.5: Una órbita homoclínica en el plano es una órbita límite de los puntos en su interior.

Ejemplo 44 Consideremos el sistema en \mathbb{R}^3 :

$$X : \begin{cases} x' = -y + x(1 - z^2 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - z^2 - x^2 - y^2), \\ z' = 0. \end{cases}$$

Notemos que cada plano $z = z_0$ es un conjunto invariante. En cada plano $z = z_0$ hay un ciclo límite γ_{z_0} de radio $\sqrt{1 - z_0^2}$. Para $|z_0| < 1$, γ_{z_0} es el conjunto ω -límite de cualquier punto en el plano $z = z_0$ excepto $(0, 0, z_0)$; ver figura 7.6. Por otro lado, para $|z_0| > 1$, el conjunto ω -límite de cualquier órbita es $(0, 0, z_0)$. En definitiva, la esfera \mathbb{S}^2 es un conjunto invariante formado por un continuo de órbitas límite periódicas.

Ejemplo 45 Consideremos el sistema en \mathbb{R}^3 :

$$X : \begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2), \\ z' = \alpha. \end{cases}$$

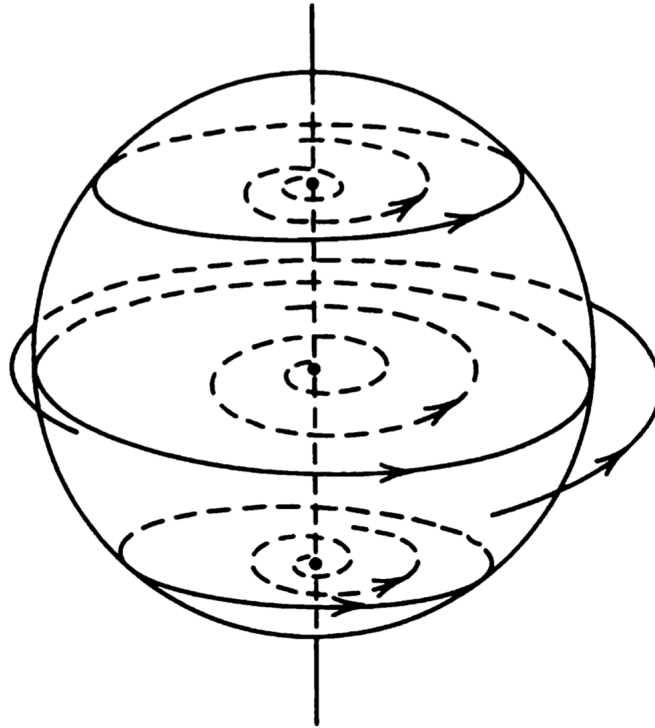


Figura 7.6: La esfera \mathbb{S}^2 está formada por un continuo de órbitas límite periódicas del sistema del ejemplo 44. Figura tomada de [15].

Supongamos que $\alpha > 0$. No es difícil verificar que el eje z y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ son conjuntos invariantes. Más aún, todas las órbitas tienden al cilindro para $t \rightarrow \infty$, excepto los puntos en el eje z ; ver figura 7.7.

Ahora identifiquemos los puntos $(x, y, 0)$ y $(x, y, 2\pi)$ en los planos $z = 0$ y $z = 2\pi$, respectivamente. De esta manera, el cilindro invariante se transforma en un toro, es decir, obtenemos un flujo en \mathbb{R}^3 con un toro \mathbb{T}^2 invariante; ver figura 7.8. Además, el eje z pasa a ser un ciclo inestable Γ . Se puede probar que si α es un múltiplo irracional de π , el toro \mathbb{T}^2 es el conjunto ω -límite de toda órbita excepto el ciclo Γ .

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 20. Es suficiente demostrar el teorema para $\omega(p)$.

Parte a) $\omega(p) \neq \emptyset$. Sea $t_n = n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $\{\varphi(t_n)\} \subset K$ compacto. Luego, existe una subsucesión $\{\varphi(t_{n_k})\}$ con $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q \in K$ si $n_k \rightarrow \infty$. Luego,

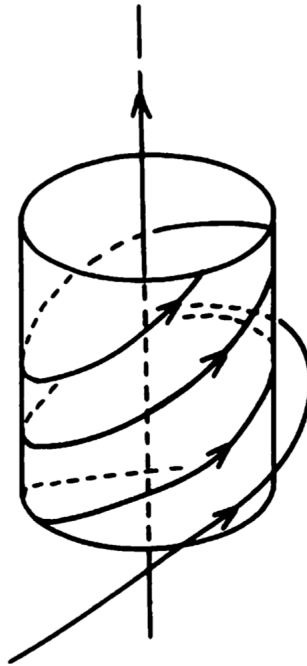


Figura 7.7: El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el eje z son conjuntos invariantes del sistema del ejemplo 45. Figura tomada de [15].

tenemos que $t_{n_k} \rightarrow \infty$ cuando $n_k \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q$. Por lo tanto, por definición, $q \in \omega(p)$.

Parte b) $\omega(p)$ es compacto. Tenemos que $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$. Por lo tanto, $\omega(p)$ es acotado. Probemos que $\omega(p)$ es cerrado. Sea la sucesión $\{q_n\} \subset \omega(p)$ tal que $q_n \rightarrow q$. Demostraremos que $q \in \omega(p)$. Como $q_n \in \omega(p)$, para cada q_n existe una sucesión $\{t_m^{(n)}\}_m$ tal que $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n$, cuando $m \rightarrow \infty$.

Para cada sucesión $\{t_m^{(n)}\}_m$ escojamos un punto $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$ y tal que

$$d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} d(\varphi(t_n, p), q) &\leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) \\ &< \frac{1}{n} + d(q_n, q). \end{aligned}$$

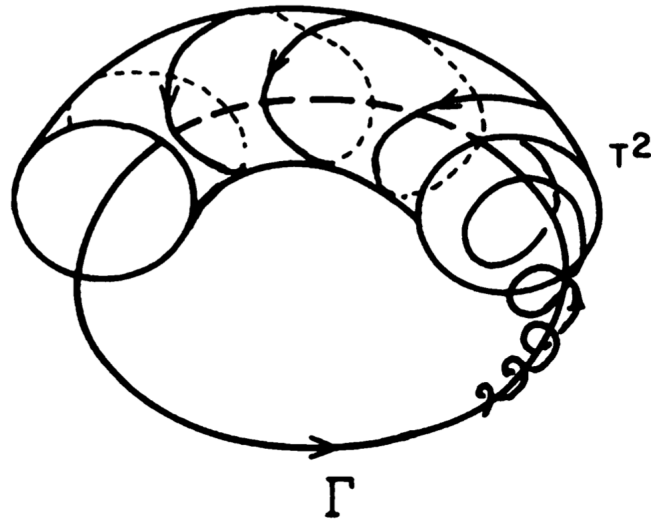


Figura 7.8: El toro invariante del ejemplo 45 al identificar los extremos del cilindro de la figura 7.7. Imagen tomada de [15].

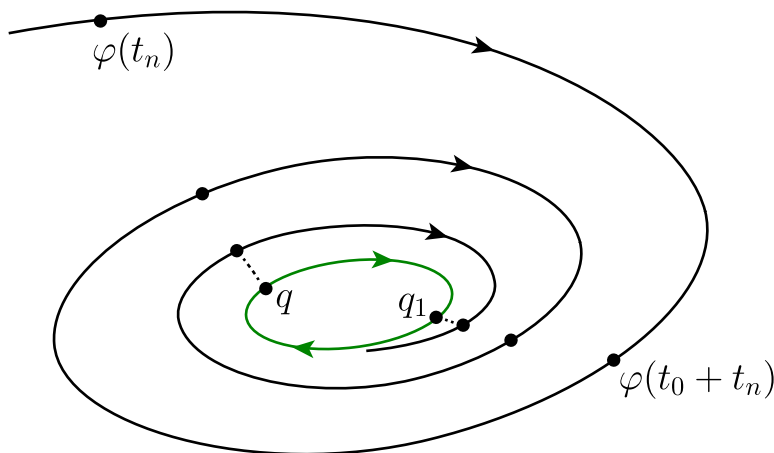
Pero $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ y $d(q_n, q) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $d(\varphi(t_n, p), q) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Como $t_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $q \in \omega(p)$.

Parte c) $\omega(p)$ es invariante por X . Sea $q \in \omega(p)$ y $\psi : I(q) \rightarrow \Omega$ la curva integral de X pasando por q . Sea $q_1 = \varphi(t_0, q) = \psi(t_0)$. Vamos a demostrar que $q_1 \in \omega(p)$. Como $q \in \omega(p)$, existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$, cuando $n \rightarrow \infty$. Como φ es continua, se tiene

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi(t_0, q) \\ &= \varphi\left(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0, \varphi(t_n, p)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0 + t_n, p). \end{aligned}$$

Tenemos entonces una sucesión $\{s_n\} = \{t_0 + t_n\}$ tal que $s_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(s_n, p) \rightarrow q_1$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $q_1 \in \omega(p)$. La figura 7.9 muestra la idea cualitativa de este resultado.

Parte d) $\omega(p)$ es conexo. Supongamos que $\omega(p)$ no es conexo. Entonces, $\omega(p)$ se puede descomponer como $\omega(p) = A \cup B$, donde A, B son cerrados no vacíos y

Figura 7.9: $\omega(p)$ es invariante por X .

$A \cap B = \emptyset$. Como $A \neq \emptyset$, existe una sucesión $\{t'_n\}$ tal que $t'_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t'_n, p) \rightarrow a \in A$, cuando $n \rightarrow \infty$. Análogamente, existe una sucesión $\{t''_n\}$ tal que $t''_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t''_n, p) \rightarrow b \in B$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, podemos construir una sucesión $\{t_n\}$, con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que

$$d(\varphi(t_n), A) < \frac{d}{2}, \quad d(\varphi(t_{n+1}), A) > \frac{d}{2},$$

(donde $d = d(A, B) > 0$) para todo n impar. La función $g(t) = d(\varphi(t), A)$, con $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ es continua para todo n impar. Además, $g(t_n) < d/2$ y $g(t_{n+1}) > d/2$. Luego, por el teorema del valor intermedio, existe t_n^* , con $t_n \leq t_n^* \leq t_{n+1}$ tal que

$$g(t_n^*) = d(\varphi(t_n^*), A) = \frac{d}{2},$$

para todo n impar. Como la sucesión $\{\varphi(t_n^*)\}_n$ está contenida en un conjunto compacto $Q = \{x \in \Omega : d(x, A) = \frac{d}{2}\}$, entonces $\{\varphi(t_n^*)\}_n$ posee una subsucesión convergente que denotaremos también por $\{\varphi(t_n^*)\}_n$ para simplificar la notación. Sea $p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n^*)$. Entonces, $p^* \in \omega(p)$. Pero $p^* \notin A$, pues $d(p^*, A) = d/2 > 0$. Al mismo tiempo, tenemos que $p^* \notin B$, pues $d(p^*, B) \geq d(A, B) - d(p^*, A) = d/2 > 0$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $\omega(p)$ es conexo. ■

Corolario 7 Con las condiciones del teorema anterior, si $q \in \omega(p)$, entonces la curva integral de X por q está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\omega(p)$ es compacto e invariante, se tiene que la órbita de X pasando por q está contenida en el compacto $\omega(p)$. El resultado es inmediato. ■

Ejemplo 46 En la figura 7.10, $\omega(p)$ no es conexo. Esto no contradice el teorema anterior. La razón es que $\gamma^+(p)$ no está contenida en un compacto $K \subset \Omega$.

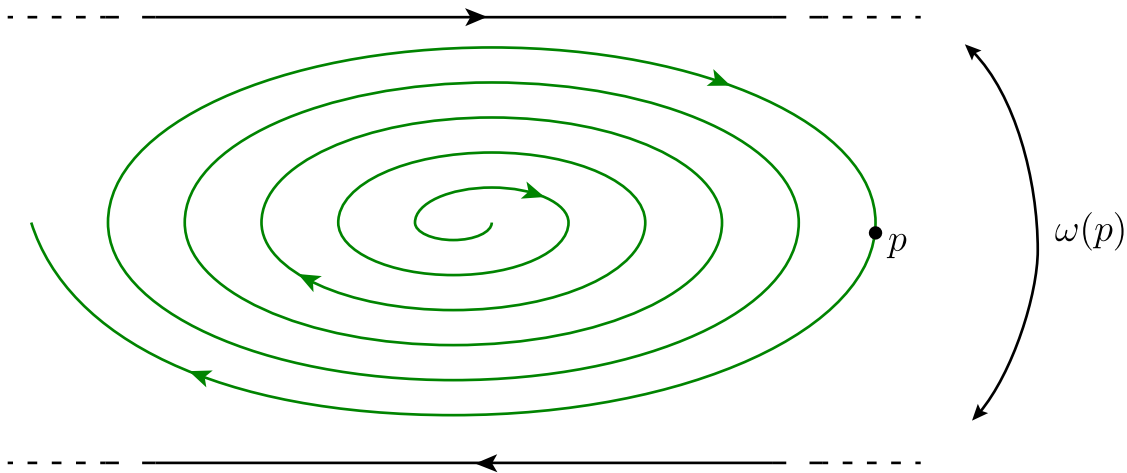


Figura 7.10: $\omega(p)$ no es conexo. ¿Por qué no se puede aplicar el teorema 20?

Ejemplo 47 Sea X el campo del ejemplo 42:

$$X : \begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Supongamos que $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$, donde p_1, p_2 están sobre el círculo unitario \mathbb{S}^1 y $p_1 \neq p_2$ como en la figura 7.11. Consideremos un punto $p \notin \mathbb{S}^1$, con p distinto del origen. Entonces, $\omega(p) = \mathbb{S}^1 \setminus \{p_1, p_2\}$ es desconexo. La razón es que no es posible definir un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\gamma^+(p)$ esté contenida en K .

7.2. El teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema de Poincaré-Bendixson nos dice cómo pueden ser los conjuntos ω -límite de una órbita en el plano. Bajo ciertas condiciones, las opciones se reducen

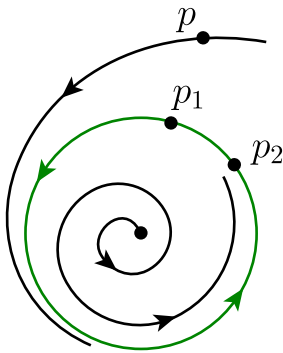


Figura 7.11: $\omega(p)$ no es conexo. No es posible definir un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\gamma^+(p)$ esté contenida en K .

solamente a tres alternativas.

En lo que resta de este capítulo, vamos a suponer que Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y X es un campo de vectores de clase C^k , $k \geq 1$, en Ω . Además, γ_p^+ denota la semi-órbita positiva por $p \in \Omega$

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}.$$

Teorema 21 (Poincaré-Bendixson) *Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ una curva integral de X , definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ está contenida en un compacto $K \subset \Omega$. Supongamos que X posee un número finito de puntos de equilibrio en $\omega(p)$. Entonces se tienen las siguientes alternativas:*

- a) *Si $\omega(p)$ contiene solo puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.*
- b) *Si $\omega(p)$ contiene puntos de equilibrio y puntos regulares, entonces $\omega(p)$ consiste de un conjunto de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de estos puntos de equilibrio cuando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- c) *Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto de equilibrio.*

Antes de probar el teorema de Poincaré-Bendixson, necesitamos algunos lemas técnicos y resultados preliminares.

Lema 4 *Sea $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, con Σ una sección transversal a X y $\gamma = \{\varphi(t)\}$ una órbita de X . Entonces, p se puede expresar como el límite de una sucesión de puntos $\{\varphi(t_n)\}$ en Σ , donde $t_n \rightarrow \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que γ y $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$ son como en la figura 7.12. Consideremos una vecindad V de p y la aplicación $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tau(x) =$ “Tiempo necesario para llegar desde el punto x hasta Σ por la trayectoria $\varphi(t, x)$ ”.

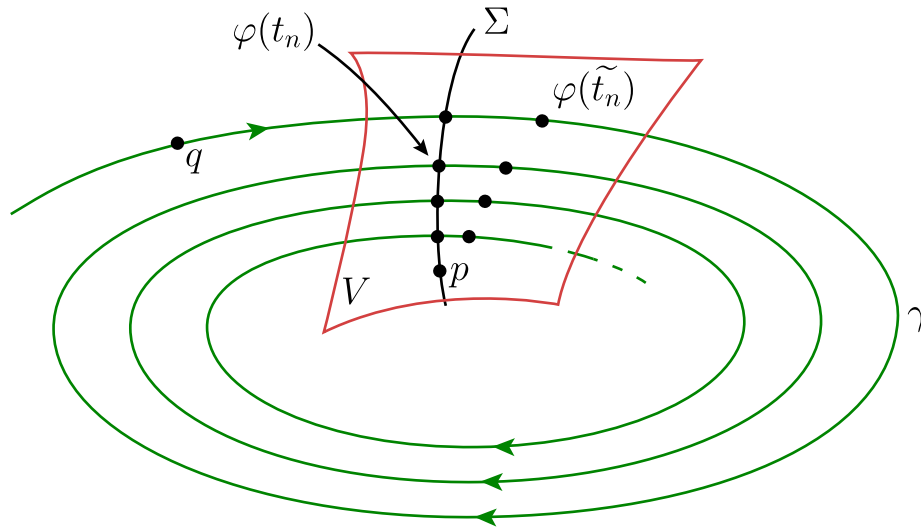


Figura 7.12:

Como $p \in \omega(\gamma)$, existe una sucesión $\{\tilde{t}_n\}$ tal que $\tilde{t}_n \rightarrow \infty$, $\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow p$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(\tilde{t}_n) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Sea $t_n = \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$ para $n \geq n_0$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(t_n) &= \varphi(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), q) \\ &= \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)). \end{aligned}$$

Es claro que $\varphi(t_n) \in \Sigma$. Como τ es continua se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) = \varphi(0, p) = p. \quad \blacksquare$$

Observación 8 Una sección transversal Σ a X en \mathbb{R}^2 tiene dimensión uno. Luego, podemos considerar a Σ como la imagen difeomorfa de un intervalo de la recta real. En otras palabras, podemos dotar a Σ de un sistema de coordenadas

locales. Ocupando un lenguaje más técnico, decimos que Σ es una subvariedad diferenciable unidimensional de \mathbb{R}^2 .

Dotemos de un orden (“ \leq ”) a Σ inducido por el orden en \mathbb{R} como en la figura 7.13. Así, podemos hablar de sucesiones monótonas en Σ .

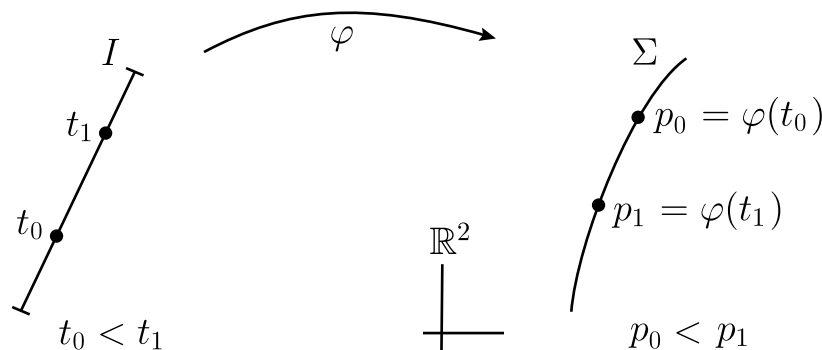


Figura 7.13: Podemos dotar de un orden (“ \leq ”) a Σ inducido por el orden en \mathbb{R} .

Lema 5 Sea Σ una sección transversal a X contenida en Ω . Sea γ una órbita de X y sea $p \in \Sigma \cap \gamma$. Si $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$ intersecta Σ en más de un instante $t > 0$, entonces $\gamma^+(p) \cap \Sigma$ consiste en una sucesión monótona $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

DEMOSTRACIÓN. Sea $D = \{t \in \mathbb{R}^+ : \varphi(t, p) \in \Sigma\}$. Como el campo de vectores en una vecindad de Σ es equivalente a un campo constante (por el teorema del flujo tubular), entonces D es un conjunto discreto. Luego, podemos ordenar D en la forma

$$D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}.$$

Sea $p_1 = p$. Definamos $p_2 = \varphi(t_1, p)$. Por inducción, $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$.

Si $p_1 = p_2$, entonces γ es una trayectoria cerrada de período $\tau = t_1$ y $p = p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $p_1 \neq p_2$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $p_1 < p_2$. Si existe p_3 , probaremos que $p_3 > p_2$.

Primer paso. Orientemos la sección Σ como en la figura 7.14(a).

Segundo paso. Observemos que Σ es conexo y X es continuo, luego las órbitas de X cruzan Σ siempre en el mismo sentido, digamos, de izquierda a derecha como en la figura 7.14(b).

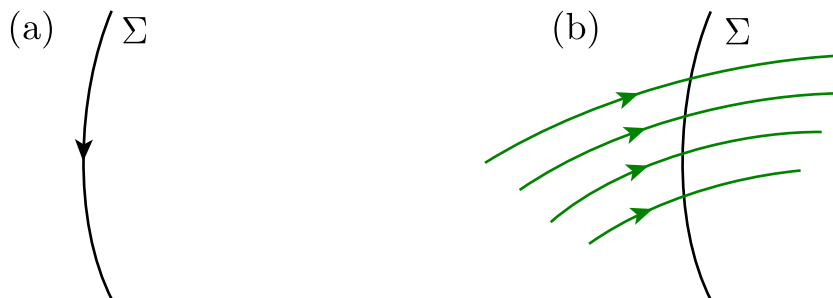


Figura 7.14: (a) Orientación de puntos en Σ ; (b) Sin pérdida de generalidad, las trayectorias de X cruzan Σ de izquierda a derecha.

Tercer paso. Recordemos el teorema de la curva de Jordan en \mathbb{R}^2 : “Si J es una curva cerrada, continua y simple (sin autointersecciones), entonces el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus J$ tiene dos componentes conexas, a saber, S_i (acotada por J) y S_e (no acotada), con J como frontera común.”

Sea la curva de Jordan formada por la unión del segmento $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$ con el arco $p_1 \widehat{p}_2 = \{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq t_1\}$ de la órbita, como en la figura 7.15.

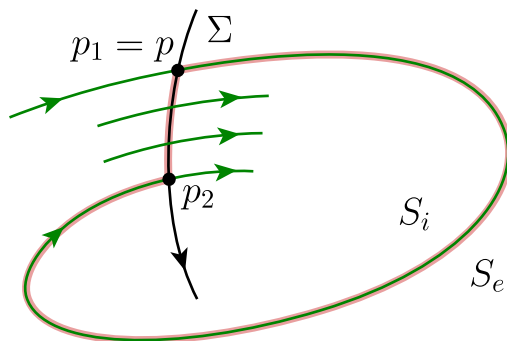


Figura 7.15: Aplicando el teorema de la curva de Jordan a la curva cerrada formada por $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$ y el arco $p_1 \widehat{p}_2$.

Es claro que para $t > t_1$, la órbita γ está contenida en S_i . En particular, este segmento de órbita no puede intersectar el arco $p_1 \widehat{p}_2$ por la unicidad de soluciones; ver figura 7.16(a). Este segmento tampoco puede intersectar el segmento $\overline{p_1 p_2}$, pues —en tal caso— iría en sentido contrario al flujo; ver figura 7.16(b).

Por lo tanto, en caso de que p_3 exista, debemos tener $p_1 < p_2 < p_3$, como en

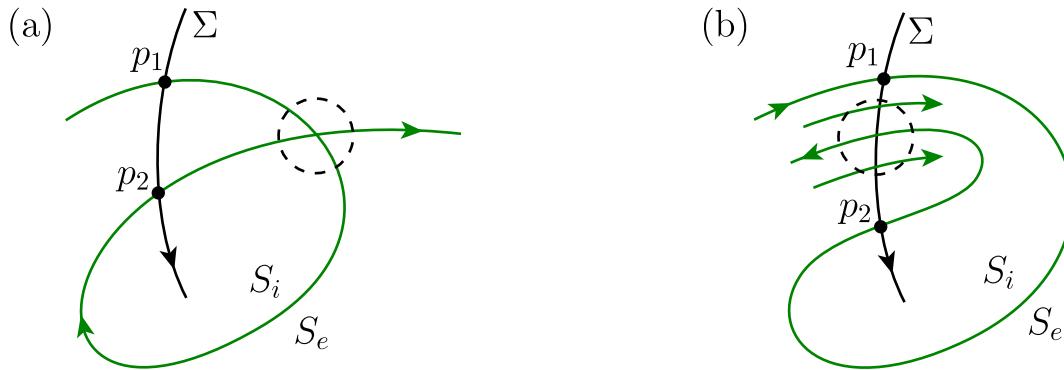


Figura 7.16: Algunas observaciones sobre el segmento de la órbita γ contenido en S_i .

la figura 7.17. Usando el mismo argumento, se tiene

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$$

Por lo tanto, $\{p_n\}$ es una sucesión monótona. Si $p_2 < p_1$, la demostración es análoga. ■

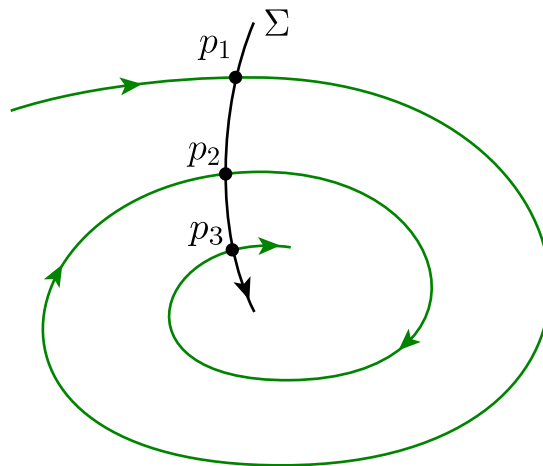


Figura 7.17: En caso de que p_3 exista, debemos tener $p_1 < p_2 < p_3$.

Lema 6 Si Σ es una sección transversal al campo X y $p \in \Omega$, entonces Σ interseca $\omega(p)$ a lo más en un punto.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del lema anterior, el conjunto de puntos γ_p^+ en Σ tiene a lo más un punto límite, pues forma una sucesión monótona. El resultado sigue del lema 4. ■

Lema 7 *Sea $p \in \Omega$, con γ_p^+ contenida en un compacto, y sea Γ una órbita de X con $\Gamma \subset \omega(p)$. Si $\omega(\Gamma)$ solo contiene puntos regulares, entonces Γ es una órbita cerrada y $\omega(p) = \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Gamma \subset \omega(p)$. Busquemos el conjunto $\omega(\Gamma)$. Sea $q \in \omega(\Gamma)$ un punto regular y sea V una vecindad de q tal que el flujo de X en V es equivalente a un flujo constante. Sea Σ_q una sección transversal a q .

Por el lema 4, existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\Gamma(t_n) \in \Sigma_q$, con $\Gamma(t_n) \rightarrow q \in \omega(\Gamma)$. Como $\Gamma(t_n) \subset \omega(p)$, la sucesión $\{\Gamma(t_n)\} \subset \Sigma_q$ se reduce a un punto, por el lema 6. Por lo tanto, Γ es periódica.

Probemos ahora que $\Gamma = \omega(p)$. Como $\omega(p)$ es conexo, y Γ es un cerrado y no vacío, basta probar que Γ es abierto en $\omega(p)$.

Sean $\tilde{p} \in \Gamma$ y $V_{\tilde{p}}$ un vecindad de \tilde{p} tal que el flujo de X en $V_{\tilde{p}}$ es equivalente a un flujo constante. Denotemos por $\Sigma_{\tilde{p}}$ a una sección transversal de \tilde{p} en $V_{\tilde{p}}$. Mostraremos que $V_{\tilde{p}} \cap \Gamma = V_{\tilde{p}} \cap \omega(p)$.

Obviamente, $V_{\tilde{p}} \cap \Gamma \subset V_{\tilde{p}} \cap \omega(p)$. Supongamos que existe $\tilde{q} \in V_{\tilde{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\tilde{q} \notin \Gamma$. Como flujo de X en $V_{\tilde{p}}$ es equivalente a un flujo constante y como $\omega(p)$ es invariante, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \tilde{q}) \in \omega(p) \cap \Sigma_{\tilde{p}}$ y $\varphi(t, \tilde{q}) \neq \tilde{p}$. Luego, existen dos puntos distintos de $\omega(p)$ en $\Sigma_{\tilde{p}}$, lo que es imposible por el lema 6. Luego, $V_{\tilde{p}} \cap \Gamma = V_{\tilde{p}} \cap \omega(p)$.

Sea el conjunto abierto $U = \cup_{\tilde{p} \in \Gamma} V_{\tilde{p}}$. Tenemos que $\Gamma \subset U$ y $U \cap \omega(p) = U \cap \Gamma = \Gamma$, es decir, Γ es la intersección de un abierto de \mathbb{R}^2 con $\omega(p)$. Entonces Γ es un abierto en $\omega(p)$. ■

DEMOSTRACIÓN TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON.

Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ una curva integral de X , definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ está contenida en un compacto $K \subset \Omega$. Supongamos que X posee un número finito de puntos de equilibrio en $\omega(p)$. Entonces se tienen las siguientes alternativas:

a) Si $\omega(p)$ contiene solo puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.

RAZÓN. Sea $q \in \omega(p)$. Entonces la órbita $\gamma_q \subset \omega(p)$. Como $\omega(p)$ es compacto, se tiene $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Además, $\omega(\gamma_q)$ solo contiene puntos regulares.

Del lema 7, se tiene inmediatamente que $\omega(p) = \gamma_q$ es una órbita cerrada; ver figura 7.18.

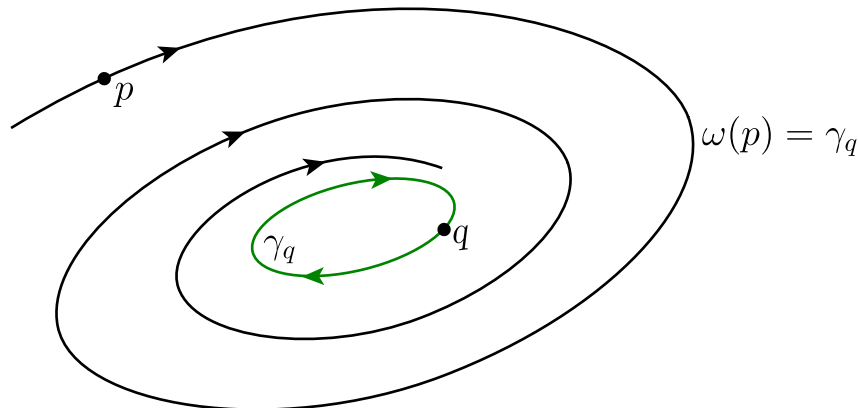


Figura 7.18: Si $\omega(p)$ contiene solo puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.

b) Si $\omega(p)$ contiene puntos de equilibrio y puntos regulares, entonces $\omega(p)$ consiste de un conjunto de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de estos puntos de equilibrio cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

RAZÓN. Sea γ una órbita contenida en $\omega(p)$, y que no se reduce a un punto de equilibrio, es decir, está compuesta de puntos regulares. Luego, $\omega(p) \neq \gamma$, pues $\omega(p)$ también contiene puntos de equilibrio. Como $\omega(\gamma)$ es conexo, y por el lema 7, se tiene que $\omega(\gamma)$ no contiene puntos regulares, i.e., se reduce a un punto de equilibrio de X , siempre que X tenga solamente un número finito de equilibrios en $\omega(p)$. Una afirmación similar es válida para probar que $\alpha(\gamma)$ es un punto de equilibrio. Este resultado se ilustra en la figura 7.19.

c) Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto de equilibrio.

RAZÓN. Esta afirmación se obtiene del hecho de que $\omega(p)$ es conexo y por el hecho de que X solo tiene un número finito de equilibrios en $\omega(p)$; ver figura 7.20. ■

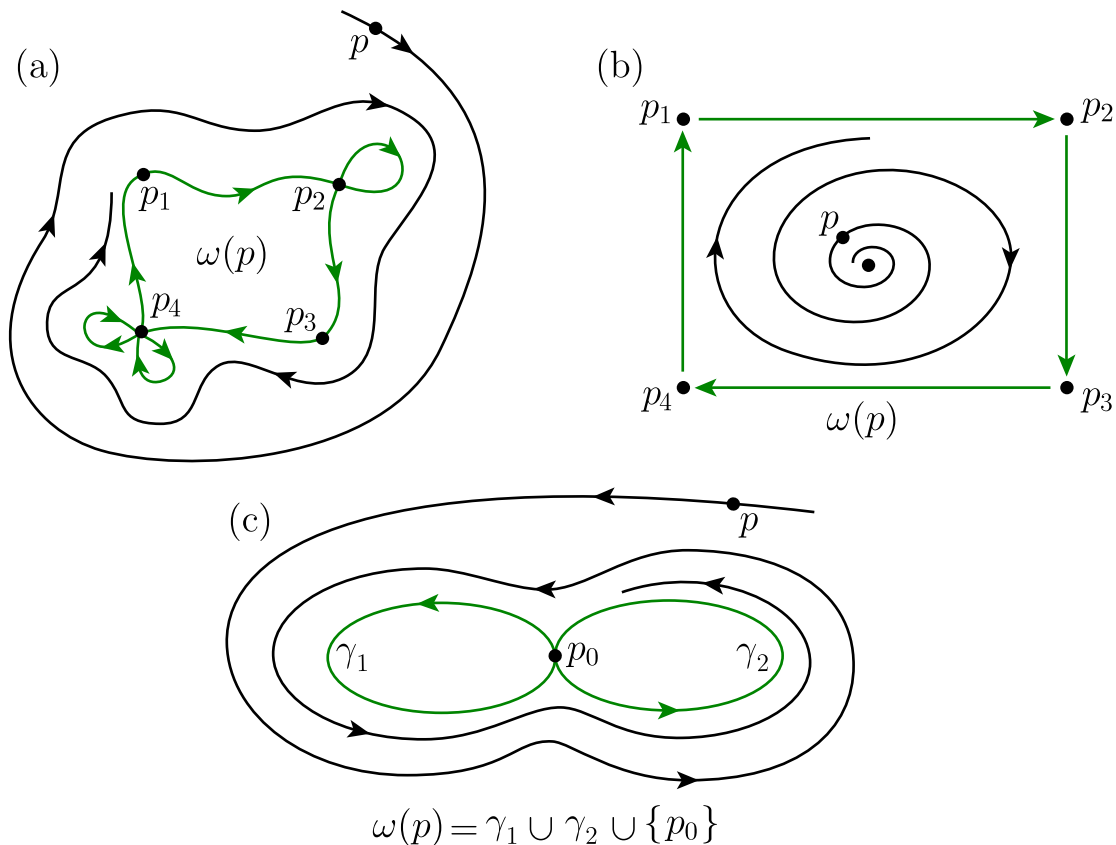


Figura 7.19: Si $\omega(p)$ contiene puntos de equilibrio y puntos regulares, entonces $\omega(p)$ consiste de un conjunto de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de estos puntos de equilibrio cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

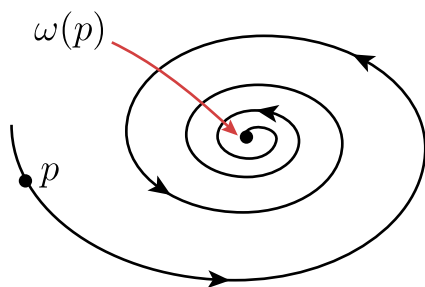


Figura 7.20: Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto de equilibrio.

7.3. Aplicaciones del teorema de Poincaré-Bendixson

Sea X un campo de vectores de clase C^1 en \mathbb{R}^2 tal que el anillo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

no posee puntos de equilibrio. Si la dirección del campo X apunta hacia el interior de A en todo punto de la frontera de A , entonces X tiene (al menos) una órbita periódica contenida en A (¿Por qué?).

La idea principal aquí y en muchos otros problemas es que es posible hallar una **región atrapadora**, esto es, un conjunto cerrado, conexo $R \subset \mathbb{R}^2$ tal que el flujo $\varphi(t, R) \subset R$ para todo $t > 0$. Para esto, es suficiente mostrar que el campo de vectores apunta hacia el interior de R en todo punto de ∂R ; ver figura 7.21. Entonces, *todas* las trayectorias en R están confinadas a R . Si además podemos asegurarnos que no hay equilibrios en R , entonces el teorema de Poincaré-Bendixson asegura que R contiene al menos una órbita cerrada.

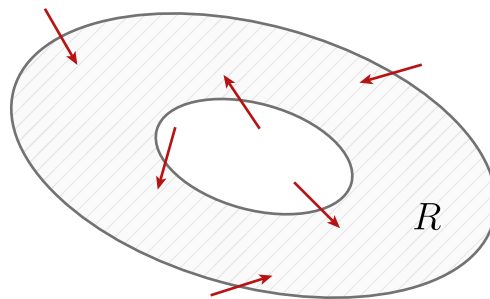


Figura 7.21: Una región atrapadora R .

Esto lo podemos formalizar en el siguiente corolario.

Corolario 8 Sea $\dot{x} = f(x)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, un campo de vectores diferenciable definido en un dominio Ω abierto. Sea $R \subset \Omega$ una región atrapadora compacta que no contiene puntos de equilibrio de f . Suponga además que existe una trayectoria C que está “confinada” a R , es decir, permanece en R para todo $t > 0$; ver figura 7.22. Entonces la curva C es, o bien, una órbita cerrada o converge a una órbita cerrada a medida que $t \rightarrow \infty$. (En cualquiera de los dos casos, la región R contiene una órbita cerrada.)

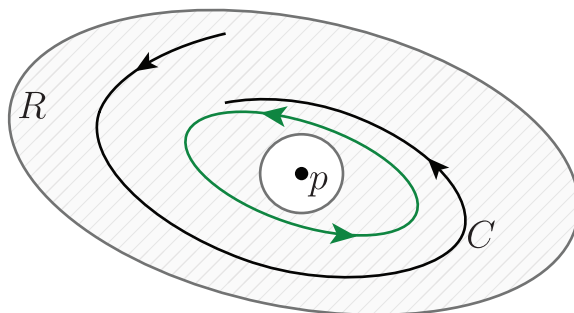


Figura 7.22: Ocupando el teorema de Poincaré-Bendixson para probar la existencia de una órbita periódica.

Ejemplo 48 Considere el sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Sea R el anillo acotado por los círculos de radio $r = \frac{1}{2}$ y $r = 2$, respectivamente. Notemos que R no contiene puntos de equilibrio del sistema. Demostremos que R es una región atrapadora. De hecho, R es cerrado y conexo; falta probar que es positivamente invariante. Para probar esto, considere el vector normal $N(x, y) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ en la frontera ∂R . Calculemos el producto punto de N con el campo de vectores X correspondiente a la ecuación diferencial, obteniendo:

$$N(x, y) \cdot X(x, y) = x^2(1 - x^2 - y^2) + y^2(1 - x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2).$$

Notemos que $N \cdot X > 0$ en el círculo $r = \frac{1}{2}$ y $N \cdot X < 0$ en el círculo $r = 2$. Por lo tanto, R es positivamente invariante, y por el corolario anterior, existe al menos una órbita cerrada en R . (De hecho, es un ciclo límite estable: Al pasar a coordenadas polares (r, θ) , el sistema transformado es

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1,$$

cuyo mapeo de retorno de Poincaré posee un punto fijo aislado en $r = 1$, el cual es estable—ver ejemplos 37 y 38.)

Ejemplo 49 Considere el sistema en coordenadas polares

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Por el ejemplo anterior, este sistema posee un ciclo límite estable en $r = 1$ cuando $\mu = 0$. Demostraremos que este ciclo todavía existe para valores de $\mu > 0$ suficientemente pequeños.

Buscaremos dos círculos concéntricos con radios r_{min} y r_{max} , tales que $\dot{r} < 0$ en el círculo exterior y $\dot{r} > 0$ en el círculo interior. De esa manera el anillo $0 < r_{min} \leq r \leq r_{max}$ será nuestra región atrapadora. Notemos que no hay puntos de equilibrio en el anillo pues $\dot{\theta} > 0$. Luego, si podemos hallar r_{min} y r_{max} , el teorema de Poincaré-Bendixson implicará la existencia de al menos una órbita cerrada.

Para encontrar r_{min} , requerimos que $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta > 0$ para todo θ . Dado que $\cos \theta \geq -1$, una condición suficiente para r_{min} es $1 - r^2 - \mu > 0$. Luego, $r_{min} < \sqrt{1 - \mu}$ nos sirve, siempre que $\mu < 1$. Por un argumento similar, el flujo apunta hacia adentro en el círculo exterior si $r_{max} > \sqrt{1 + \mu}$. Por lo tanto, existe al menos una órbita periódica para todo $0 < \mu < 1$ y está contenida en el interior del anillo $\sqrt{1 - \mu} < r < \sqrt{1 + \mu}$.

Teorema 22 Sea X un campo de vectores de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea γ una órbita cerrada de X tal que $\text{Int}(\gamma) \subset \Omega$. Entonces existe un punto de equilibrio de X contenido en $\text{Int}(\gamma)$; ver figura 7.23.

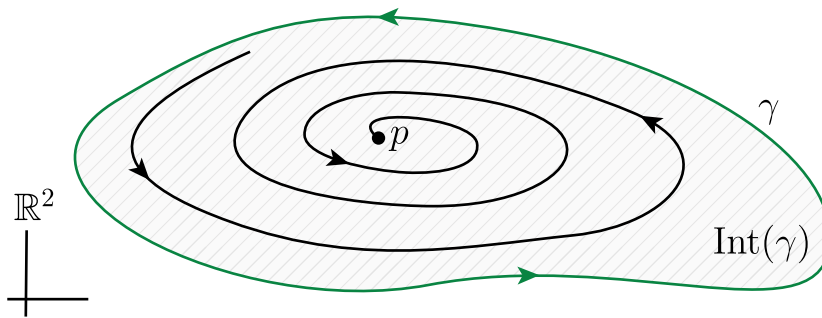


Figura 7.23: Si γ es una órbita cerrada en el plano, entonces esta debe encerrar al menos un punto de equilibrio de X en $\text{Int}(\gamma)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no existen puntos de equilibrio en $\text{Int}(\gamma)$. Luego, por el teorema de Poincaré-Bendixson, deben haber órbitas cerradas en $\text{Int}(\gamma)$.

Consideremos el conjunto Γ de órbitas cerradas de X contenidas en $\overline{\text{Int}(\gamma)}$, ordenadas según el siguiente orden parcial (ver figura 7.24):

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \overline{\text{Int}(\gamma_1)} \supseteq \overline{\text{Int}(\gamma_2)}.$$

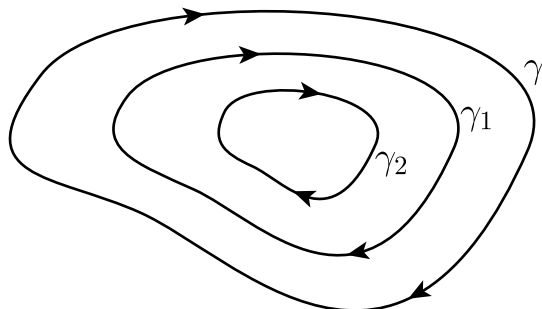


Figura 7.24: Consideramos el orden parcial $\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \overline{\text{Int}(\gamma_1)} \supseteq \overline{\text{Int}(\gamma_2)}$.

Demostremos que todo subconjunto S totalmente ordenado de Γ (o sea, si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ en S , entonces $\gamma < \gamma_2$ o $\gamma_2 < \gamma_1$), admite una cota superior, esto es, un elemento mayor o igual que cualquier otro elemento de S . Un conjunto ordenado con estas características se llama *inductivo*.

Sea $\sigma = \{\cap \overline{\text{Int}(\gamma_i)}, \gamma_i \in S\}$. Notemos que $\sigma \neq \emptyset$, pues cada $\overline{\text{Int}(\gamma_i)}$ es compacto y la familia $\{\overline{\text{Int}(\gamma_i)}, \gamma_i \in S\}$ tiene la propiedad de intersección finita; esto es, cualquier intersección finita de elementos de la familia es no-vacía.

Sea $q \in \sigma$. Por el teorema de Poincaré-Bendixson, $\omega(q)$ es una órbita cerrada contenida en σ , pues σ es invariante por X y no tiene puntos de equilibrio. Esta órbita cerrada ($\omega(q)$) es una cota superior de S según el orden parcial definido arriba.

Por el lema de Zorn, Γ tiene un elemento maximal, por ejemplo μ , pues Γ cumple con la propiedad de ser inductivo. Por lo tanto, no existe ninguna órbita cerrada de Γ contenida en $\text{Int}(\mu)$.

Pero si $p \in \text{Int}(\mu)$, entonces el teorema de Poincaré-Bendixson implica que $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son órbitas cerradas, pues no existen puntos de equilibrio. Pero por otro lado, $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ no pueden ser ambas iguales a μ . Luego, uno de estos conjuntos está contenido en $\text{Int}(\mu)$, lo que es una contradicción, pues implica que deben existir puntos de equilibrio en $\text{Int}(\mu)$; la idea se ilustra en la figura 7.25. ■

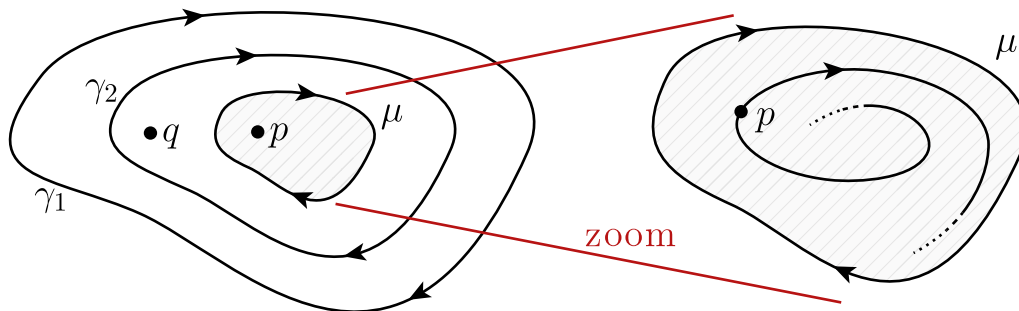


Figura 7.25: No existe ninguna órbita cerrada de Γ contenida en $\text{Int}(\mu)$.

Ejemplo 50 La ecuación diferencial no lineal $x'' + x^4 + 3 = 0$ no tiene soluciones periódicas. En efecto, el sistema asociado en \mathbb{R}^2 es

$$X : \begin{cases} x' = y, \\ y' = -x^4 - 3, \end{cases}$$

el cual no tiene puntos de equilibrio.

7.4. Ejercicios

1. Determine todos los conjuntos α -límite y ω -límite del siguiente sistema planar dado en coordenadas polares $(r, \theta) \in \Omega = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$:

$$X : \begin{cases} r' = r - r^5, \\ \theta' = 1 - \cos(\theta). \end{cases}$$

Además dibuje un bosquejo suficientemente claro del retrato de fase del sistema. Justifique sus razonamientos.

2. Encuentre **todos** los conjuntos α -límite y ω -límite del sistema no lineal planar

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ \dot{y} = x + y\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right), \end{cases}$$

para $x^2 + y^2 \neq 0$. *Sugerencia:* Considere coordenadas polares.

3. Para cada uno de los siguientes sistemas, identifique todos los puntos que están en un conjunto ω -límite o α -límite.

a) $r' = r - r^2, \theta' = 1.$

b) $r' = r^3 - 3r^2 + 2r, \theta' = 1.$

c) $r' = \sin(r), \theta' = 1.$

d) $x' = \sin(x) \cos(x), y' = -\cos(x) \cos(y).$

4. Si se sabe que el origen es el único punto de equilibrio de la EDO

$$X : \begin{cases} x' = y - x^3 + x, \\ y' = -x - y^3 + y, \end{cases}$$

demuestre que este sistema posee al menos una órbita periódica.

5. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = y(2 - x^4 - y^4). \end{cases}$$

Demuestre que el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1/2, x^4 + y^4 \leq 3\}$ contiene **al menos una** órbita periódica.

6. Considere la ecuación de un oscilador mecánico de la forma:

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0,$$

donde $F(x, \dot{x}) < 0$ si $r \leq a$, y $F(x, \dot{x}) > 0$ si $a < r \leq b$, con $r^2 = x^2 + \dot{x}^2$.

Demuestre que existe **al menos una** solución periódica si $a < r < b$.

7. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

a) Clasifique la estabilidad del equilibrio en el origen.

b) Reescriba el sistema en coordenadas polares, usando $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ y $\dot{\theta} = (x\dot{y} - y\dot{x})/r^2$.

- c) Determine el círculo de radio máximo r_1 , centrado en el origen tal que todas las trayectorias posean componente radial apuntando *hacia afuera* del círculo.
- d) Determine el círculo de radio mínimo r_2 , centrado en el origen tal que todas las trayectorias posean componente radial apuntando *hacia adentro* del círculo.
- e) Pruebe que el sistema posee un ciclo límite contenido en la región atrapadora $r_1 \leq r \leq r_2$.

8. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x, \\ \dot{y} = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y. \end{cases}$$

Demuestre que el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1/4, x^2 + y^2 \leq 4\}$ contiene **al menos una** órbita periódica.

Sugerencia: Considere un razonamiento similar al ejercicio anterior.

Capítulo 8

Otros criterios para detectar o descartar soluciones periódicas

Supongamos que tenemos una fuerte sospecha de que un sistema no lineal — probablemente proveniente de alguna aplicación— posee una solución periódica (o que no posee ninguna!). ¿Cómo podemos probar o descartar esto? Aunque en sistemas bidimensionales podemos ocupar el teorema de Poincaré-Bendixson, normalmente es difícil decidir esta cuestión. En esta sección presentamos algunas técnicas adicionales para descartar la presencia de ciclos o para probar su existencia.

8.1. Sistemas gradientes

Supongamos que una EDO se puede escribir de la forma

$$\dot{x} = -\nabla V(x),$$

para alguna función escalar $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Un sistema de este tipo se dice un **sistema gradiente** con **función potencial** V .

Teorema 23 *Los sistemas gradientes no poseen órbitas cerradas.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una órbita cerrada. Obtendremos una contradicción al considerar el cambio ΔV en V después de un circuito. Por

un lado, $\Delta V = 0$ al completar un ciclo a lo largo de la órbita cerrada. Sin embargo, por otro lado, si T es el período del ciclo, entonces

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt} dt = \int_0^T (\nabla V \cdot \dot{x}) dt = - \int_0^T \|\dot{x}\|^2 dt < 0,$$

a menos que $\dot{x} \equiv 0$, en cuyo caso la órbita es un punto de equilibrio. Esta contradicción muestra que no pueden haber órbitas cerradas en sistemas gradientes. ■

Ejemplo 51 Demuestre que no hay órbitas cerradas en el sistema

$$\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = x \cos y.$$

El sistema es un sistema gradiente con función potencial $V(x, y) = -x \sin y$. Luego, por el teorema anterior, no hay órbitas periódicas.

Incluso si un sistema no es un sistema gradiente, algunas técnicas similares igual podrían funcionar. Por ejemplo, podemos examinar el cambio en una función tipo energía después de un circuito alrededor de la supuesta órbita periódica y llegar a una contradicción.

Ejemplo 52 Demuestre que el oscilador con amortiguación no-lineal

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$$

no posee órbitas periódicas.

Supongamos que hay una solución periódica $x(t)$ de período T . Consideremos la función energía $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2)$. Después de un ciclo, x y \dot{x} regresan a sus valores originales y, por lo tanto, $\Delta E = 0$ alrededor de una órbita cerrada.

Por otro lado, $\Delta E = \int_0^T \dot{E} dt$. Si podemos mostrar que esta integral es no-nula, hemos llegado a una contradicción. Notemos que

$$\dot{E} = \dot{x}(x + \ddot{x}) = \dot{x}(-\dot{x}^3) = -\dot{x}^4 \leq 0.$$

Por lo tanto, $\Delta E = - \int_0^T \dot{x}^4 dt \leq 0$, donde la igualdad se cumple sólo si la órbita $x(t)$ es un punto de equilibrio. Luego, no hay soluciones periódicas.

8.2. Criterio de Dulac

El segundo método para descartar órbitas periódicas se basa en el teorema de Green y se conoce como criterio de Dulac.

Teorema 24 Sea $\dot{x} = f(x)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, un campo de vectores diferenciable definido en un dominio Ω simplemente conexo del plano. Si existe una función escalar $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\nabla \cdot (g\dot{x})$ no cambia de signo en Ω , entonces no existen órbitas cerradas enteramente contenidas en Ω .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una órbita cerrada C enteramente contenida en la región Ω . Denotemos por A a la región encerrada por C . Entonces el teorema de Green nos da

$$\iint_A \nabla \cdot (g\dot{x}) \, dx dy = \oint_C g\dot{x} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

donde \mathbf{n} es un vector normal exterior a C y ds es el elemento diferencial de longitud de arco. Si la función escalar $\nabla \cdot (g\dot{x})$ no cambia de signo en Ω , entonces la integral $\iint_A \nabla \cdot (g\dot{x}) \, dx dy \neq 0$. Sin embargo, $\dot{x} \cdot \mathbf{n} = 0$ en cada punto de C , luego $\oint_C g\dot{x} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$. ■

OBSERVACIÓN. No existe un algoritmo para hallar la función $g(x)$ apropiada en cada caso. Algunos candidatos que ocasionalmente funcionan son $g(x, y) \equiv 1$, $g(x, y) = \frac{1}{x^a y^b}$, $g(x, y) = e^{ax}$ y $g(x, y) = e^{ay}$.

Ejemplo 53 El sistema $\dot{x} = x(2 - x - y)$, $\dot{y} = y(4x - x^2 - 3)$ no posee órbitas cerradas en el primer cuadrante. La razón es que si escogemos $g(x, y) = \frac{1}{xy}$, entonces

$$\nabla \cdot (g(x, y)f(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(g\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(g\dot{y}) = -\frac{1}{y} < 0.$$

Dado que el primer cuadrante del plano es simplemente conexo y g y el campo de vectores f satisfacen los requisitos de diferenciabilidad, el criterio de Dulac implica que no hay órbitas periódicas en el primer cuadrante.

8.3. Ecuaciones de Liénard

En la primera mitad del siglo XX hubo un gran interés en la investigación de oscilaciones no-lineales motivadas por la radio y tecnologías de tubos de vacío. Se descubrió que muchos circuitos eléctricos oscilatorios usados en las primeras radios se podían modelar por ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma

$$\ddot{u} + g(u)\dot{u} + u = 0, \quad (8.1)$$

conocida ahora como una **ecuación de Liénard**. Esta ecuación es, a su vez, una generalización del oscilador de van der Pol $\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ que mencionaremos en el ejemplo 54. También se le puede dar a (8.1) una interpretación mecánica como la ecuación de movimiento de una masa unitaria sujeta a una fuerza de amortiguación $-g(u)\dot{u}$ y a una fuerza restauradora (normalizada) $h(u) = u$ que actúa como un resorte ordinario.

La ecuación de Liénard es equivalente al sistema planar

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -1 - g(u)v. \end{cases} \quad (8.2)$$

El siguiente teorema establece que este sistema posee un único ciclo límite estable bajo ciertas condiciones.

Teorema 25 (*Liénard*) *Considere la ecuación de Liénard (8.1) donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y satisface las siguientes condiciones:*

1. $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ es una función impar; es decir, $G(-u) = -G(u)$.
2. $G(u) \rightarrow \infty$, si $u \rightarrow \infty$ y existe $\beta > 0$ tal que si $u > \beta$ entonces G es positiva y creciente.
3. Existe $\alpha > 0$ tal que $G(u) < 0$ si $0 < u < \alpha$.

Entonces (8.1) tiene una solución periódica.

Este resultado no parece descabellado. Las suposiciones sobre $g(x)$ implican que el amortiguamiento es negativo para desplazamientos $|x|$ pequeños y positivos para $|x|$ grandes; es decir, provoca que las oscilaciones de gran amplitud decaigan,

pero las potencia si se vuelven demasiado pequeñas. Luego, no es sorprendente que el sistema tienda a asentarse en una oscilación auto-sostenida de amplitud intermedia.

Por otro lado, no es difícil probar que si $\alpha = \beta$, entonces (8.1) admite una única órbita periódica, la cual, necesariamente es estable.

Ejemplo 54 El oscilador de van der Pol $\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ (donde $\epsilon \geq 0$) tiene un único ciclo límite y es estable. En este caso $g(x) = \epsilon(x^2 - 1)$, y las condiciones (1)–(3) del teorema de Liénard se satisfacen. Para chequear la condición (3), notemos que

$$G(x) = \epsilon \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) = \frac{1}{3}\epsilon x(x^2 - 3).$$

Luego, la condición (3) se satisface para $\alpha = \beta = \sqrt{3}$ y el ciclo límite es único y estable.

Aquí, el término $g(x) = \epsilon(x^2 - 1)$ actúa como un amortiguamiento positivo ordinario para $|x| > 1$ (se disipa energía), pero como un amortiguamiento *negativo* para $|x| < 1$ (se gana energía). De esta forma, el sistema eventualmente se asienta en una oscilación auto-sostenida donde la energía disipada sobre un ciclo se “equilibra” con la energía recibida. A modo de ilustración, la figura 8.1 muestra una solución en el plano de fase y la gráfica de $x(t)$ vs t . Notemos que el ciclo límite al cual converge la órbita no es un círculo y la forma de la serie temporal $x(t)$ no es sinusoidal. Esta solución fue obtenida al integrar numéricamente la ecuación de van der Pol para $\epsilon = 1,5$ empezando desde el punto $(x, \dot{x}) = (0,5,0)$ en $t = 0$.

DEMOSTRACIÓN TEO. DE LIÉNARD. La ecuación de Liénard es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v - G(u), \\ \dot{v} = -u, \end{cases} \quad (8.3)$$

donde (u, v) se conocen como *coordenadas de Liénard*. En efecto, derivando $\dot{u} = v - G(u)$ a ambos lados se obtiene (8.1).

Se comprueban fácilmente las siguientes propiedades:

- a) El único punto de equilibrio de (8.3) es el origen $(0, 0)$ pues $G(0) = 0$.

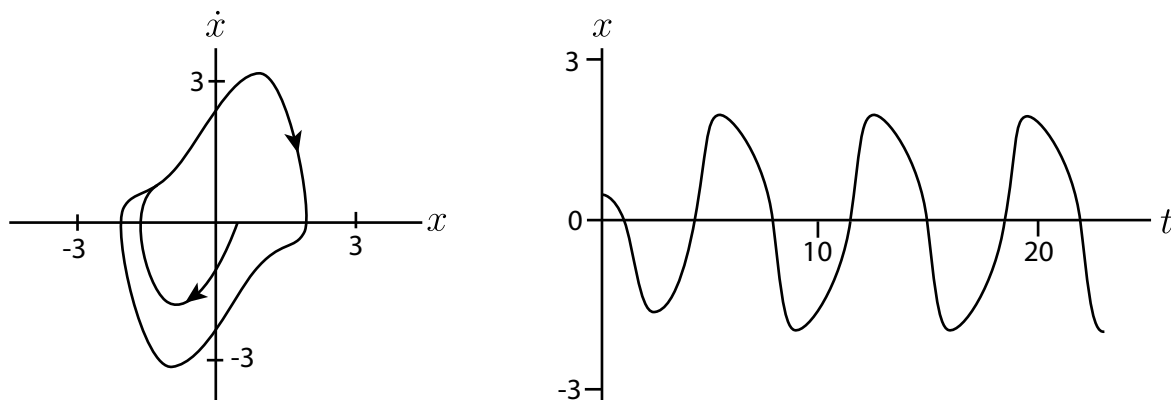


Figura 8.1: La ecuación de van der Pol tiene una única solución periódica estable.

- b) Se ve de (8.3) que toda solución $(u(t), v(t))$ es tal que $u(t)$ es creciente si $v(t) > G(t)$, y $u(t)$ es decreciente si $v(t) < G(t)$. Además, $v(t)$ es decreciente si $u(t) > 0$ y creciente si $u(t) < 0$.
- c) Además, el campo $(v - G(u), -u)$ dado por (8.3) es horizontal en $\{u = 0\}$ (eje v) y vertical en la curva $v = G(u)$.

Se sigue que la solución de (8.3) que pasa por el punto $A = (0, v_0)$, con $v_0 > 0$ suficientemente grande, tiene una órbita con arco $ABCD$ como en la figura 8.2.

Notemos además que las soluciones de (8.3) son invariantes por reflexiones $(u, v) \mapsto (-u, -v)$, es decir, $(u(t), v(t))$ es solución de (8.3) si y solo si $(-u(t), -v(t))$ también lo es. Este hecho es consecuencia de que G es una función impar. Por lo tanto, si conocemos un arco de trayectoria $ABCD$ como en la figura 8.2, entonces su reflexión con respecto al origen también es un arco de trayectoria. En particular, si $A = (0, v_0)$, $D = (0, -v_1)$ y $v_1 < v_0$, entonces la semiórbita positiva que pasa por A estará acotada y, de hecho, estará contenida en la región delimitada por la curva de Jordan J formada por:

- el arco $ABECD$,
- su reflexión con respecto al origen,
- y los segmentos del eje v que unen a los extremos de estos arcos; ver figura 8.3.

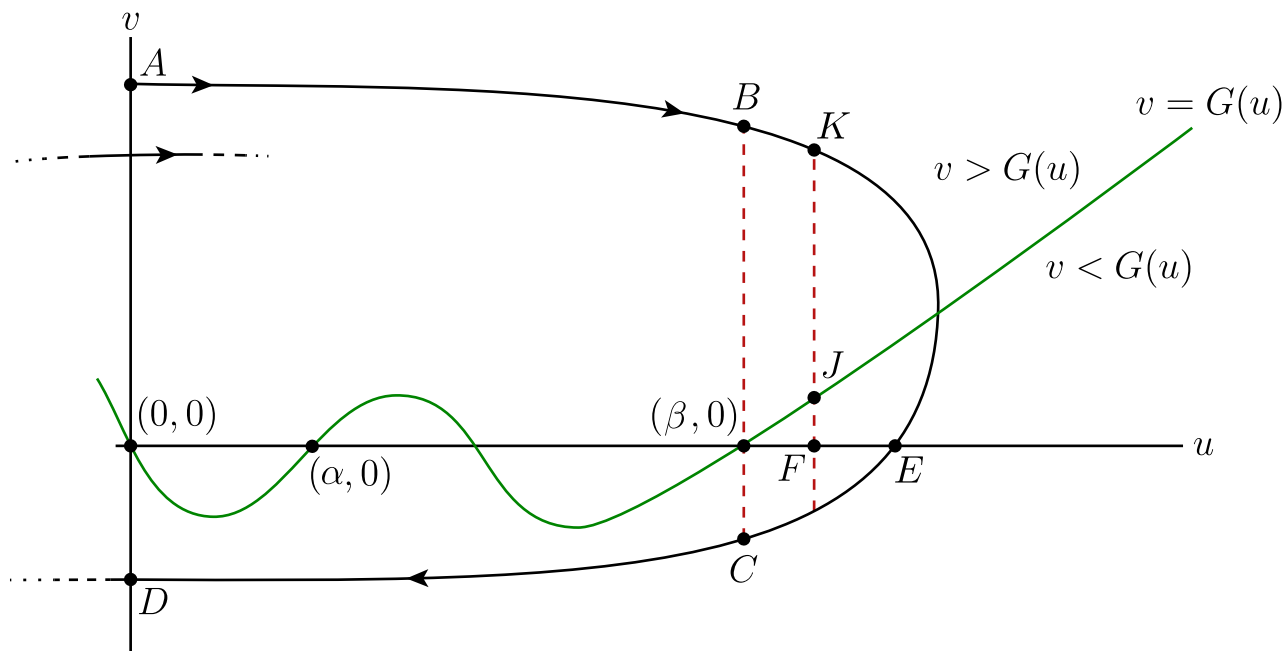


Figura 8.2: La solución de (8.3) que pasa por el punto $A = (0, v_0)$, con $v_0 > 0$ suficientemente grande, tiene una órbita con arco $ABCD$.

A continuación probaremos que si $v_0 > 0$ es suficientemente grande, entonces $v_1 < v_0$, y el conjunto $\omega(A)$ está contenido en la región limitada por J . Luego, verificaremos que el origen es un equilibrio repulsor de (8.3) y, entonces, $\omega(A) \neq \{(0, 0)\}$. Por el teorema de Poincaré-Bendixson, $\omega(A)$ debe ser una órbita cerrada. Esto terminará la demostración.

Consideremos la función

$$R(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Para una solución $u = u(t)$, $v = v(t)$ de (8.3) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt}(u(t), v(t)) &= \frac{dR}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dR}{dv} \frac{dv}{dt} \\ &= u(v - G(u)) - uv \\ &= -u(t)G(u(t)). \end{aligned} \tag{8.4}$$

De la figura 8.2 se tiene

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = R(D) - R(A) = \int_{ABECD} dR. \tag{8.5}$$

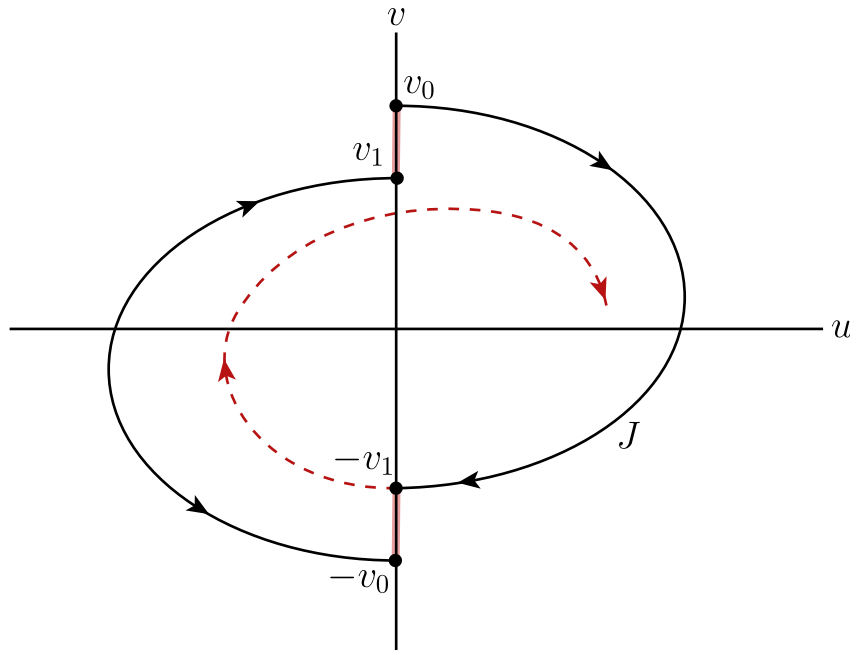


Figura 8.3: Si $A = (0, v_0)$, $D = (0, -v_1)$ y $v_1 < v_0$, la semiórbita positiva que pasa por A estará contenida en la región delimitada por la curva de Jordan J .

Probaremos que la expresión en (8.5) es negativa para v_0 suficientemente grande. Ocupando (8.3) y (8.4), la integral de línea en (8.5) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \int_{ABECD} dR &= \left(\int_{AB} + \int_{CD} \right) dR + \int_{BEC} dR \\ &= \left(\int_{AB} + \int_{CD} \right) \frac{dR}{dt} \frac{dt}{du} du + \int_{BEC} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dv} dv \\ &= \left(\int_{AB} + \int_{CD} \right) \frac{-uG(u)}{v - G(u)} du + \int_{BEC} G(u) dv. \end{aligned}$$

Las dos primeras integrales tienden a cero monótonamente cuando $v_0 \rightarrow \infty$, pues el denominador $v - G(u) \rightarrow \infty$ uniformemente. Por lo tanto, si $v_0 > 0$ es suficientemente grande, la contribución de las dos primeras integrales es despreciable para el valor (y el signo) de (8.5).

Sea F un punto cualquiera en el eje u entre $(\beta, 0)$ y E como en la figura 8.2,

y definamos

$$\phi(v_0) := \int_{BEC} G(u)dv.$$

Entonces

$$\begin{aligned} -\phi(v_0) &= \int_{CEB} G(u)dv \\ &> \int_{EK} G(u)dv, \end{aligned}$$

pues G es positiva para $u > \beta$. Más aún, como G es creciente para $u > \beta$, se sigue que todos sus valores a la derecha de F son mayores que $d(F, J)$, donde $d(F, J)$ es la longitud del segmento FJ (y la altura del punto J). Luego,

$$\int_{EK} G(u)dv > d(F, J) \times d(F, K),$$

donde $d(F, K)$ es la distancia entre F y K .

Como $d(F, K) \rightarrow \infty$ si $v_0 \rightarrow \infty$, entonces $\phi(v_0) \rightarrow -\infty$ si $v_0 \rightarrow \infty$. Por (8.5), $v_1^2 < v_0^2$, si v_0 es suficientemente grande. Por lo tanto, $\omega(A)$ está en una región encerrada por la curva de Jordan J .

Por último, si $0 < |u| < \alpha$, por las hipótesis 1 y 3 y por (8.4), tenemos

$$\frac{dR}{dt}(t) = -u(t)G(u(t)) > 0.$$

Luego, $R(u(t), v(t)) = \frac{1}{2}(u^2(t) + v^2(t))$ es creciente a lo largo de las trayectorias de (8.3) en una vecindad de $(0, 0)$. Por lo tanto, el origen es el conjunto α -límite de todo punto en una vecindad del $(0, 0)$; esto es, el origen es un equilibrio repulsor. ■

8.4. Ejercicios

1. Verifique si las siguientes ecuaciones diferenciales poseen soluciones periódicas o no:

a) $x'' + (x^6 - x^2)x' + x = 0.$

b) $x'' - (x')^2 - (1 + x^2) = 0.$

Sugerencia: Use el Teorema de Lienard o el teorema sobre existencia de puntos de equilibrio.

2. Demuestre que el sistema siguiente no tiene órbitas periódicas:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - x^5 - y^4x, \\ \dot{y} = y - y^3 - yx^2, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, $f'(0) > 0$, y $-\frac{1}{4} < f'(1) < 0$. Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x) - y, \end{cases}$$

no posee ciclos límite.

4. Sea $X = \nabla f$, donde f es una función de clase C^r , $r \geq 2$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

a) Demuestre que X no posee órbitas periódicas.

b) Si X tiene puntos de equilibrio aislados, demuestre que para todo $p \in \Omega$, el conjunto ω -límite de p es, o bien, vacío o un punto de equilibrio.

Sugerencia: Si $\varphi(t)$ es una trayectoria de X , note que $\frac{df}{dt}(\varphi(t)) > 0$, es decir, $f \circ \varphi$ es creciente.

5. Demuestre que todos los campos de vectores en \mathbb{R} son sistemas gradiente. ¿Es verdad lo mismo en campos vectoriales definidos en el círculo \mathbb{S}^1 ?

6. Sea $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, un campo de vectores suave definido en el plano.

a) Si este es un sistema gradiente, demuestre que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

b) ¿Es cierto el recíproco de (a)?

7. Encuentre la función potencial V para los siguientes sistemas gradiente.

a) $\dot{x} = y^2 + y \cos x$, $\dot{y} = 2xy + \sin x$.

b) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - e^{2y}$, $\dot{y} = -2xe^{2y}$.

8. Para cada uno de los siguientes sistemas, decida si es un sistema gradiente. Si es así, encuentre V .

a) $\dot{x} = y + x^2y, \dot{y} = -x + 2xy.$

b) $\dot{x} = 2x, \dot{y} = 8y.$

c) $\dot{x} = -2xe^{x^2+y^2}, \dot{y} = -2ye^{x^2+y^2}.$

9. (Criterio de Bendixson) Sea $X = (X_1, X_2)$ un campo de clase C^1 en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, donde Ω es un conjunto abierto y simplemente conexo. Si se satisface que

$$\nabla \cdot X = \operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \neq 0,$$

para todos los puntos de Ω , demuestre que X no tiene órbitas periódicas en Ω . *Sugerencia:* Suponga que γ es una órbita periódica y aplique el teorema de la divergencia al conjunto encerrado por γ .

10. Si el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ no es simplemente conexo, entonces la conclusión del criterio de Dulac ya no es válida. Encuentre un contraejemplo.

Capítulo 9

Sistemas conservativos

Los sistemas conservativos son un tipo especial de sistemas de ecuaciones diferenciales. Tienen la propiedad de que sus órbitas están contenidas en conjuntos de nivel de ciertas funciones. Por ello, si uno logra identificar dichas funciones, es posible construir el retrato de fase global del sistema.

La idea de un sistema conservativo es la misma que en Física. Las ecuaciones diferenciales pueden representar las ecuaciones de movimiento de un cuerpo sobre el cual actúa una fuerza conservativa. Por ejemplo, expresemos la Segunda Ley de Newton como

$$m\ddot{x} = F(x), \tag{9.1}$$

donde m es la masa del cuerpo, $x(t)$ representa su posición y $F(x)$ es la fuerza actuando sobre el cuerpo en la posición x . En este caso, asumimos que F es independiente de la velocidad \dot{x} y el tiempo t . Luego, en este sistema no hay fricción o amortiguamiento, y no hay fuerzas externas. Esto quiere decir que no hay disipación de energía por el roce ni un incremento de energía por causas externas: el sistema es conservativo y, en particular, la energía total se conserva.

Sea $V(x)$ la energía potencial, la cual viene dada por

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

o equivalentemente

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por \dot{x} y ocupando la regla de la cadena obtenemos

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \right) = 0,$$

donde

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

es la *energía total del sistema*. Por lo tanto, en el sistema (9.1) la energía total es constante en el tiempo a lo largo de cada solución. La energía E es también llamada *cantidad conservada*, *constante de movimiento* o *primera integral* de (9.1).

Definición 30 Consideremos el campo de vectores $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, de clase C^1 . Supongamos que el sistema de ecuaciones $\dot{x} = X(x)$ posee una cantidad conservada, esto es, existe una función $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 , no constante en todo conjunto abierto, tal que es constante a lo largo de las trayectorias $x(t)$ de X , o sea, $\frac{dE}{dt}(x(t)) \equiv 0$. Entonces $\dot{x} = X(x)$ se dice un **sistema conservativo**.

En esta definición decimos que E es una función que *no es* idénticamente constante. En cambio, al restringirla a cualquier solución del sistema, no cambia su valor, el cual viene determinado por la condición inicial $E(x(t)) \equiv E(x(0)) = \text{cte}$ para todo $t \in I_{x(t)}$ en el intervalo maximal de definición.

Proposición 10 Un sistema conservativo no posee puntos de equilibrio atractores.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que x^* es un equilibrio atractor. Sea $p \in \Omega$ tal que $\varphi(t, p) \rightarrow x^*$, con p en una vecindad $V(x^*)$ de x^* . Por continuidad, $E(x^*) = E(p)$, pues la cantidad E es constante a lo largo de la trayectoria $\varphi(t, p)$ para $t \rightarrow \infty$. Como p era un punto arbitrario en $V(x^*)$, entonces $E(x) \equiv \text{cte}$ para todo punto $x \in V(x^*)$, lo que es una contradicción. ■

Si no hay puntos de equilibrio atractores, entonces aplicando el mismo argumento para $t \rightarrow -\infty$, tampoco pueden haber equilibrios repulsivos. ¿Qué tipo de equilibrios pueden ocurrir? Solo quedan sillas y centros como posibilidades.

Ejemplo 55 Consideremos el sistema (9.1) con una masa $m = 1$ moviéndose en un doble potencial

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Luego, la fuerza es $F(x) = -dV/dx = x - x^3$, y la ecuación de movimiento viene dada por

$$\ddot{x} = x - x^3.$$

Este sistema representa, por ejemplo, una masa unitaria sujeta a un resorte con una fuerza de restauración no lineal $x - x^3$ y sin roce.

Reescribiendo la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones obtenemos

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^3. \end{cases}$$

Los equilibrios del sistema están en $(0, 0)$ y $(\pm 1, 0)$. La linealización viene dada por

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En $(0, 0)$ se tiene $\det DX(0, 0) = -1 < 0$; luego, el origen es un punto silla. Por otro lado, $\operatorname{tr} DX(\pm 1, 0) = 0$, $\det DX(\pm 1, 0) = 2$; luego los puntos $(\pm 1, 0)$ son equilibrios no hiperbólicos de X . Notemos que en la linealización de X , $(\pm 1, 0)$ son centros, pero, en general, esto no significa que también lo sean para el sistema no lineal X pues no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman (!).

Como el sistema es conservativo, la energía total se preserva a lo largo de las órbitas de X . Asimismo, la ecuación $E(x, y) = C$ representa la curva de nivel C de la función energía. Por lo tanto, las órbitas de X deben estar contenidas en las curvas de nivel de E .

En este caso, la energía total es $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. La figura 9.1 muestra el retrato de fase resultante al graficar las curvas de nivel de E . Para chequear la orientación de las órbitas basta pararse en un punto arbitrario —por ejemplo, en el eje y positivo— y ver el sentido del campo X en ese punto; el resto de las orientaciones se obtiene por continuidad.

Tenemos que $(0, 0)$ es un punto silla, y $(\pm 1, 0)$ son ambos centros rodeados por órbitas cerradas pequeñas. También hay órbitas periódicas de mayor amplitud que

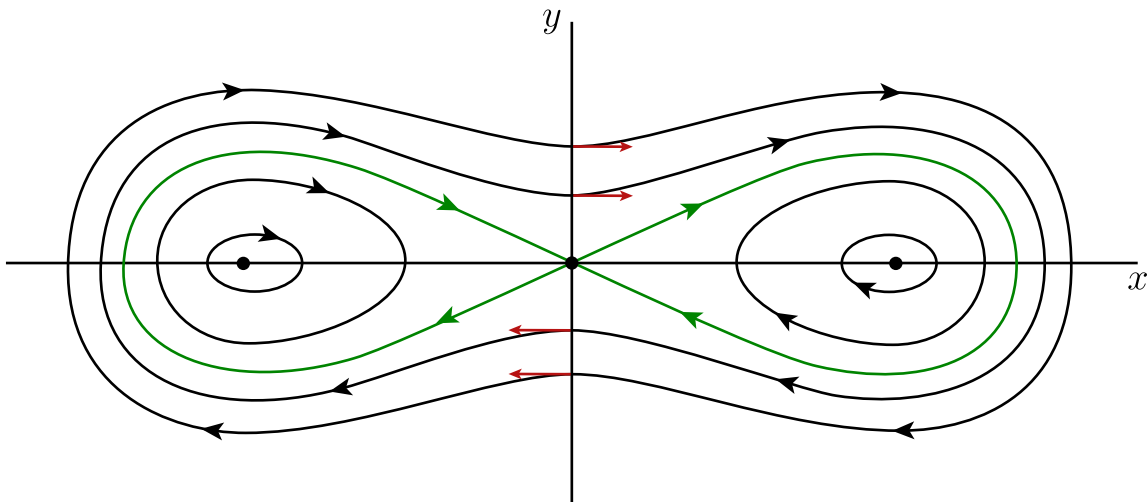


Figura 9.1: Las órbitas de X están contenidas en las curvas de nivel de $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

rodean a los tres equilibrios.

Por lo tanto, las órbitas típicas son periódicas, excepto por los puntos de equilibrio y por las órbitas que conectan el origen consigo mismo para $t \rightarrow \pm\infty$; estas soluciones especiales se llaman *órbitas homoclínicas*.

Podemos interpretar cada una de estas soluciones al observar el gráfico de la función energía en la figura 9.2. En cada altura fija $z = E(x, y)$, la energía es $z = \text{cte}$. A mayor altura, el movimiento del sistema masa-resorte corresponde a oscilaciones con más energía; si la altura decrece, se tienen oscilaciones de menor energía. Los centros ocurren en los valores mínimos locales de la función energía. (Esto es físicamente plausible, pues uno espera que tanto estos equilibrios estables como las pequeñas oscilaciones ocurran en el fondo de cualquier pozo potencial, sin importar su forma). Mientras que las órbitas homoclínicas se encuentran al mismo nivel de energía que el origen, i.e., el equilibrio en reposo. Esto es en realidad un resultado más general, el cual se presenta a continuación.

Proposición 11 *Considere el sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, f de clase C^1 . Supongamos que existe una cantidad conservada $E(x)$ y suponga que x^* es un equilibrio aislado. Si x^* es un mínimo local de E , entonces todas las órbitas suficientemente cercanas a x^* son cerradas.*

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN. Dado que E es constante a lo largo de las

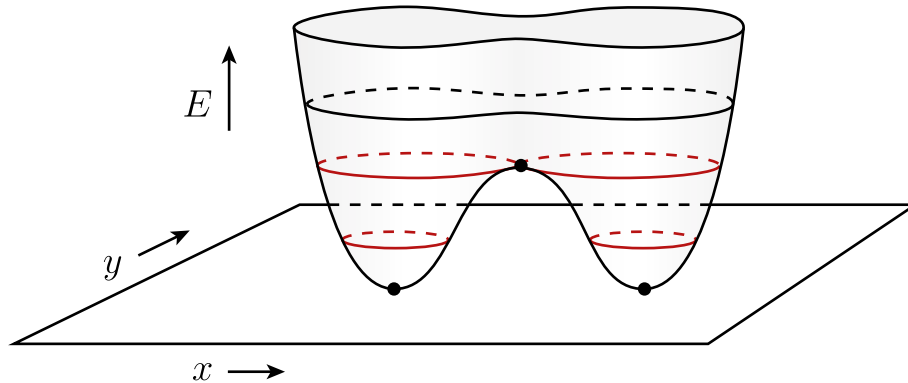


Figura 9.2: El gráfico de la función energía corresponde a una superficie $z = E(x, y)$. A mayor altura, el movimiento del sistema masa-resorte corresponde a oscilaciones con más energía; si la altura decrece, se tienen oscilaciones de menor energía.

órbitas, cada trayectoria está contenida en algún nivel de E . Cerca de un máximo o mínimo local, los contornos (o niveles) son cerrados. (No probaremos esto, pero la figura 9.2 debería bastar para convencerse.) La única pregunta que falta es si la órbita de verdad se cierra o si se “detiene” en algún punto de equilibrio ubicado en la misma curva de nivel. Pero como asumimos que x^* es aislado, no pueden haber puntos de equilibrio en niveles suficientemente cerca de x^* . Luego, todas las órbitas en una vecindad suficientemente pequeña de x^* son órbitas cerradas, y por lo tanto x^* es un centro. ■

A pesar de que los centros son comúnmente muy delicados y “frágiles” ante perturbaciones (al ser equilibrios no hiperbólicos), la proposición anterior nos dice que ellos son mucho más robustos cuando el sistema es conservativo.

¿Qué pasa si el sistema sufre una disipación de energía producto del roce o amortiguamiento? En tal caso, la energía total ya no se preserva, y el sistema deja de ser conservativo. En el ejemplo anterior, la ecuación de movimiento queda de la forma

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x^3 - x = 0,$$

o en forma equivalente como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$X_\delta : \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y, \end{cases}$$

donde $\delta > 0$ es un coeficiente de amortiguación.

Si ahora comparamos las curvas de nivel de la función $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ con el campo de vectores X_δ , vemos que el campo “desciende” a través de las curvas de nivel; ver figura 9.3. En efecto, calculando la tasa de cambio de la energía E restringida a una órbita de X_δ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E(x(t), y(t))) &= \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y}, \\ &= (-x + x^3)y + y(x - x^3 - \delta y) \\ &= -\delta y^2 < 0. \end{aligned}$$

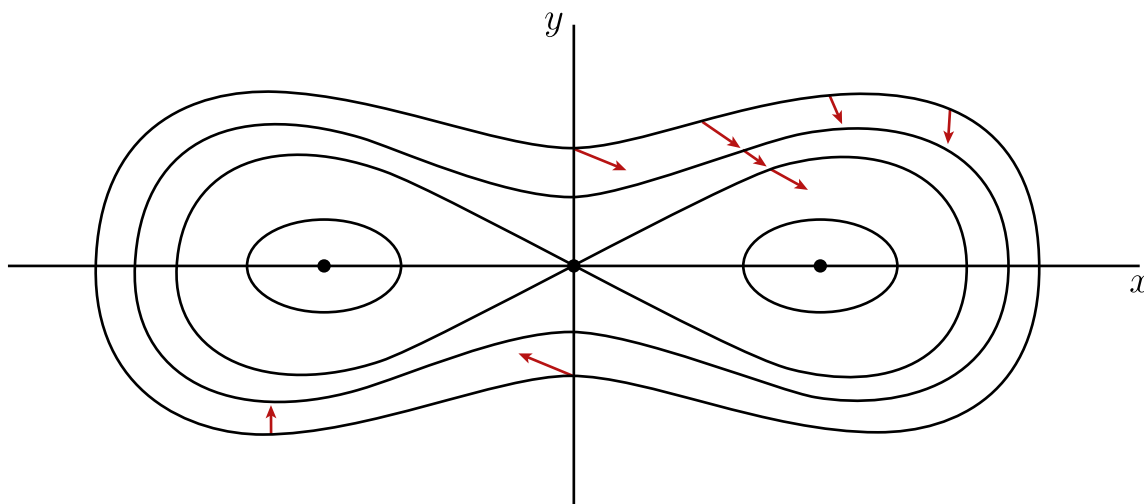


Figura 9.3: Para el sistema masa-resorte amortiguado, la energía E decrece a lo largo de las órbitas y ya no se preserva.

En otras palabras, la energía E decrece a lo largo de las órbitas y ya no se preserva. Es decir, las órbitas atraviesan las curvas de nivel de E en dirección decreciente de la energía.

Como E es ahora una función decreciente a lo largo de las trayectorias, éstas últimas deben converger para $t \rightarrow \infty$ a puntos donde E alcanza sus mínimos locales, i.e., los equilibrios $(\pm 1, 0)$. Como consecuencia, los centros del caso conservativo ($\delta = 0$) ahora son equilibrios atractores (!) en el caso disipativo ($\delta > 0$). El retrato de fase resultante es como el de la figura 9.4. Notemos que además han desaparecido todas las órbitas periódicas.

Para $\delta > 0$ pudimos decidir la estabilidad local de los equilibrios $(\pm 1, 0)$ simplemente argumentando que las trayectorias avanzan en sentido decreciente de la

función energía E convergiendo así a puntos de equilibrio (por ende, atractores) que corresponden a mínimos locales de E . Esta es, de hecho, una técnica clásica que volveremos a visitar en el siguiente capítulo.

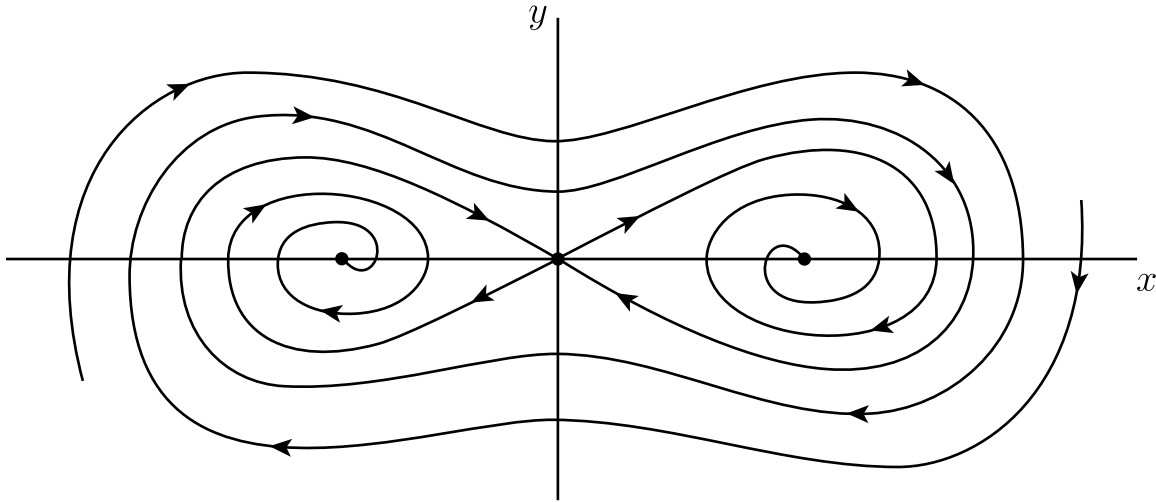


Figura 9.4: Retrato de fase del sistema masa-resorte amortiguado. El sistema ya no es conservativo, sino que disipativo.

9.1. Ejercicios

1. Encuentre una cantidad conservada para el sistema $\ddot{x} = a - e^x$, y bosqueje el retrato de fase para $a < 0$, $a = 0$, y $a > 0$.
2. Considere el sistema $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x - x^5$.
 - a) Encuentre todos los puntos de equilibrio y clasifique su estabilidad en el sistema linealizado.
 - b) Muestre que las trayectorias del sistema no-lineal están contenidas en la familia de curvas

$$x^2 + y^2 - \frac{x^6}{3} = C,$$

donde C es una constante.

- c) Bosqueje estas curvas y muestre que el sistema no-lineal y su linealización poseen retratos de fase cualitativamente equivalentes en el origen. ¿Por qué no habría sido posible deducir esta conclusión a partir del teorema de Hartman-Grobman?

3. Considere el sistema $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = -x^2$.

- a) Muestre que $E = x^2 + y^2$ es una cantidad conservada.
- b) Muestre que el origen es un punto de equilibrio, pero no es un equilibrio aislado.
- c) Dado que E tiene un mínimo local en el origen, uno podría pensar que este equilibrio es un centro. Pero esto sería un mal uso de la proposición 11: el resultado no se aplica aquí pues el origen no es un equilibrio aislado. Muestre que, de hecho, el origen no está rodeado de órbitas cerradas, y bosqueje el retrato de fase.

4. La ecuación relativista para la órbita de un planeta alrededor del sol es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \alpha + \epsilon u^2,$$

donde $u = 1/r$, y (r, θ) son las coordenadas polares del planeta en su plano de movimiento. El parámetro α es pequeño y se puede determinar explícitamente de la mecánica Newtoniana clásica; el término ϵu^2 es la corrección de Einstein. Aquí, ϵ es un parámetro positivo muy pequeño.

- a) Reescriba la ecuación como un sistema en el plano de fase (u, v) , donde $v = du/d\theta$.
- b) Encuentre todos los puntos de equilibrio del sistema.
- c) Muestre que uno de los puntos de equilibrio es un centro en la linealización del sistema. ¿Es un centro no-lineal? *Sugerencia:* Puede usar herramientas analíticas y computacionales.
- d) Muestre que el punto de equilibrio hallado en (c) corresponde a una órbita planetaria circular.

5. Considere un planeador volando a una velocidad v en un ángulo θ con la horizontal. Su movimiento está gobernado aproximadamente por las ecuaciones adimensionales

$$\begin{cases} \dot{v} = -\sin \theta - Dv^2 \\ v \dot{\theta} = -\cos \theta + v^2 \end{cases}$$

donde los términos trigonométricos representan los efectos de la gravedad y los términos v^2 representan los efectos aerodinámicos de arrastre (drag) y sustentación (lift).

- a) Suponga que no hay arrastre ($D = 0$). Muestre que $E(v, \theta) = v^3 - 3v \cos \theta$ es una cantidad conservada. Bosqueje el retrato de fase en este caso. Interprete sus resultados físicamente. ¿Cómo luce la trayectoria de vuelo del planeador?
- b) Investigue el caso de arrastre positivo ($D > 0$).

Capítulo 10

Teoría de estabilidad de Lyapunov

En sistemas no lineales autónomos de la forma $x' = f(x)$ tenemos una noción de estabilidad de puntos de equilibrio y órbitas periódicas. En particular, en el caso hiperbólico, contamos con el teorema de Hartman-Grobman para decidir sobre la estabilidad de puntos de equilibrio en base a su linealización. En palabras simples, vimos que una solución $x^*(t)$ (de equilibrio o periódica) de una EDO $x' = f(x)$ es *atractora* si cualquier otra solución cercana $x(t) = x^*(t) \pm \epsilon v(t)$, con $\epsilon > 0$ pequeño, se aproxima a $x^*(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. La función $v(t)$ puede entenderse como una “perturbación” de la solución $x^*(t)$. Si la perturbación $v(t) \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$, entonces $x(t) \rightarrow x^*(t)$ y $x^*(t)$ es estable. Esta noción puede generalizarse para trayectorias arbitrarias del sistema, incluso si la EDO es no autónoma.

Consideremos el sistema

$$x' = f(t, x), \quad (10.1)$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, y $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto.

Definición 31 Sea $\varphi(t)$ una órbita de (10.1) definida para $t \geq 0$. Decimos que $\varphi(t)$ es **estable** si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\psi(t)$ es otra solución de (10.1) con $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$, entonces $\psi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $|\psi(t) - \varphi(t)| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

Si además, existe δ_1 tal que $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$ implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0,$$

entonces φ se dice **asintóticamente estable**.

La idea de estas definiciones se ilustra en las figura 10.1. Si una solución φ es estable, entonces toda otra solución inicialmente vecina se mantiene siempre cerca de φ . Si además, las órbitas vecinas convergen en el largo plazo a nuestra solución φ , entonces decimos que φ es asintóticamente estable.

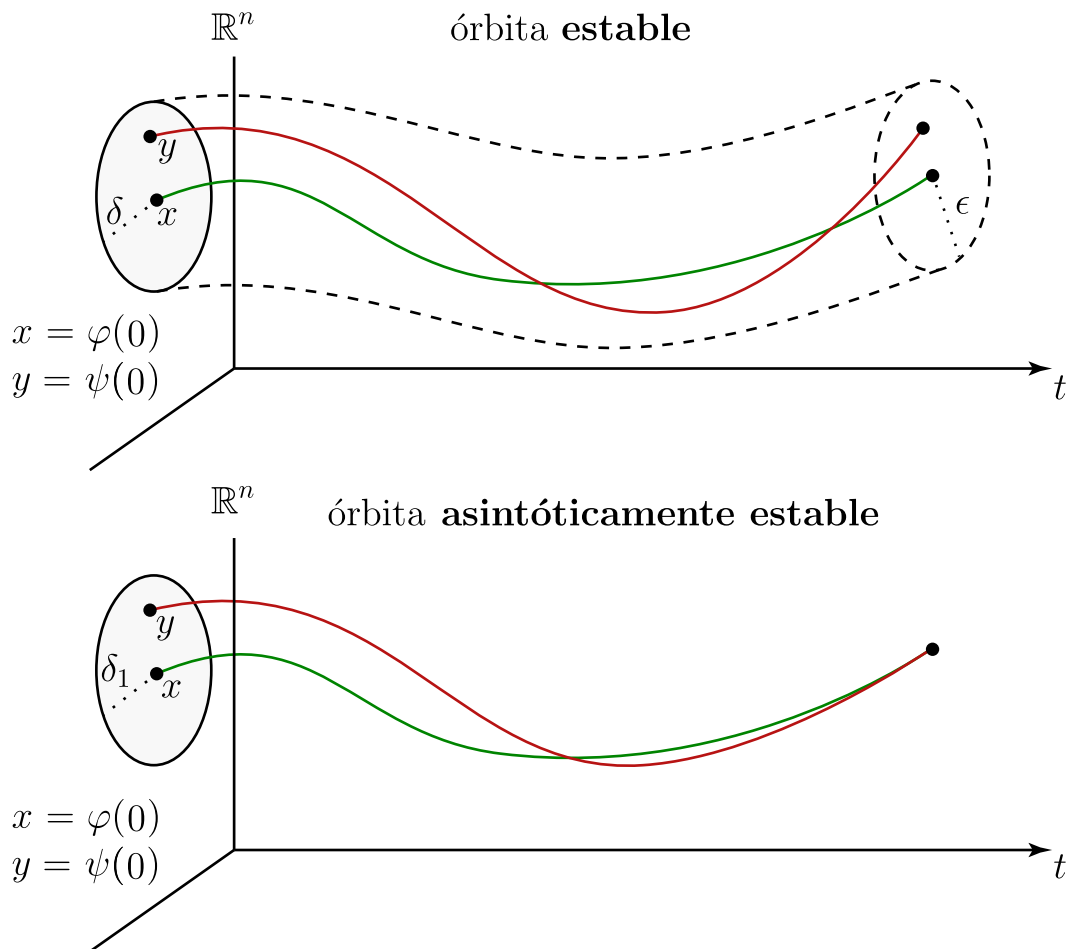


Figura 10.1: Ejemplo de una órbita estable (arriba) y una asintóticamente estable (abajo).

Definición 32 Un punto de equilibrio x_0 de un sistema autónomo $x' = f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, es **estable** si para toda vecindad U de x_0 , existe otra vecindad U_1 de x_0 tal que toda solución $\varphi(t)$ con $\varphi(0) \in U_1$ está definida en U para todo $t \geq 0$.

Si además $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$ (achicando U_1 si es necesario), entonces x_0 es **localmente asintóticamente estable**. Si además la convergencia de este límite

es válida para toda solución $\varphi(t)$ en Ω , x_0 se dice **globalmente asintóticamente estable**.

La figura 10.2 ilustra esquemáticamente las nociones de estabilidad y estabilidad asintótica de un punto de equilibrio.

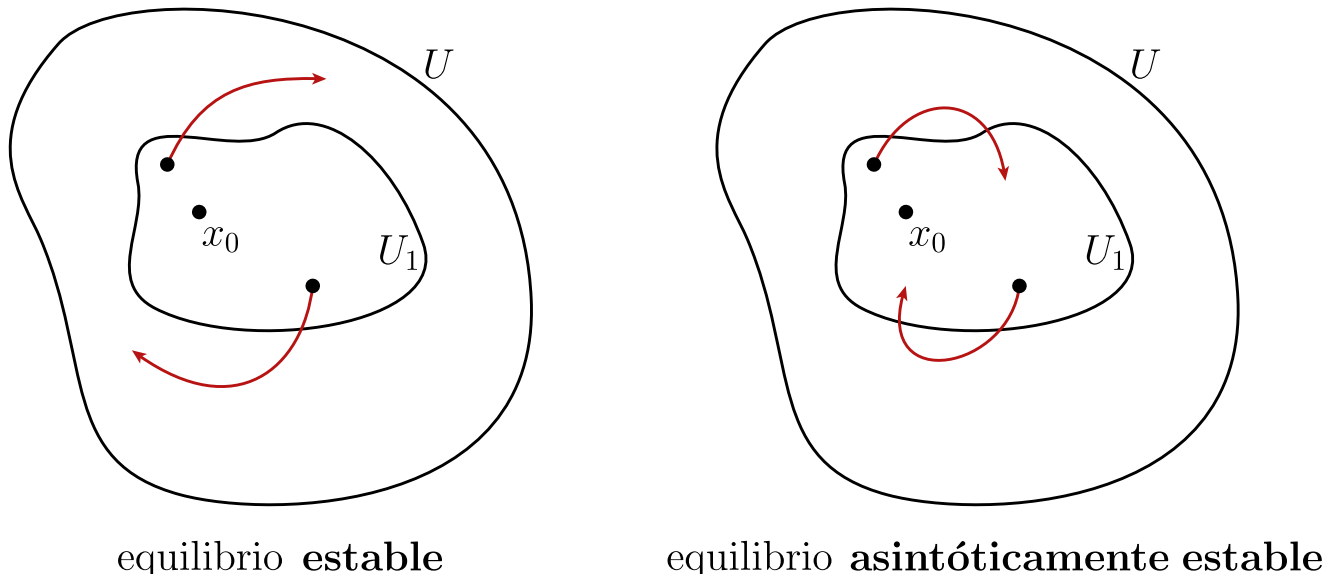


Figura 10.2: Ejemplos esquemáticos de un equilibrio estable (izquierda) y uno asintóticamente estable (derecha).

Ejemplo 56 Consideremos el sistema lineal $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ donde A tiene todos sus valores propios con parte real negativa. Entonces, por lo visto en el capítulo 2, el origen es un atractor y además existen constantes $K, \mu > 0$ tales que $|e^{At}| \leq Ke^{-\mu t}$, para todo $t \geq 0$. Luego, el origen de \mathbb{R}^n es un punto de equilibrio asintóticamente estable de $x' = Ax$. De hecho, es globalmente asintóticamente estable (¿Por qué?).

Ejemplo 57 Sea $x' = Ax$ un centro en \mathbb{R}^2 . Luego, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio estable pero no asintóticamente estable. En efecto, toda solución $\varphi(t)$ con $\varphi(0)$ en una vecindad U de $\mathbf{0}$, permanece en U para todo $t \geq 0$, pero $\varphi(t)$ no converge a $\mathbf{0}$ para $t \rightarrow \infty$.

10.1. El criterio de Lyapunov

Consideremos el sistema autónomo

$$\dot{u} = f(u), \quad (10.2)$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Denotemos por $\varphi_x(t)$ a la solución de (10.2) que pasa por $\varphi_x(0) = x \in \Omega$.

Sea $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Calculemos la tasa de cambio de V restringida a lo largo de la solución φ_x . Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d}{dt}V(\varphi_x(t)) = DV(\varphi_x(t)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi_x(t),$$

donde $DV(x)$ es la matriz jacobiana de V . Dado que $\frac{d}{dt}\varphi_x = f(\varphi_x)$, entonces

$$\left. \frac{d}{dt}V(\varphi_x(t)) \right|_{t=0} = \frac{d}{dt}V(x) = DV(x) \cdot f(x), \quad x = \varphi_x(0) \in \Omega. \quad (10.3)$$

De esta manera, interpretamos (10.3) como la tasa de cambio de V en el punto $x \in \Omega$ a lo largo de la solución φ_x .

Definición 33 *Sea x_0 un punto de equilibrio de (10.2). Una función de Lyapunov para x_0 es una función $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable definida en un abierto U de x_0 que satisface:*

- a) $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$, para todo $x \neq x_0$; es decir, V es definida positiva.
- b) $\dot{V} \leq 0$ en U .

*Una función de Lyapunov se dice **estricta** si además*

- c) $\dot{V} < 0$ en $U \setminus \{x_0\}$.

La figura 10.3 muestra una ilustración de una función de Lyapunov estricta. Los valores de V “descienden” hasta x_0 . De esta manera, las trayectorias de (10.2) se mueven monótonamente “bajando” por la gráfica de $V(x)$ hacia x_0 . Es la misma situación encontrada en el ejemplo al final del capítulo anterior (!).

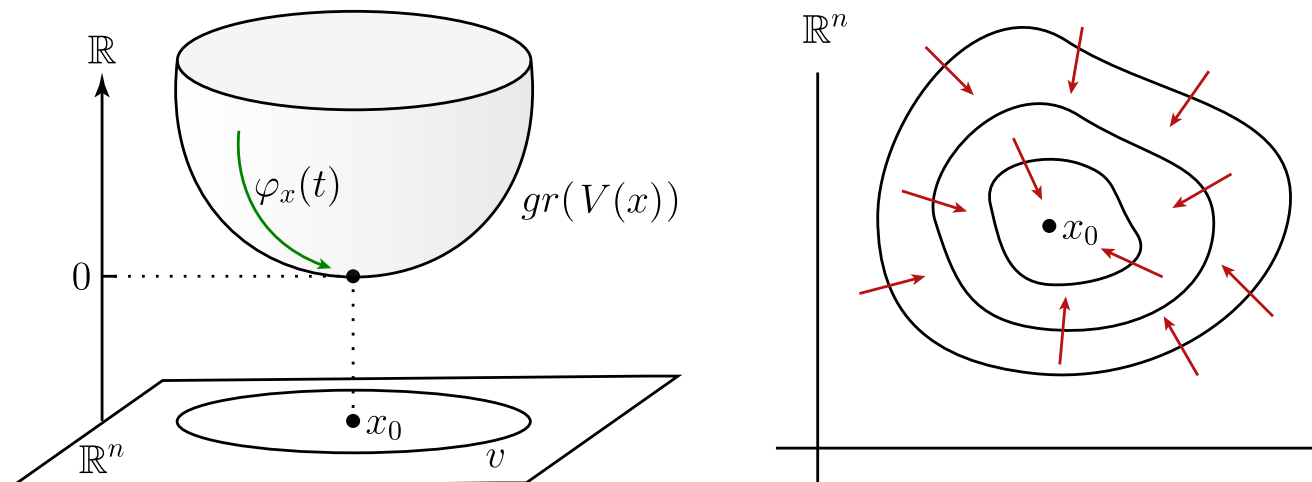


Figura 10.3: Las soluciones de (10.2) atraviesan las curvas de nivel de la función de Lyapunov estricta V en dirección “descendente”, es decir, disminuyendo los valores de V .

Teorema 26 *Sea x_0 un punto de equilibrio de (10.2). Si existe una función de Lyapunov para x_0 , entonces x_0 es estable. Si la función de Lyapunov es estricta, x_0 es asintóticamente estable.*

Notemos que este criterio es más general que el teorema de Hartman-Grobman, pues es aplicable, en principio, al caso en que el equilibrio posea un valor propio con parte real nula.

DEMOSTRACIÓN. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Lyapunov para x_0 . Dada la bola cerrada

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \delta\} \subset U,$$

el número $m = \min\{V(x) : |x - x_0| = \delta\}$ es positivo. Como V es continua, existe una vecindad abierta U_1 de x_0 , contenida en B , tal que $V(x) < m$ para todo $x \in U_1$. Además, como V decrece a lo largo de las órbitas de (10.2), tenemos que $\varphi_x(t)$ permanece en el interior de B para todo $t \geq 0$ y $x \in U_1$; ver figura 10.4. Por lo tanto x_0 es estable.

Ahora supongamos que $\dot{V} < 0$ en $U \setminus \{x_0\}$. Sean $x \in U_1$ y $\{t_n\}$ una sucesión creciente de reales positivos tales que $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in B$, cuando $t_n \rightarrow \infty$. Notemos que el límite de $\varphi_x(t_n)$ existe, pues B es compacto.

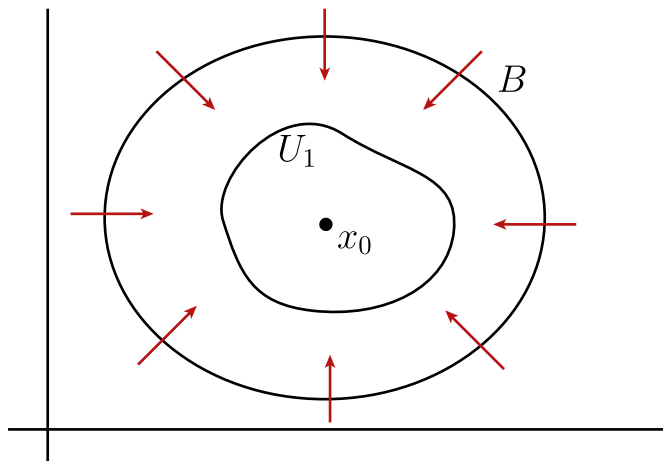


Figura 10.4: Como V decrece a lo largo de las órbitas, tenemos que $\varphi_x(t)$ permanece en el interior de B para todo $t \geq 0$ y $x \in U_1$.

Por continuidad, tenemos que $V(\varphi_x(t_n)) \rightarrow V(y)$ y $V(\varphi_x(t)) > V(y)$, para todo $t \geq 0$, debido al decrecimiento de V a lo largo de las órbitas.

Supongamos que $y \neq x_0$. Entonces, $V(\varphi_y(1)) < V(y)$ (de nuevo, por el decrecimiento de V a lo largo de las soluciones). Entonces, para todo z suficientemente próximo a y se tiene $V(\varphi_z(1)) < V(y)$, por continuidad. Luego, si n es suficientemente grande, $\varphi_x(t_n + 1)$ está en una vecindad suficientemente pequeña de y tal que $V(\varphi_x(t_n + 1)) < V(y)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y = x_0$. Como B es compacto, esto es suficiente para probar que x_0 es asintóticamente estable. ■

Ejemplo 58 Consideremos el sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = -x + 2x(x + y)^2, \\ \dot{y} = -y^3 + 2y^3(x + y)^2, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se puede ver que el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio aislado. La linealización de X en $(0, 0)$ viene dada por la matriz jacobiana

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual posee valores propios $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$. Por lo tanto, el origen no es un

equilibrio hiperbólico y no podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman para determinar su estabilidad local.

Consideremos la función $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, la cual cumple que $V(0, 0) = 0$ y $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Además,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= (2(x + y)^2 - 1)(x^2 + y^4).\end{aligned}$$

Entonces $\dot{V}(x, y) < 0$ en una vecindad de $(0, 0)$, excepto en $(0, 0)$. Luego, V es una función de Lyapunov estricta para X en $(0, 0)$. Por el teorema anterior, el origen es localmente asintóticamente estable.

Ejemplo 59 Consideremos el sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x^3, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De nuevo, el origen $(0, 0)$ es un punto de equilibrio aislado. La linealización de X en $(0, 0)$ viene dada por la matriz jacobiana

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual posee ambos valores propios $\lambda_{1,2} = 0$. Por lo tanto, nuevamente, el origen no es un equilibrio hiperbólico y no podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman para determinar su estabilidad local.

Sea la función $V(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$, la cual cumple que $V(0, 0) = 0$ y $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Además, $\dot{V}(x, y) \leq 0$ en una vecindad de $(0, 0)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= x^3(y - xy^2) + y(-x^3) \\ &= x^3y - x^4y^2 - x^3y \\ &= -x^4y^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, V es una función de Lyapunov para X en $(0, 0)$ (pero no estricta). Por el teorema anterior, el origen es estable.

Notemos que, aunque no podamos decir en este momento que $(0, 0)$ sea asintóticamente estable, esto no quiere decir necesariamente que no lo sea. En ese aspecto, la función de Lyapunov hallada simplemente no es concluyente.

Definición 34 Sea x_0 un equilibrio asintóticamente estable de (10.2). El conjunto

$$B(x_0) = \{x \in \Omega : \varphi_x(t) \rightarrow x_0, \text{ si } t \rightarrow \infty\}$$

se dice la **cuenca de atracción** de x_0 .

Notemos que $B(x_0)$ es un conjunto abierto en Ω . Cuando (10.2) representa un sistema físico, es importante determinar $B(x_0)$, pues este conjunto contiene todas las condiciones iniciales que “evolucionarán” hasta acercarse al estado de equilibrio x_0 .

Definición 35 Un conjunto $P \subset \Omega$ se dice **positivamente invariante** para (10.2) cuando para cada $x \in P$, la solución $\varphi_x(t)$ está definida y contenida en P para todo $t \geq 0$.

Teorema 27 Sean x_0 un equilibrio de (10.2) y $P \subset \Omega$ una vecindad de x_0 , compacta y positivamente invariante. Sea V una función C^1 tal que $\dot{V} < 0$ en $P \setminus \{x_0\}$. Entonces x_0 es asintóticamente estable y $P \subset B(x_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in P$ y considere el conjunto $\omega(x)$. Como P es cerrado y acotado, tenemos que $\omega(x) \subset P$ es no-vacío. Además, sabemos que $\omega(x)$ es invariante. Por otro lado, V es constante en $\omega(x)$. En efecto, como V es continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\varphi_x(t_n)) = V(a),$$

para toda sucesión $\{t_n\}$ de números positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = a$. Pero V decrece a lo largo de las soluciones $\varphi_x(t)$, de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\varphi_x(t_n)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi_x(t)).$$

De esta forma, $V(a) = V(b)$ para cualquier $a, b \in \omega(x)$, y V es constante en $\omega(x)$. Pero entonces $V \equiv 0$ en $\omega(x)$, de donde $\omega(x) = \{x_0\}$, lo que prueba el teorema. ■

Ejemplo 60 Consideremos la ecuación de Van der Pol multiplicada por -1 :

$$X_\delta : \begin{cases} \dot{x} &= x^3 - x - y, \\ \dot{y} &= x, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El origen $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio y la parte lineal del sistema en $(0, 0)$ tiene valores propios con parte real < 0 . Por lo tanto, $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

Consideremos la función $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Tenemos que $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^2(1 - x)$. Por lo tanto, $0 \neq |x| < 1$ implica $\dot{V}(x, y) < 0$. Sea $0 < r < 1$ y definamos $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Observemos que P es cerrado y $\dot{V} < 0$ en $P \setminus \{(0, 0)\}$. Probaremos que P es positivamente invariante. Denotemos $z = (x, y) \in P$. Entonces $V(z) \leq r/2$. Como V decrece a lo largo de las órbitas positivas en P , vemos que $V(\varphi_z(t)) \leq r/2$ para todo $t \geq 0$. Luego, $\varphi_z(t) \in P$ para todo $t \geq 0$. Como $0 < r < 1$ era arbitrario pero fijo, por el teorema anterior concluimos que la bola abierta centrada en el origen y de radio 1 está contenida en la cuenca de atracción de $(0, 0)$.

Definición 36 *Un punto de equilibrio de (10.2) se dice **inestable** cuando no es estable.*

Por ejemplo, si tenemos una EDO lineal $x' = Ax$ en \mathbb{R}^n donde la matriz A tiene un valor propio con parte real positiva, entonces el origen es un equilibrio inestable. El siguiente teorema de Cetaev nos entrega condiciones suficientes para determinar la inestabilidad de un equilibrio. Sin pérdida de generalidad, asumimos que el equilibrio en cuestión se ubica en el origen.

Teorema 28 *Consideremos el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$, con $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Sea U una vecindad suficientemente pequeña del origen. Suponga que existe una región abierta Ω y una función $V : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 , con las propiedades:*

1. *El origen es un punto en la frontera de Ω ;*
2. *$V \equiv 0$ en $\partial\Omega \cap U$;*
3. *$V > 0$ y $\dot{V} > 0$ en $\Omega \cap U$.*

Entonces el origen es un punto de equilibrio inestable.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN. La figura 10.5 ilustra una situación típica descrita por el teorema. De la propiedad 1, existen puntos en Ω (y por tanto, en U)

que están arbitrariamente cerca del origen. De 2 y 3, ninguna órbita que comienza en alguno de estos puntos en Ω puede cruzar la frontera de Ω en U pues V crece a lo largo de las soluciones de $\dot{x} = f(x)$ en $\Omega \cap U$. Luego, también debido a 3, estas órbitas deben abandonar la vecindad U a través de Ω . Por lo tanto, el origen es un punto de equilibrio inestable. ■

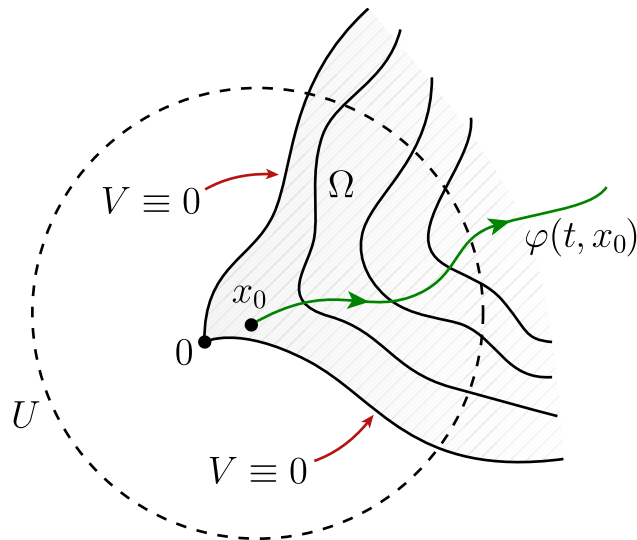


Figura 10.5: Idea esquemática de la demostración del teorema 28.

Ejemplo 61 Consideremos el sistema en \mathbb{R}^2

$$X : \begin{cases} \dot{x} = x + ax^2 + bxy + cy^2; \\ \dot{y} = dx^2 + exy + fy^2. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio. Sea $V(x, y) = x^2 - y^2$ y definamos $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < x\}$. Podemos chequear que $V > 0$ en Ω y $V \equiv 0$ en $\partial\Omega$. Además,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2(x^2 + ax^3 + (b-d)x^2y + (c-e)xy^2 - fy^3) \\ &= 2x^2 \left(1 + ax + (b-d)y + (c-e)\frac{y}{x} - f\frac{y^2}{x^2} \right), \end{aligned}$$

para $x \neq 0$.

En Ω , el término $ax + (b - d)y + (c - e)\frac{y}{x} - f\frac{y^2}{x^2} \rightarrow 0$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Luego, existe una bola U con centro en el origen tal que $\dot{V}(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \Omega \cap U$. Luego, $(0, 0)$ es inestable.

10.2. Ejercicios

1. Considere el campo de vectores

$$X : \begin{cases} \dot{x} &= -x + 4y, \\ \dot{y} &= -x - y^3. \end{cases}$$

Construya una función de Lyapunov de la forma $V(x, y) = x^2 + \beta y^2$ (donde β es un **parámetro a determinar**) y demuestre que el origen del campo X es un equilibrio asintóticamente estable.

2. Considere el movimiento de un péndulo que encuentra una resistencia del medio (roce) proporcional a la velocidad. El ángulo x que forma el péndulo con la vertical satisface la ecuación de segundo orden

$$x'' = -cx' - \sin x,$$

donde $c \geq 0$ es el coeficiente de roce. ¿Qué se puede decir del **comportamiento asintótico** del péndulo en el **largo plazo** en los casos $c = 0$ y $c > 0$? *Sugerencia:* Considere la energía del sistema $V(x, x') = \frac{1}{2}(x')^2 + 1 - \cos x$.

3. Usando la función de Liapunov $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$, obtenga condiciones suficientes sobre σ , ρ y β para la estabilidad global asintótica del origen en las ecuaciones de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy; \end{cases}$$

con $\sigma, \beta > 0$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Considere el sistema

$$\ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $a > 0$ y $xf(x) > 0, \forall x \neq 0$, demuestre que la solución nula de esta ecuación es asintóticamente estable. *Sugerencia:* Considere $V(x, y) = y^2 + 2 \int_0^x f(x)dx$.

5. Una partícula de masa m y vector posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ se mueve bajo la acción de un potencial $U = U(x, y, z)$, de manera que su ecuación de movimiento es

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U.$$

Si el potencial U posee un mínimo local en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, demuestre que la posición de reposo en el origen es estable en sentido Lyapunov. *Sugerencia:* Considere la energía del sistema dada por $E = U + \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$.

6. La siguiente ecuación modela un sistema masa-resorte modificado por un término de amortiguamiento no-lineal, el que da amortiguamiento positivo para pequeñas amplitudes:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + \lambda x = 0,$$

donde $\lambda > 0$ y $f(x, y) \geq 0$. Usando el método de Lyapunov, ¿Qué se puede decir de la estabilidad de la posición de reposo del sistema?

7. Demuestre que el sistema $\dot{x} = y - x^3, \dot{y} = -x - y^3$ no tiene órbitas cerradas. *Sugerencia:* Construya una función de Lyapunov $V(x, y) = ax^2 + by^2$ con a, b apropiados.
8. Demuestre que $\dot{x} = -x + 2y^3 - 2y^4, \dot{y} = -x - y + xy$ no tiene soluciones periódicas. *Sugerencia:* Escoja a, m y c tales que $V(x, y) = x^m + ay^n$ es una función de Lyapunov.
9. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y $\langle x, f(x) \rangle < 0$ para todo $x \neq 0$. Demuestre que $V(x) = |x|^2$ es una función de Lyapunov estricta para el sistema $x' = f(x)$ en $x = 0$.
10. Sea x_0 un equilibrio del sistema $x' = f(x)$, donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Lyapunov de x_0 . Suponga que no existe ninguna trayectoria de este sistema enteramente contenida en el conjunto $Z = \{x \in U : \dot{V}(x) = 0\}$, excepto x_0 . Demuestre que x_0 es asintóticamente estable.

11. Sea x_0 un equilibrio de $x' = f(x)$, donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea V una función definida en una vecindad de x_0 tal que $\dot{V}(x) > 0$ para todo $x \neq x_0$ y $V(x_0) = 0$. Si en toda vecindad de x_0 existe x tal que $V(x) > 0$, demuestre que x_0 es inestable.
12. Sea x_0 un equilibrio de $x' = f(x)$, donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Lyapunov estricta de x_0 . Demuestre que para cada $c > 0$ tal que $V^{-1}([0, c]) \subset \Omega$ es compacto, entonces $V^{-1}([0, c]) \subset B(x_0)$, donde $B(x_0)$ es la cuenca de atracción de x_0 .

Capítulo 11

Método de la variedad central para equilibrios parcialmente hiperbólicos

Considere un sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (11.1)$$

donde X es un campo de vectores de clase C^r , $r \geq 2$, y $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Asumamos que los valores propios de $A = DX(\mathbf{0})$ son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Sean las siguientes cantidades:

- n_+ = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.
- n_0 = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.
- n_- = Número de valores propios de A (contando multiplicidad) con $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Sea E^c el espacio propio (generalizado) de A asociado a los n_0 valores propios ubicados en el eje imaginario.

Definición 37 Decimos que X es **parcialmente hiperbólico** en $\mathbf{0}$ si $\dim E^c \neq 0$ y $\dim(E^s \oplus E^u) \neq 0$, o equivalentemente, si $n_0 > 0$ y $n_+ \times n_- \neq 0$. También es usual decir que el origen es un **equilibrio parcialmente hiperbólico** de X .

En el caso de un equilibrio parcialmente hiperbólico no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman para determinar la estabilidad del equilibrio. Sin

embargo, es posible probar la existencia de cierta variedad invariante (llamada variedad central), la cual domina la dinámica de (11.1) localmente cerca del equilibrio parcialmente hiperbólico: El retrato de fase local vendrá determinado por la restricción de X a la variedad central y por la dinámica a lo largo del resto de las $(n_+ + n_-)$ direcciones hiperbólicas complementarias.

Teorema 29 (*Teorema de la variedad central*) *Existe una variedad invariante, denotada por $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$, suave, n_0 -dimensional, definida localmente cerca de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, y tangente a E^c en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Más aún, existe una vecindad U de \mathbf{x}_0 tal que si $\varphi(t) \in U$ para todo $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$), entonces*

$$\varphi(t) \rightarrow W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) \quad \text{para } t \rightarrow \infty \text{ (resp. } t \rightarrow -\infty\text{)}.$$

Definición 38 *La variedad $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ del teorema anterior se llama **variedad central** del equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.*

OBSERVACIONES.

1. $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ se puede extender globalmente al resto del espacio de fase al dejar evolucionar los puntos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ bajo el flujo. La variedad central *global* resultante se denota por $W^c(\mathbf{0})$.
2. La segunda afirmación del teorema dice que una órbita que se queda cerca del equilibrio para $t \geq 0$ (o $t \leq 0$) tiende hacia $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ en la correspondiente dirección del tiempo. Si por ejemplo $n_+ = 0$ y todas las órbitas en U permanecen en U para siempre, entonces $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es *atrayente*. Es decir, la variedad central *captura* toda la dinámica del sistema completo en una vecindad de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

11.1. Propiedades de las variedades centrales

Exploremos con más detalle los resultados mencionados en las observaciones anteriores sobre el caso particular en que $n_+ = 0$. Supongamos que el campo de vectores (11.1) viene escrito en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \tag{11.2}$$

donde F representa los términos no lineales, i.e., $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $DF(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. La matriz P de vectores propios generalizados de A transforma A a su forma diagonal por bloques $J = P^{-1}AP$, donde

$$J = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Aquí, la matriz C tiene tamaño $n_0 \times n_0$ y todos sus valores propios tienen parte real nula; y la matriz S tiene tamaño $n_- \times n_-$ y todos sus valores propios tienen parte real negativa. Además, si A es diagonalizable, J es una matriz diagonal. Entonces definamos las nuevas coordenadas $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$ de manera que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= P^{-1}A\mathbf{x} + P^{-1}F(\mathbf{x}) = P^{-1}AP\mathbf{u} + P^{-1}F(P\mathbf{u}) \\ &= J\mathbf{u} + P^{-1}F(P\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Ahora definamos $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-}$. En términos de estos dos subconjuntos de variables, la EDO ahora toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, y), \\ \dot{y} = Sy + g(x, y), \end{cases} \quad (11.3)$$

donde $(f, g)^t = P^{-1} \circ F \circ P$. Las funciones f y g son de clase C^r , $r \geq 2$, y satisfacen $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) = 0$ y $Dg(0, 0) = 0$. En este marco, el espacio propio E^c corresponde al hiperplano $E^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : y = 0\}$, mientras que $E^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : x = 0\}$.

Según el teorema 29, una variedad invariante de (11.3) será una variedad central si puede ser representada localmente como sigue:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que las condiciones $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ implican que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es tangente a E^c en $(0, 0)$. Más aún, dado que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante, la dinámica de (11.3) restringida a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ está dada por el campo n_0 -dimensional

$$\dot{u} = Cu + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}. \quad (11.4)$$

Este es un campo definido sobre la gráfica de la función $y = h(x)$ y corresponde a la restricción de (11.3) a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

El siguiente teorema implica que la dinámica de (11.4) cerca de $u = 0$ determina la dinámica de (11.3) cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 30 (*Estabilidad*)

- i) Supongamos que $u = 0$ en el sistema (11.4) es estable (o asintóticamente estable) (resp. inestable). Entonces el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ es también estable (o asintóticamente estable) (resp. inestable).*
- ii) Supongamos que $u = 0$ en el sistema (11.4) es estable. Si $(x(t), y(t))$ es una solución de (11.3) con $(x(0), y(0))$ suficientemente cerca de $(0, 0)$, entonces existe una solución $u(t)$ de (11.4) tal que cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene:*

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + O(e^{-\gamma t}), \\ y(t) = h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}), \end{cases}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

La parte ii) del teorema anterior es equivalente a lo que se enuncia en el teorema 29: Para condiciones iniciales del sistema completo (11.3) suficientemente cerca del origen, las órbitas se acercan asintóticamente a una órbita de la variedad central. En este caso la variedad es “atrayente”. Como consecuencia, si existen otros puntos de equilibrio suficientemente cerca de $(0, 0)$ u órbitas periódicas cerca de $(0, 0)$, éstos deben estar contenidos en $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$.

¿Cómo obtenemos una representación de $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ (i.e., de la función h) para poder beneficiarnos de estos teoremas? Como $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante bajo (11.4), vamos a derivar una EDP que la función h debe satisfacer. Derivando la ecuación $y = h(x)$ con respecto a t obtenemos:

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}.$$

Sustituyendo $y = h(x)$ en (11.3):

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h(x)), \\ \dot{y} = Sh(x) + g(x, h(x)), \end{cases}$$

o bien,

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h(x)), \\ Dh(x)\dot{x} = Sh(x) + g(x, h(x)). \end{cases}$$

De aquí obtenemos:

$$Dh(x) (Cx + f(x, h(x))) = Sh(x) + g(x, h(x)).$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{N}(h(x)) := Dh(x) (Cx + f(x, h(x))) - Sh(x) - g(x, h(x)) = 0. \quad (11.5)$$

Esta es una EDP que $h(x)$ debe satisfacer para que su gráfica sea una variedad central. Sin embargo, probablemente es más difícil resolver esta EDP que nuestro problema original. Afortunadamente, el siguiente teorema nos da un método para calcular una solución aproximada de la EDP.

Teorema 31 (*Aproximación*) Sea $\phi : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-}$ una función C^1 con $\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = 0$, tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = O(|x|^q)$, cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces,

$$|h(x) - \phi(x)| = O(|x|^q),$$

cuando $x \rightarrow 0$.

Este teorema nos permite calcular la variedad central hasta cualquier grado deseado de precisión al resolver la ecuación (11.5) en una expansión polinomial hasta el mismo grado de precisión deseado.

Ejemplo 62 Considere el campo de vectores

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y - x^5, \\ \dot{y} = -y + x^2, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El origen es un equilibrio cuya matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Luego, $(0, 0)$ es parcialmente hiperbólico. En particular, no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman para determinar la dinámica en una vecindad del origen.

Notemos que el sistema ya tiene la forma (11.3). Sabemos que existe la variedad central $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$, la cual puede ser aproximada localmente como sigue:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que $E^c = \langle(1, 0)\rangle$. Supongamos que $h(x)$ tiene la forma

$$y = h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4),$$

donde a, b son coeficientes por determinar. Luego,

$$Dh(x) = h'(x) = 2ax + 3bx^2 + O(x^3).$$

Por otro lado, el sistema tiene la forma general

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Luego, al restringir esta ecuación a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = \frac{Q(x, h(x))}{P(x, h(x))},$$

si $P(x, y) \neq 0$. Luego, la ecuación (11.5) queda expresada como

$$\mathcal{N}(h(x)) = h'(x)P(x, h(x)) - Q(x, h(x)) = 0,$$

o equivalentemente,

$$(2ax + 3bx^2 + O(x^3))(ax^4 + bx^5 - x^5 + O(x^6)) + ax^2 + bx^3 - x^2 + O(x^4) = 0.$$

Se desprende que los coeficientes de cada potencia de x deben todos anularse. Así,

- Para x^2 : $a - 1 = 0$. Luego, $a = 1$.
- Para x^3 : $b = 0$.
- etc.

Por lo tanto,

$$h(x) = x^2 + O(x^4).$$

La restricción del campo de vectores a $W^c(\mathbf{0})$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u^2 h(u) - u^5 \\ &= u^2 (u^2 + O(u^4)) - u^5. \end{aligned}$$

Luego, la dinámica unidimensional sobre $W^c(\mathbf{0})$ está definida por:

$$\dot{u} = u^4 + O(u^5).$$

Para u suficientemente pequeño y $u \neq 0$, se tiene $\dot{u} > 0$. Luego, en \mathbb{R}^2 el retrato de fase en una vecindad del origen es como en la figura 11.1. El origen posee un sector atractor ($x < 0$) y dos sectores hiperbólicos ($x > 0$). Además, $(0, 0)$ es inestable en sentido Lyapunov.

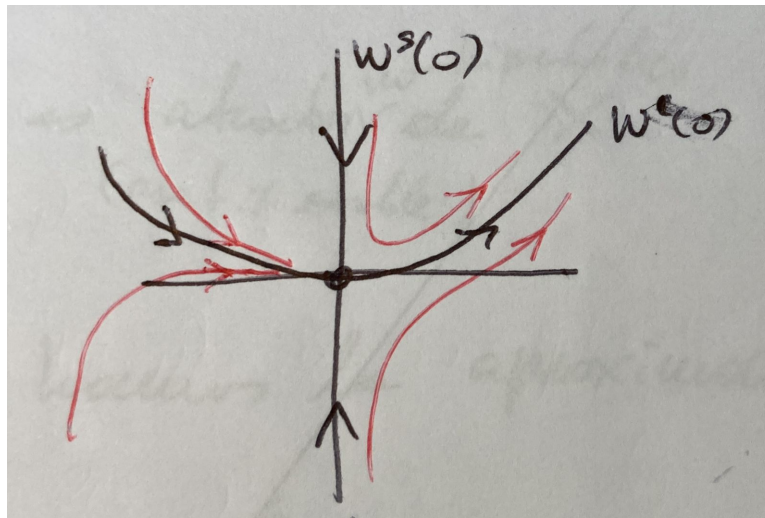


Figura 11.1: Retrato de fase cerca del origen en el ejemplo 62.

OBSERVACIONES.

1. El teorema 30 de estabilidad implica que las órbitas que convergen a $(0, 0)$ lo hacen tangentes a $W^c(\mathbf{0})$ tal como se ilustra en la figura 11.1.

2. En general, no es posible aproximar $W^c(\mathbf{0})$ mediante su linealización E^c . En el ejemplo anterior, supongamos que asumimos $h(x) \equiv 0$, i.e., $W^c(\mathbf{0}) = E^c$. Luego, la restricción del campo a $E^c = \{y = 0\}$ es $\dot{u} = -u^5$. Para este campo unidimensional, el origen es asintóticamente estable; luego, el sistema completo 2D también tendría en $(0, 0)$ un equilibrio atractor, lo cual es una conclusión errónea a la luz de los resultados del ejemplo.

3. $W^c(\mathbf{0})$ podría no ser única. El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

tiene un equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ con $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. El sistema posee una familia de variedades centrales —mostradas en la Figura 11.2:

$$W_\beta^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) : y = \psi_\beta(x)\},$$

donde

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} \beta \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{para } x < 0, \\ 0 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

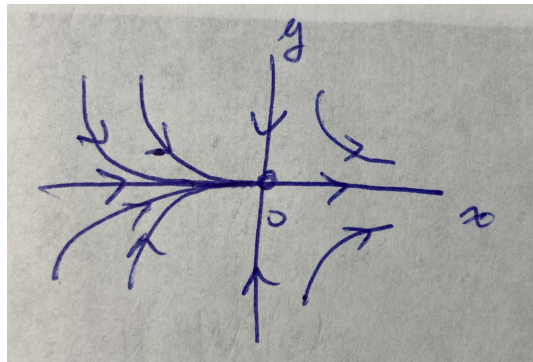


Figura 11.2: En general la variedad central no es única.

4. Una variedad central W^c tiene el mismo grado de suavidad *finita* que el campo (11.1) (si $X \in C^k$ con k finito, W^c es también una C^k -variedad) en alguna vecindad U del equilibrio. Sin embargo, a medida que $k \rightarrow \infty$ la vecindad U puede achicarse, resultando en la no existencia de una variedad W^c de clase C^∞ para algunos sistemas C^∞ .

5. El método de aproximación de $W^c(\mathbf{0})$ mediante series de potencias también se puede ocupar para hallar aproximaciones locales de las variedades estable W^s e inestable W^u de un equilibrio. Por ejemplo, para el sistema (11.3), la variedad estable local del origen queda expresada como:

$$W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} : x = h(y), |y| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Es decir, $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0})$ es localmente la gráfica de una función sobre E^s . De esta manera, podemos buscar h de la forma: $h(y) = ay^2 + by^3 + cy^4 + O(y^5)$, donde los coeficientes a, b, c son tales que: $\dot{x} = Dh(y)\dot{y}$, es decir,

$$Dh(y)(Sy + g(h(y), y)) = Ch(y) + g(h(y), y).$$

Ejemplo 63 Consideremos el sistema general

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que el origen es un equilibrio no hiperbólico cuya matriz jacobiana posee los valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ con vectores propios asociados $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 0)$. Luego, existe una variedad central tangente a la recta $E^c = \{(x, y) \mid y = x\}$ en $(0, 0)$ como en la Figura 11.3.

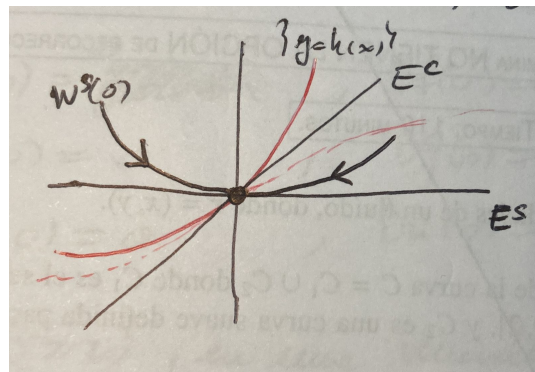


Figura 11.3:

Por definición:

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y) \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, h'(0) = 1\},$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que la condición $h'(0) = 1$ asegura que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es tangente a E^c en el origen. Busquemos $h(x)$ de la forma

$$y = h(x) = ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4),$$

donde a, b, c son coeficientes por determinar. Notemos que $h(0) = 0$ se satisface trivialmente, mientras que $h'(0) = 1$ si y solo si $a = 1$. Luego procedemos igual que en los ejemplos anteriores para hallar los coeficientes b, c . Es decir, planteamos

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = \frac{Q(x, h(x))}{P(x, h(x))},$$

de donde obtenemos que

$$(1 + 2bx + 3cx^2 + O(x^3))P(x, h(x)) - Q(x, h(x)) = 0.$$

Igualando los coeficientes de cada potencia a cero encontramos los valores de b, c . Posteriormente, podemos analizar la restricción del sistema a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ y determinamos la (in)estabilidad de $x = 0$.

11.2. Inclusión de direcciones inestables

Supongamos que tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, y, z), \\ \dot{y} = Sy + g(x, y, z), \\ \dot{z} = Uz + h(x, y, z), \end{cases} \quad (11.6)$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$, donde $f(0, 0, 0) = 0$, $g(0, 0, 0) = 0$, $h(0, 0, 0) = 0$, $Df(0, 0, 0) = 0$, $Dg(0, 0, 0) = 0$ y $Dh(0, 0, 0) = 0$, y $f, g, h \in C^r$, $r \geq 2$, en una vecindad del origen. Aquí, la matriz C tiene tamaño $n_0 \times n_0$ y todos sus valores propios tienen parte real nula; la matriz S tiene tamaño $n_- \times n_-$ y todos sus valores propios tienen parte real negativa; y la matriz U tiene tamaño $n_+ \times n_+$ y todos sus valores propios tienen parte real positiva. Luego, el origen posee una variedad central $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ n_0 -dimensional, una variedad estable $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{0})$ n_- -dimensional y una variedad inestable $W_{\text{loc}}^u(\mathbf{0})$ n_+ -dimensional.

La variedad central puede representarse localmente como el gráfico de una función suave

$$W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+} : y = h_1(x), z = h_2(x), |x| < \delta, h_i(0) = 0, Dh_i(0) = 0, i = 1, 2\},$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño. El campo (11.6) restringido a $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ queda de la forma

$$\dot{u} = Cu + f(u, h_1(u), h_2(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0}.$$

Dado que $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ es invariante bajo (11.6) obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} = Dh_1(x)\dot{x} = Sh_1(x) + g(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{z} = Dh_2(x)\dot{x} = Uh_2(x) + h(x, h_1(x), h_2(x)), \end{cases}$$

lo cual nos lleva a las siguientes ecuaciones para h_1 y h_2 :

$$\begin{cases} Dh_1(x)(Cx + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Sh_1(x) - g(x, h_1(x), h_2(x)) = 0, \\ Dh_2(x)(Cx + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Uh_2(x) - h(x, h_1(x), h_2(x)) = 0. \end{cases}$$

Al igual que en el caso $n_+ = 0$, podemos resolver este sistema de EDPs en forma aproximada a través de expansiones en series de potencias.

Teorema 32 (*Principio de reducción*) *El sistema (11.6) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} = Sy, \\ \dot{z} = Uz. \end{cases} \quad (11.7)$$

Si hay más de una variedad central, entonces todos los sistemas resultantes (11.7) con diferentes (h_1, h_2) son localmente equivalentes.

Notemos que las ecuaciones en (11.7) están desacopladas. La primera ecuación es la restricción de (11.6) a su variedad central. Luego, la dinámica del sistema estructuralmente inestable (11.6) queda determinada por esta restricción pues las ecuaciones para (y, z) en (11.7) son lineales y tienen soluciones exponencialmente

crecientes/decrecientes. En otras palabras, gracias al Principio de Reducción, el problema de analizar (11.6) cerca del origen se *reduce* de dimensión pues depende esencialmente solo del primer subsistema en (11.7), el cual es de menor dimensión (n_0 -dimensional, de hecho) que el sistema completo.

Las últimas componentes de (11.7) se pueden reemplazar por la ecuación de una *silla estándar* obteniendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + f(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases}$$

donde $(y, z) \in \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$.

11.3. Ejercicios

1. Estudie la dinámica cerca del origen para el siguiente campo de vectores. Calcule las variedades invariantes y describa la dinámica en la variedad central. Discuta la estabilidad o inestabilidad del origen. Dibuje el retrato de fase.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y, \\ \dot{y} = -x - y - x^4, \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Determine los conjuntos invariantes y el retrato de fase cerca del origen en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = -y^4, \end{cases}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Determine los conjuntos invariantes y el retrato de fase **cerca del origen** en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2, \\ \dot{y} = -y^3 + x^2, \end{cases}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Capítulo 12

Técnica del blow-up

Al toparnos con un campo de vectores X cuya linealización en un equilibrio p es hiperbólica, podemos usar el Teorema de Hartman-Grobman para determinar localmente el retrato de fase. En el caso en que $DX(p)$ tiene algún valor propio (pero no todos) con parte real nula, decimos que el campo es parcialmente hiperbólico en p , y tenemos el teorema de la variedad central para determinar el retrato de fase local. Sin embargo, también se da el caso extremo en que todos los valores propios tengan parte real igual a cero. Examinaremos este caso en \mathbb{R}^2 .

Definición 39 *Un equilibrio p de un campo X definido en \mathbb{R}^2 es no-hiperbólico si los dos valores propios de $DX(p)$ tienen parte real igual a cero. Es decir, $W^c(p) = \mathbb{R}^2$.*

La definición anterior implica la existencia de restricciones algebraicas que deben satisfacer los elementos de $DX(p)$. En el caso planar tenemos tres posibilidades para un equilibrio no-hiperbólico en p :

(i) $DX(p)$ tiene valores propios imaginarios puros, es decir,

$$\operatorname{tr}DX(p) = 0, \quad \det DX(p) > 0;$$

(ii) Ambos valores propios son cero, pero $DX(p)$ no es la matriz nula, es decir,

$$\operatorname{tr}DX(p) = \det DX(p) = 0, \quad DX(p) \neq \mathbf{0};$$

(iii) $DX(p) = \mathbf{0}$.

A este tipo de puntos también podríamos añadir los equilibrios parcialmente hiperbólicos en \mathbb{R}^2 :

(iv) $DX(p)$ tiene valores propios reales y uno de ellos es cero, es decir,

$$\det DX(p) = 0, \quad \operatorname{tr} DX(p) \neq 0.$$

Las igualdades (resp. desigualdades) anteriores son llamadas *condiciones de degeneración* (resp. *no-degeneración*). De hecho, con frecuencia a los equilibrios no-hiperbólicos se les llama *singularidades degeneradas*. El número de condiciones de degeneración que una singularidad satisface indica su *codimensión*; ver [6, 7]. Luego, si $\det DX(p) = 0$ o $\operatorname{tr} DX(p) = 0$ (casos (i) o (iv)) es la única condición de degeneración que satisface la singularidad, entonces X en p tiene codimensión uno. Sin embargo, una singularidad que satisface (ii) o (iii) posee, al menos, codimensión dos.

En este capítulo entregamos una herramienta para estudiar la dinámica de un equilibrio completamente no hiperbólico en un sistema de EDOs en el plano. Este método se basa en realizar cambios de coordenadas llamados *blowups*.

Las técnicas de blowup involucran cambios de coordenadas que expanden un equilibrio no-hiperbólico a toda una curva en la cual se encuentran una cantidad de otros equilibrios. El tipo topológico de estos equilibrios se puede investigar mediante el teorema de Hartman-Grobman o el teorema de la variedad central, según corresponda. Los cambios de coordenadas usados son, por supuesto, singulares en el punto de equilibrio, pues mapean una curva en un punto; fuera de este punto, son difeomorfismos.

12.1. Blow-up polar

El primer paso es posicionar el equilibrio que queremos estudiar en el origen. Sea 0 un equilibrio de un campo de vectores X de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 . Consideremos la transformación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (\theta, r) &\mapsto \phi(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned} \tag{12.1}$$

Podemos definir un campo \tilde{X} de clase C^∞ en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ mediante la relación usual $D\phi \circ \tilde{X} = X \circ \phi$. Este campo es llamado el *pull back* de X por ϕ . No es nada más que X escrito en coordenadas polares. La transformación ϕ lleva biyectivamente el semicilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+$ al plano excepto al origen $(x, y) = (0, 0)$; ver figura 12.1. Luego, ϕ es un difeomorfismo C^∞ en

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

En particular, ϕ es un cambio de coordenadas C^∞ en $\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$ pero no en $\{r = 0\}$: ϕ manda $\{r = 0\}$ a $(0, 0)$ y, como tal, la transformación inversa ϕ^{-1} “expande” (*blows up*, en inglés) el origen en \mathbb{R}^2 al círculo $\{r = 0\}$ en el cilindro. Por lo tanto, para estudiar el retrato de fase de X en una vecindad V de $(0, 0)$ basta estudiar el retrato de fase de \tilde{X} en la vecindad $\phi^{-1}(V)$ del círculo $\{r = 0\}$. A priori esto podría parecer un problema más difícil que el original, pero como veremos, esta construcción es muy útil.

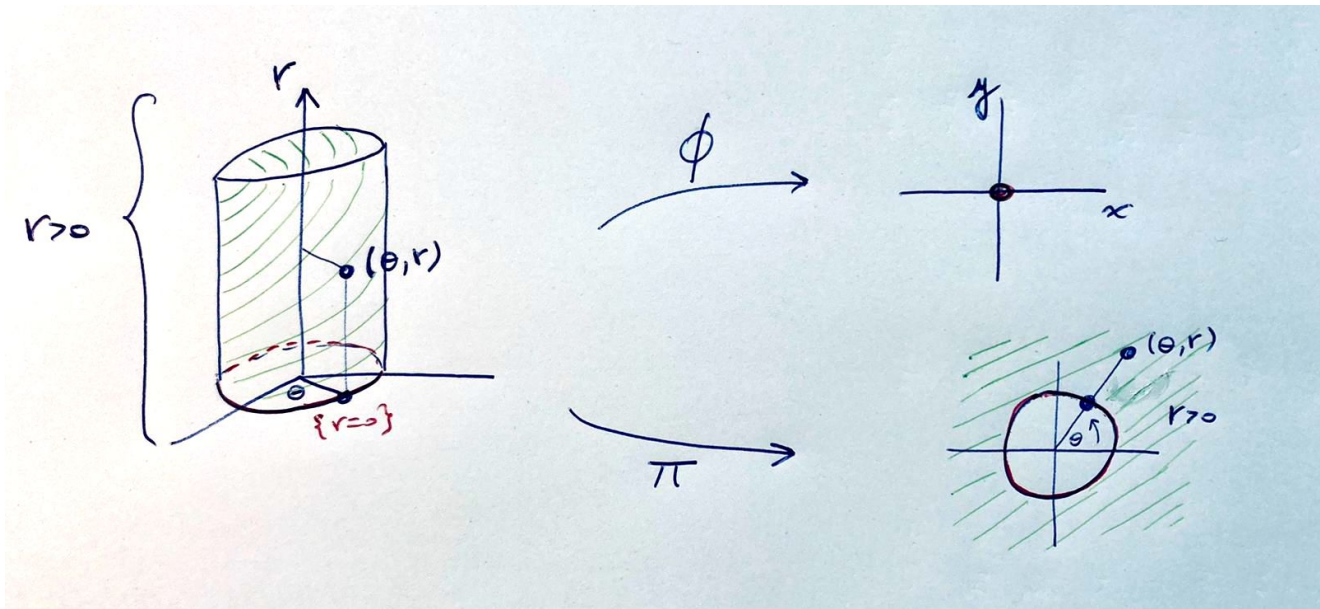


Figura 12.1: Blowup polar ϕ del plano al cilindro y su proyección π de vuelta al plano.

Aunque el cilindro es una buena superficie para obtener una visión global de \tilde{X} y su retrato de fase, muchas veces es más conveniente “abrir” el cilindro mediante una proyección al plano. En la figura 12.1, π proyecta $\{r = 0\}$ en el círculo unitario

en el plano, y el semicilindro $\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$ va a parar fuera del círculo $\{r = 0\}$ (análogamente, el semicilindro $\mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$ es proyectado al interior del círculo $\{r = 0\}$). En particular, la vecindad $\phi^{-1}(V)$ es llevada a un anillo cuya frontera interior es el círculo $\{r = 0\}$.

El campo \tilde{X} definido en $\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$ mediante ϕ^{-1} es

$$\tilde{X}(r, \theta) = (D\phi(r, \theta))^{-1} \cdot X(x(r, \theta), y(r, \theta)),$$

donde $(x(r, \theta), y(r, \theta)) = \phi(r, \theta)$. O bien, si el campo X tiene componentes $X(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, por la regla de la cadena en la relación $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ -\frac{\sin \theta}{r} f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\cos \theta}{r} f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{pmatrix}, \quad (12.2) \end{aligned}$$

para $r > 0$. Sea \tilde{X} el campo de vectores definido por (12.2). En la práctica, también podemos cambiar a coordenadas polares y obtener \tilde{X} al derivar en las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \arctan(y/x)$ en la forma:

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} = xf_1(x, y) + yf_2(x, y), \\ r\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} = xf_2(x, y) - yf_1(x, y), \end{aligned}$$

y luego sustituir x e y usando las identidades $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. El campo (12.2) en las nuevas coordenadas tiene la forma general

$$\tilde{X} : \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{k+1} R(r, \theta) \\ r^k \Theta(r, \theta) \end{pmatrix}, \quad r > 0,$$

para algún $k \geq 1$. Cambiando el tiempo $t \mapsto t/r^k$, obtenemos un campo vectorial C^∞ -equivalente:

$$\bar{X} : \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r R(r, \theta) \\ \Theta(r, \theta) \end{pmatrix}, \quad r > 0,$$

donde es posible estudiar las separatrices en una vecindad de la curva $\{r = 0\}$.

Note que \bar{X} está definido globalmente excepto en la curva $\{r = 0\}$. Esto es esperable pues un cambio a coordenadas polares en un sistema de ecuaciones diferenciales planares introduce una singularidad en la curva $\{r = 0\}$. La siguiente proposición afirma que si la ecuación diferencial posee un punto de equilibrio en el origen, entonces esta singularidad es removible (ver [6]), es decir, es posible redefinir el campo de manera que el campo resultante *desingularizado* sea regular en el origen. Concretamente, el campo de vectores desingularizado en coordenadas polares es una *extensión* de \bar{X} a la curva singular $\{r = 0\}$, i.e., el campo desingularizado es equivalente a \bar{X} para $\{r > 0\}$ y está bien definido en $\{r = 0\}$.

Proposición 12 *Si $\dot{u} = f(u)$ es una ecuación diferencial en el plano y $f(0) = 0$, entonces la correspondiente ecuación diferencial en coordenadas polares posee una singularidad removible. Además, si f es de clase C^r , entonces el campo de vectores desingularizado en coordenadas polares es de clase C^{r-1} .*

DEMOSTRACIÓN. Aplique el teorema de Taylor a las expansiones de Taylor de las componentes del campo de vectores f en el origen. ■

Ejemplo 64 Considere el sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2xy, \\ \dot{y} = y^2 - 2xy. \end{cases}$$

Este sistema tiene un único punto de equilibrio en el origen y es no-hiperbólico (de hecho, la matriz jacobiana asociada es la matriz nula). Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman para hallar el retrato de fase local cerca del origen.

Consideremos la transformación a coordenadas polares (12.1). Ocupando (12.2), el nuevo campo en coordenadas polares viene dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta (r \cos \theta - 2r \sin \theta) \\ r \sin \theta (r \sin \theta - 2r \cos \theta) \end{pmatrix},$$

para $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, o en forma equivalente,

$$\tilde{X} : \begin{cases} \dot{x} = r \cos^2 \theta (r \cos \theta - 2r \sin \theta) + r \sin^2 \theta (r \sin \theta - 2r \cos \theta), \\ \dot{y} = -\sin \theta \cos \theta (r \cos \theta - 2r \sin \theta) + \sin \theta \cos \theta (r \sin \theta - 2r \cos \theta). \end{cases}$$

Finalmente factorizando ambas componentes por r :

$$\tilde{X} : \begin{cases} \dot{r} = r^2 (\cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta), \\ \dot{\theta} = r (3 \sin^2 \theta \cos \theta - 3 \sin \theta \cos^2 \theta). \end{cases}$$

Dado que $r > 0$, definimos el nuevo campo \bar{X} como

$$\bar{X} = \frac{1}{r} \tilde{X}, \quad r > 0.$$

Luego,

$$\bar{X} : \begin{cases} \dot{r} = r (\cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta), \\ \dot{\theta} = 3 \sin^2 \theta \cos \theta - 3 \sin \theta \cos^2 \theta. \end{cases}$$

Ahora podemos estudiar el retrato de fase de \bar{X} en vecindad del círculo $r = 0$. Más aún, notemos que podemos extender continuamente el campo \bar{X} al círculo $r = 0$. Los puntos de equilibrio en $r = 0$ satisfacen

$$3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) = 0.$$

Luego, los equilibrios $(0, \theta^*)$ de \bar{X} en $r = 0$ ocurren en

$$\theta^* = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

La matriz jacobiana en cada uno de estos puntos $(0, \theta^*)$ tiene la forma

$$D\bar{X}(0, \theta^*) = \begin{pmatrix} \lambda_r(\theta^*) & 0 \\ 0 & \lambda_\theta(\theta^*) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_r(\theta) &= \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta, \\ \lambda_\theta(\theta) &= -3 \sin^3(\theta) - 3 \cos^3(\theta) + 6 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + 6 \sin^2(\theta) \cos(\theta).\end{aligned}$$

Notemos que $\lambda_r(\theta^*)$ determina la tasa de expansión o contracción en la dirección radial en el punto $(0, \theta^*)$, mientras que $\lambda_\theta(\theta^*)$ nos entrega la dinámica tangencial al círculo $r = 0$.

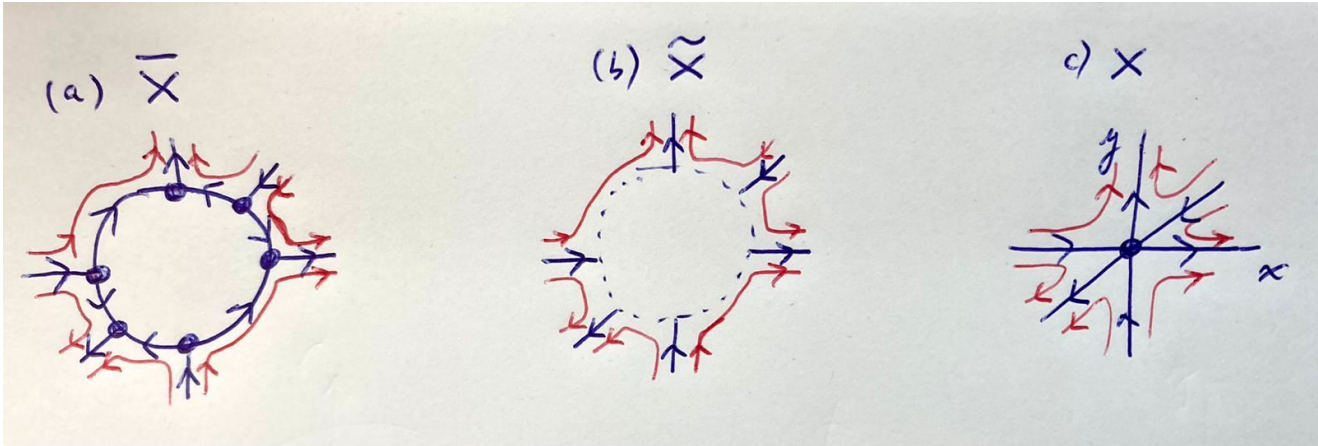


Figura 12.2: Retratos de fase de los campos \bar{X} (a), \tilde{X} (b) y X (c).

Se puede comprobar que los seis equilibrios son hiperbólicos. Por ejemplo, $\lambda_r(0) = 1$ y $\lambda_\theta(0) = -3$. Luego, el equilibrio $(0, 0)$ en $r = 0$ es un punto silla de \bar{X} , y posee una componente repulsora en dirección radial. La figura 12.2(a) muestra el retrato de fase resultante luego de analizar los seis equilibrios. Luego, cualitativamente, el retrato de fase del campo $\tilde{X} = r\bar{X}$ es como en la figura 12.2(b). (Notemos que las órbitas de \tilde{X} y \bar{X} son equivalentes para $r > 0$.) Por último, dado que $\phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es un difeomorfismo, el retrato de fase de X cerca del origen se obtiene al “encoger” (*blow down*) el círculo $r = 0$ colapsándolo a un punto como en la figura 12.2(c).

COMENTARIO: En el ejemplo anterior, si los puntos de equilibrio en $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ de \tilde{X} no son hiperbólicos (ni parcialmente hiperbólicos), se deben aplicar sucesivos blowups hasta alcanzar el grado (al menos) de parcialmente hiperbólicos; ver figura 12.3. Si después de un número finito de tales blowups todos los equilibrios

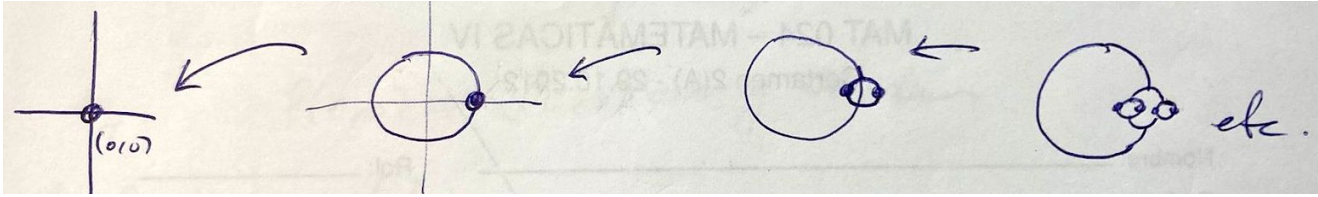


Figura 12.3: Sucesivos blowups sobre singularidades no hiperbólicas.

del campo resultante son hiperbólicos, entonces podemos determinar el retrato de fase local del campo de vectores original en el equilibrio no-hiperbólico original. En tal caso, se dice que la singularidad está *finitamente determinada*.

12.2. Blow-up radial

En ocasiones puede ser útil “abrir” una singularidad a una recta que pase por el equilibrio no-hiperbólico en lugar de un círculo. En estos casos uno habla de blowups radiales o direccionales.

Definición 40 (*Blow up horizontal*) Sea X un campo de clase C^r , $r \geq 1$ en \mathbb{R}^2 , tal que $X(0) = 0$. Sea la transformación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(u, v) = (u, uv).$$

Entonces existe un campo \tilde{X} con

$$\tilde{X} = (D\varphi)^{-1} \circ X \circ \varphi.$$

En particular, φ es un difeomorfismo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = 0\}$.

La figura 12.4 muestra la idea de un blowup horizontal. El origen $(x, y) = (0, 0)$ se abre al eje $u = 0$. Una recta $y = mx$ con $m > 0$ (resp. $m < 0$) es mapeada a una recta horizontal $v = m$ en el semiplano superior (resp. inferior) del espacio (u, v) . Este blowup horizontal (o en la dirección de x) nos entrega información tangencial al eje horizontal x ; sin embargo, no nos entrega información sobre comportamientos tangenciales al eje vertical por el origen.

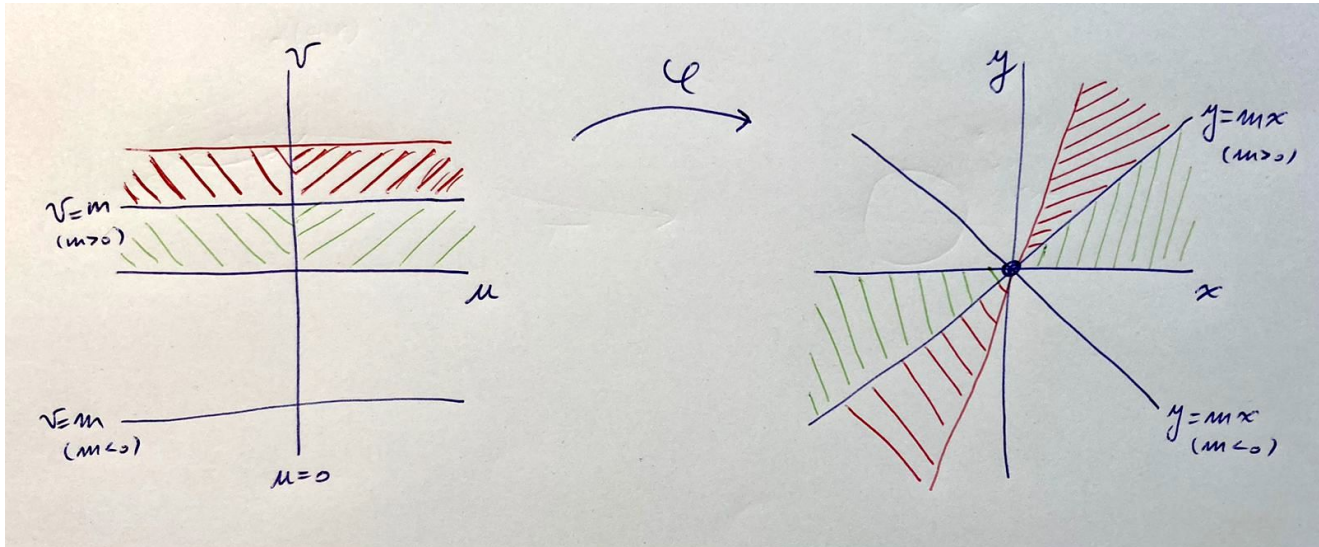


Figura 12.4: El blowup horizontal (o en la dirección de x) nos entrega información tangencial al eje horizontal x ; el origen se abre al eje vertical $u = 0$.

Ejemplo 65 Sea el campo

$$X : \begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

como en la definición anterior y tal que $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$. Consideremos el blowup horizontal

$$\varphi(u, v) = (u, uv) = (x, y).$$

Por la regla de la cadena obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(u, uv) \\ Q(u, uv) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el nuevo campo \tilde{X} tiene la forma general $\tilde{X} = (D\varphi)^{-1} \circ X \circ \varphi$, esto es,

$$\tilde{X} : \begin{cases} \dot{u} = P(u, uv), \\ \dot{v} = \frac{1}{u} (-vP(u, uv) + Q(u, uv)), \end{cases}$$

para $u \neq 0$.

Definición 41 (*Blow up vertical*) Sea X un campo de clase C^r , $r \geq 1$ en \mathbb{R}^2 , tal que $X(0) = 0$. Sea la transformación

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(u, v) = (uv, v).$$

Entonces existe un campo \tilde{X} con

$$\tilde{X} = (D\phi)^{-1} \circ X \circ \phi.$$

En particular, ϕ es un difeomorfismo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{v = 0\}$.

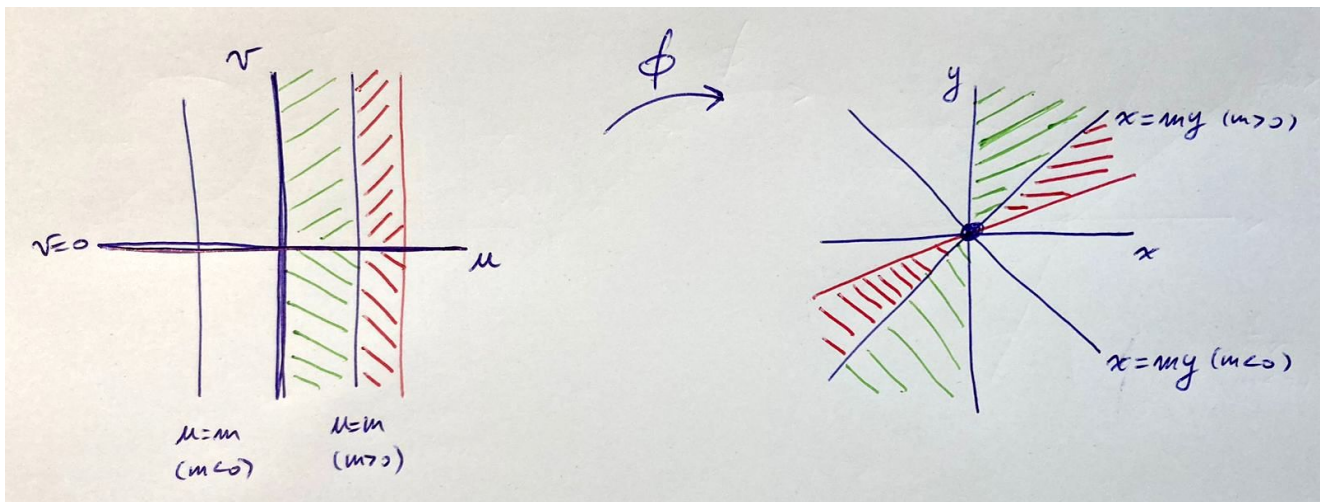


Figura 12.5: El blowup vertical (o en la dirección de y) nos entrega información tangencial al eje vertical y ; el origen se abre al eje horizontal $v = 0$.

La figura 12.5 muestra la idea de un blowup vertical. Todo el eje $v = 0$ va al origen $(x, y) = (0, 0)$. Una recta $y = mx$ con $m > 0$ (resp. $m < 0$) es mapeada a una recta vertical $u = m$ en el semiplano derecho (resp. izquierdo) del espacio (u, v) . Este blowup vertical (o en la dirección de y) nos entrega información tangencial al eje vertical y ; sin embargo, no nos entrega información sobre comportamientos tangenciales al eje horizontal por el origen.

Ejemplo 66 Sea el campo

$$X : \begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

como en la definición anterior y tal que $P(0,0) = Q(0,0) = 0$. Consideremos el blowup vertical

$$\phi(u, v) = (uv, v) = (x, y).$$

Por la regla de la cadena obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(uv, v) \\ Q(uv, v) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el nuevo campo \tilde{X} tiene la forma general $\tilde{X} = (D\phi)^{-1} \circ X \circ \phi$, esto es,

$$\tilde{X} : \begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{v} (P(uv, v) - uQ(uv, v)), \\ \dot{v} = Q(uv, v), \end{cases}$$

para $v \neq 0$.

Ejemplo 67 Sea el campo

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y^3, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$$

Luego, $X(0,0) = (0,0)$. La parte lineal del campo en el origen es

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con dos valores propios nulos. Por lo tanto, el origen es no-hiperbólico.

Consideremos el blowup vertical $\phi(u, v) = (uv, v) = (x, y)$. Luego, a partir del ejemplo anterior tomando $P(x, y) = y^3$ y $Q(x, y) = x + y^2$, se obtiene el campo

$$\tilde{X} : \begin{cases} \dot{u} = v^2 - u^2 - uv, \\ \dot{v} = uv + v^2, \end{cases}$$

cuando $v \neq 0$. El campo \tilde{X} se puede extender de forma suave al eje $v = 0$. Dado que el origen de X se abre al eje $v = 0$ de \tilde{X} , buscamos los equilibrios en este

conjunto, obteniendo que $(u, v) = (0, 0)$ es el único de este tipo. Sin embargo, se tiene:

$$D\tilde{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, aún no es posible determinar el retrato de fase local de \tilde{X} . Consideremos entonces un blowup horizontal $\varphi(x, y) = (x, xy) = (u, v)$ sobre el campo \tilde{X} , donde volveremos a ocupar las variables (x, y) para economizar notación. De esta manera obtenemos el campo $\bar{X} = (D\varphi)^{-1} \circ \tilde{X} \circ \varphi$, dado por

$$\bar{X} : \begin{cases} \dot{x} = x(xy^2 - x - xy), \\ \dot{y} = x(-y^3 + 2y + 2y^2), \end{cases}$$

definido para $x \neq 0$. Notemos que $(u, v) = (0, 0)$ se abre a todo el eje $x = 0$ de \bar{X} . Sin embargo, al extender \bar{X} de forma suave al eje $x = 0$, esta recta es un continuo de puntos de equilibrio. Para lidiar con esto, definamos el nuevo campo

$$\overline{\bar{X}} = \frac{1}{x} \bar{X}, \quad x \neq 0,$$

obteniendo

$$\overline{\bar{X}} : \begin{cases} \dot{x} = xy^2 - x - xy, \\ \dot{y} = -y^3 + 2y + 2y^2. \end{cases}$$

Nuevamente, el campo $\overline{\bar{X}}$ puede extenderse suavemente hasta el eje $x = 0$. Así, los puntos de equilibrio de $\overline{\bar{X}}$ en el eje $x = 0$ son únicamente:

$$\left\{ (0, 0), (0, 1 + \sqrt{3}), (0, 1 - \sqrt{3}) \right\}.$$

Analizando la matriz jacobiana de cada uno de ellos obtenemos el retrato de fase de $\overline{\bar{X}}$ en una vecindad de $x = 0$ como en la figura 12.6(a). El retrato de fase de \bar{X} resulta ser el mismo que para $\overline{\bar{X}}$ pero con un continuo de equilibrios en $x = 0$, y con las órbitas cambiando su orientación para $x < 0$; ver figura 12.6(b). Al hacer el blowing down al campo \tilde{X} mediante φ^{-1} , el eje $x = 0$ colapsa en el origen $(u, v) = (0, 0)$ y las rectas horizontales $y = m$ se transforman en las rectas $v = mu$ como en la figura 12.6(c). Finalmente, al hacer el blowing down para regresar al campo original X mediante ϕ^{-1} , el eje $v = 0$ colapsa en el origen, y las rectas $v = mu$ se transforman en las parábolas $y^2 = mx$; ver figura 12.6(d).

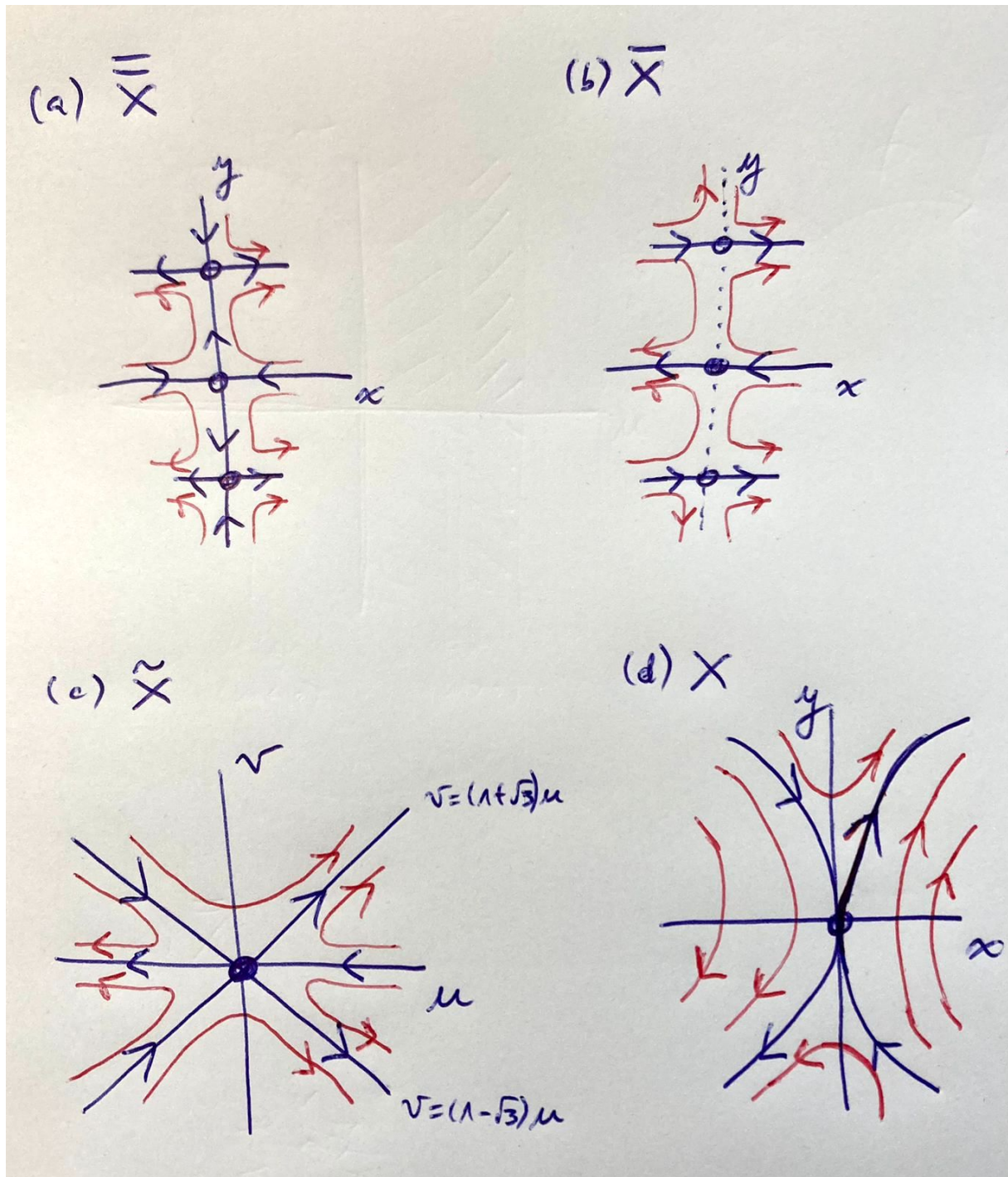


Figura 12.6: Retratos de fase de los campos $\overline{\overline{X}}$ (a), \overline{X} (b), \tilde{X} (c) y X (d).

OBSERVACIONES.

1. El blowup vertical (resp. horizontal) solo detecta la dinámica cerca del eje vertical (resp. horizontal). Por lo tanto, en la práctica se recomienda efectuar ambos blowups sobre *el mismo* punto de equilibrio no-hiperbólico para obtener información sobre el comportamiento tangente a ambos ejes. De todas maneras, en ocasiones, puede ocurrir que uno de estos blowups no entregue información adicional.
2. A veces es útil efectuar variantes o generalizaciones de blowups llamados *blowups cuasihomogéneos*, de la forma:

$$\bullet \phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (\theta, r) \mapsto (r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta);$$

$$\bullet \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (u, v) \mapsto (u^\alpha, u^\beta v);$$

$$\bullet \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (u, v) \mapsto (uv^\alpha, v^\beta);$$

donde $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, con $\alpha, \beta \geq 1$.

12.3. Ejercicios

1. Encuentre el retrato de fase **en una vecindad del origen** del siguiente sistema en \mathbb{R}^2 :

$$X : \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2, \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

2. Encuentre el retrato de fase **en una vecindad del origen** del siguiente sistema:

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x^3, \end{cases}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Capítulo 13

Bifurcaciones

En la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales no lineales, uno puede tomar en cuenta cualquier incerteza acerca del modelo mediante la variación de los parámetros del mismo. No sabemos exactamente el valor del coeficiente de fricción para el péndulo planar amortiguado, pero hay uno; no sabemos exactamente el efecto inhibitor de una especie sobre otra, pero parece haber uno; etcetera. Por lo tanto, el modelo es típicamente de la forma general

$$\dot{x} = f(x; \lambda),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa las variables de estado y $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. Puede que solo se sepa que el valor del parámetro λ se halla en un cierto intervalo o región. Sin conocer exactamente λ , ¿qué se puede decir sobre el sistema?

Definición 42 *Considere el campo de vectores*

$$\dot{x} = f(x; \lambda),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que el retrato de fase del sistema para una elección particular de $\lambda = \lambda_1$ es topológicamente diferente al retrato de fase para otra elección $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1$. Si la diferencia entre λ_1 y λ_2 es suficientemente pequeña, entonces existe un único λ^ con $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$ tal que el retrato de fase para cualquier $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$ es topológicamente equivalente al de λ_1 , y el retrato de fase para cualquier $\lambda^* < \lambda < \lambda_2$ es topológicamente equivalente al de λ_2 . Decimos que λ^* es un **valor de bifurcación**; es el valor del parámetro en el cual el sistema sufre una bifurcación, es decir, un cambio cualitativo de la dinámica.*

Existen distintos tipos de bifurcaciones. Comenzaremos con una clasificación de las diferentes bifurcaciones *locales*, esto es, aquellas que involucran puntos de equilibrio. Estas bifurcaciones se pueden clasificar en términos de los valores propios de la matriz Jacobiana asociada al equilibrio (parámetro-dependiente). Al momento de la bifurcación el equilibrio tiene un valor propio con parte real nula (al menos uno!) y es no-hiperbólico. Sin embargo, justo antes y justo después de la bifurcación los equilibrios son hiperbólicos (si es que existen).

Por lo tanto, podemos pensar en la bifurcación como un movimiento de valores propios a través del eje imaginario a medida que se mueve un parámetro. Para campos de vectores, hay dos casos genéricos: o bien un valor propio pasa por el valor 0 (cambiando su signo de positivo a negativo o viceversa), o un par de valores propios complejos conjugados se mueve a través del eje imaginario.

A continuación expondremos las bifurcaciones más típicas de puntos de equilibrio de campos vectoriales en sistemas de la menor dimensión posible en la que estos eventos pueden ocurrir. Los detalles técnicos y demostraciones de estos resultados son el tema de la asignatura Teoría de Bifurcaciones. Algunos de estos detalles se pueden hallar en [7, 9, 14, 15, 18].

13.1. Bifurcación silla-nodo

La bifurcación **silla-nodo** se caracteriza por el hecho de que a un lado de la bifurcación existen dos equilibrios, mientras que al otro lado estos dos equilibrios han desaparecido. Podemos pensar en el momento de la bifurcación como aquel momento donde los dos equilibrios colisionan. En sistemas bidimensionales justamente uno de los equilibrios que interviene es un nodo y el otro es una silla, lo cual le da el nombre a esta bifurcación (*silla-nodo*). La bifurcación silla-nodo puede aparecer en cualquier sistema y es, de hecho, una bifurcación muy típica que sucede al mover un parámetro. Quizás debido a que esta bifurcación es *tan* típica, posee muchos otros nombres. La bifurcación silla-nodo también se le conoce como bifurcación *fold*, bifurcación *tangente* o bifurcación *limit point*.

Ejemplo 68 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \lambda) = \lambda - x^2,$$

donde $x \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que pueden existir dos equilibrios $x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Estos equilibrios solo existen (en \mathbb{R}) si $\lambda > 0$. La matriz Jacobiana es $Df(x, \lambda) = -2x$. Luego, en $x_1 = \sqrt{\lambda}$ tenemos un valor propio $-2\sqrt{\lambda} < 0$, así x_1 es un atractor; y en $x_2 = -\sqrt{\lambda}$ tenemos un valor propio $2\sqrt{\lambda} > 0$, y x_2 es un repulsor.

Hay varias maneras de visualizar esta bifurcación. Por ejemplo, podemos dibujar todos los retratos de fase topológicamente diferentes como en la Figura 13.1:

1. Una línea de fase representativa para un valor $\lambda > 0$ arbitrario. La dinámica que se obtiene consiste lo siguiente: soluciones con $x_0 > x_1$ son decrecientes y convergen al equilibrio estable x_1 para $t \rightarrow \infty$, órbitas con $x_2 < x_0 < x_1$ son crecientes y también convergen a x_1 , mientras que las soluciones con $x_0 < x_2$ son decrecientes y se alejan de x_2 .
2. Otra línea de fase para $\lambda = 0$ (un equilibrio semiestable en el origen, estable por la derecha e inestable por la izquierda);
3. Y finalmente una línea de fase representativa para un valor $\lambda < 0$ arbitrario (no hay equilibrios y flujo simplemente corre de derecha a izquierda).

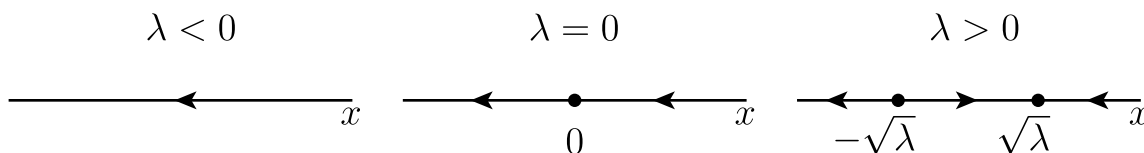


Figura 13.1: Retratos de fase no equivalentes del sistema $\dot{x} = \lambda - x^2$.

De hecho, muchas veces obviamos el caso $\lambda = 0$ pues es topológicamente diferente al retrato de fase de cualquier otro valor de λ y porque puede ser fácilmente deducido a partir del contexto, al menos por alguien familiarizado con la teoría de bifurcaciones. Las regiones donde los retratos de fase son topológicamente equivalentes son entonces indicadas en el espacio de parámetros. Toda la información queda contenida en la Figura 13.2 que consiste en lo siguiente:

- (a) El espacio de parámetros ($\lambda \in \mathbb{R}$) queda dividido en dos regiones (intervalos), llamémoslos 1 y 2, cuya frontera común es $\lambda = 0$.

(b) Retratos de fase representativos para cada región del espacio de parámetros 1 y 2.

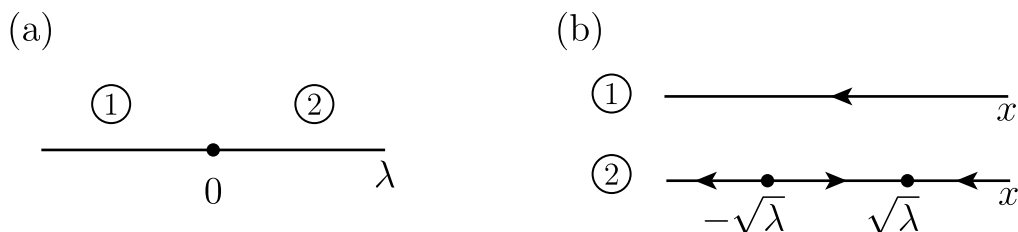


Figura 13.2: Espacio de parámetros (en panel (a)) y retratos de fase no equivalentes (en panel (b)) del sistema $\dot{x} = \lambda - x^2$.

Esta colección presentada en la Figura 13.2 se llama *diagrama de bifurcación*, es decir, la división del espacio de parámetros en conjuntos de retratos de fase topológicamente diferentes, junto con representaciones de estos retratos de fase.

Para sistemas uno- o dos-dimensionales, como en este ejemplo, podemos combinar las imágenes del diagrama de bifurcación en una sola figura del espacio de parámetros \times espacio de fase. Aquí, uno grafica todos los retratos de fase en el plano (λ, x) , y no solo uno representativo. La Figura 13.3 posee toda la información relativa a este ejemplo en una sola imagen:

1. En el eje horizontal corre el parámetro λ , mientras que el eje vertical corresponde a la variable de estado x .
2. Para cada $\lambda < 0$ arbitrario pero fijo, el gráfico se compone de una órbita vertical descendente (pues la variable $x(t)$ es decreciente).
3. Para $\lambda \geq 0$, los puntos de equilibrio se ubican sobre la parábola $\lambda - x^2 = 0$, la cual se abre hacia la derecha. La rama superior de la parábola corresponde a $x_1 = \sqrt{\lambda}$ y la rama inferior a $x_2 = -\sqrt{\lambda}$.
4. Para cada $\lambda > 0$ arbitrario pero fijo, el gráfico es cualitativamente como lo descrito más arriba: soluciones con $x_0 > x_1$ son órbitas verticales decrecientes y convergen al equilibrio estable x_1 para $t \rightarrow \infty$; órbitas con $x_2 < x_0 < x_1$ son crecientes y también convergen a x_1 ; mientras que las soluciones con $x_0 < x_2$ son líneas decrecientes y se alejan de x_2 .

5. Por último, notemos que ambas ramas de la parábola de equilibrios $\lambda - x^2 = 0$ coinciden cuando $\lambda = 0$ marcando la colisión de x_1 y x_2 en un solo equilibrio en $x = 0$ al momento de la bifurcación.

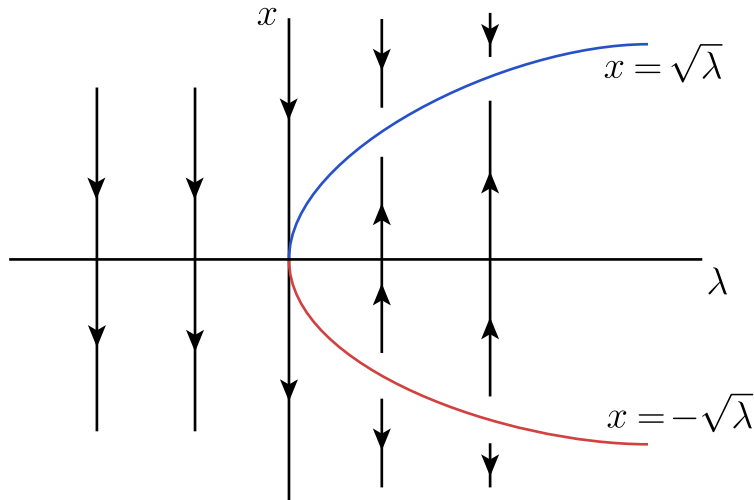


Figura 13.3: El diagrama de bifurcación en el espacio producto de parámetros \times espacio de fase para el sistema $\dot{x} = \lambda - x^2$ contiene toda la información relativa a posibles retratos de fase en una sola imagen.

Similarmente a los retratos de fase topológicamente equivalentes, nos gustaría identificar condiciones suficientes para decidir si un sistema dado exhibe o no una cierta bifurcación. En el caso de la bifurcación silla-nodo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 33 (*Bifurcación silla-nodo*) Sea

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \quad (13.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y sea f de clase C^2 . Si las siguientes condiciones se satisfacen

(B1) $f(x_0, \lambda^*) = 0$, “Existe un equilibrio x_0 para $\lambda = \lambda^*$ ”;

(B2) $Df(x_0, \lambda^*) = 0$, “Valor propio cero en x_0 para $\lambda = \lambda^*$ ”;

(G1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, \lambda^*) \neq 0$, “Término de 2do orden de f no se anula en (x_0, λ^*) ”;

$$(G2) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x_0, \lambda^*) \neq 0, \quad \text{“Velocidad no-nula en } \lambda\text{”},$$

entonces (13.1) pasa por una bifurcación silla-nodo en (x_0, λ^*) .

Por conveniencia, uno suele trasladar el equilibrio (x_0, λ^*) al origen, esto es, a $(0, 0)$. (B1) y (B2) son llamadas *condiciones de bifurcación*; se deben satisfacer para encontrar la bifurcación. (G1) y (G2) son llamadas *condiciones de genericidad*; son propiedades que se satisfacen en forma “típica” (Por el contrario, si no se satisficieran, uno estaría frente a un caso “atípico”, poco usual o no-genérico).

Ejemplo 69 Considere el campo de vectores unidimensional

$$\dot{x} = \alpha - x - e^{-x},$$

con parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. Al comparar las gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ hallamos las gráficas de la Figura 13.4.

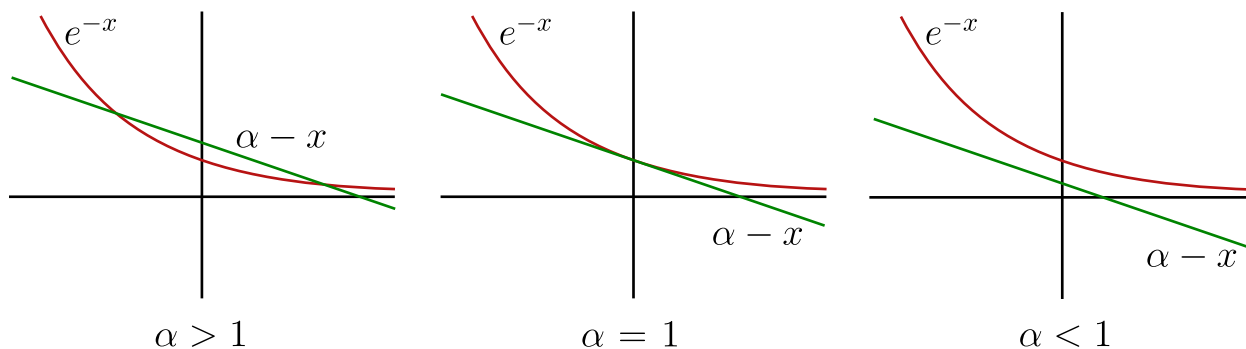


Figura 13.4: Posibles gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ para distintos valores del parámetro α .

Para hallar el punto de bifurcación α^* , necesitamos que las gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ se intersecten *tangencialmente*. Luego, tanto las funciones como sus derivadas con respecto a x deben coincidir:

$$\begin{cases} e^{-x} = \alpha - x \\ \frac{d}{dx} e^{-x} = \frac{d}{dx}(\alpha - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x} = \alpha - x \\ -e^{-x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Luego, el punto de bifurcación es $\alpha^* = 1$, y la bifurcación ocurre en $x_0 = 0$. A continuación movemos el punto $(\alpha^*, x_0) = (1, 0)$ al origen por medio del cambio

de coordenadas $\alpha = \lambda + 1$, $y = x$. El nuevo campo de vectores en términos de y y λ es

$$\dot{y} = \dot{x} = \alpha - x - e^{-x} = 1 + \lambda - y - e^{-y} =: f(y, \lambda).$$

Se verifica que (B1) $f(0, 0) = 0$, (B2) $f_y(0, 0) = -1 + e^{-y}|_{y=0} = 0$, (G1) $f_{yy}(0, 0) = -e^{-y}|_{y=0} = -1 \neq 0$, and (G2) $f_\lambda(0, 0) = 1 \neq 0$. Luego, efectivamente, se trata de una bifurcación silla-nodo.

Alternativamente, usando la expansión de Taylor para e^{-x} alrededor de $x = 0$ encontramos

$$\dot{x} = \alpha - x - e^{-x} = \alpha - x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = (\alpha - 1) - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Éste tiene la misma forma algebraica que $\dot{y} = \lambda - y^2$, y coincide exactamente mediante apropiados rescalamientos de x y α . En general, la teoría de bifurcaciones nos dice dónde podemos cortar la expansión en serie de Taylor sin alterar topológicamente *ningún* retrato de fase en una vecindad de (x_0, λ^*) .

La bifurcación silla-nodo está asociada con un valor propio “pasando por” cero. Hay otras dos bifurcaciones que tienen esta misma característica. Son la bifurcación transcítica y la pitchfork. Estas bifurcaciones solo pueden ocurrir bajo circunstancias especiales.

13.2. Bifurcación transcítica

La bifurcación transcítica solo sucede cuando el sistema posee un equilibrio que existe para todo un intervalo de valores del parámetro. Cuando este equilibrio colisiona con otro, los dos equilibrios intercambian su estabilidad, pero siguen existiendo tanto antes como después de la bifurcación. Entonces, es como si los dos equilibrios “pasaran uno sobre otro”.

Ejemplo 70 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{y} = f(y, \lambda) = \lambda y - y^2 = y(\lambda - y),$$

donde $y \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que siempre existen dos equilibrios $y_1 = 0$ y $y_2 = \lambda$. Estos equilibrios existen para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. La matriz Jacobiana es $Df(y, \lambda) = \lambda - 2y$. Luego, en $y_1 = 0$ tenemos un valor propio λ ; así y_1 es un atractor si $\lambda < 0$ y es repulsor si $\lambda > 0$. Por otro lado, en $y_2 = \lambda$ tenemos el valor propio $-\lambda$; luego, y_2 es un repulsor si $\lambda < 0$ y es atractor si $\lambda > 0$.

La bifurcación transcítica es típica de sistemas donde un equilibrio está presente independiente de los valores del parámetro. La figura 13.5 muestra el diagrama de bifurcación del sistema $\dot{y} = \lambda y - y^2$. Notemos que, en el plano (λ, y) , los equilibrios se ubican sobre el conjunto de nivel cero de $f(y, \lambda) = \lambda y - y^2 = y(\lambda - y) = 0$.

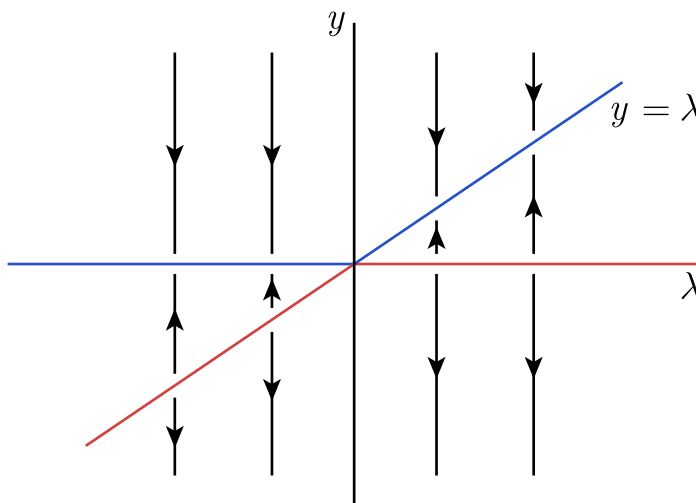


Figura 13.5: El diagrama de bifurcación para el sistema $\dot{y} = \lambda y - y^2$.

Teorema 34 (*Bifurcación transcítica*) Sea

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \quad (13.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y f es de clase C^2 . Si las siguientes condiciones se satisfacen

1. $f(0, 0) = 0$;
2. $Df(0, 0) = f_x(0, 0) = 0$;

$$3. \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 0;$$

$$4. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0;$$

$$5. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0;$$

entonces (13.2) pasa por una bifurcación transcítica en $(x_0, \lambda^*) = (0, 0)$.

13.3. Bifurcación pitchfork

La bifurcación pitchfork solo existe cuando hay una simetría de reflexión presente en el sistema. De hecho, al igual que la bifurcación silla-nodo es típica para sistemas dinámicos arbitrarios, la bifurcación pitchfork lo es en sistemas dinámicos con simetría de reflexión.

Ejemplo 71 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{y} = f(y, \lambda) = \lambda y - y^3 = y(\lambda - y^2),$$

donde $y \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Este sistema posee simetría de reflexión en $\{y = 0\}$. Es decir, si se define $u = -y$, obtenemos la misma ecuación para \dot{u} que para \dot{y} . Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que siempre existe un equilibrio $y_1 = 0$ en el origen. Además, si $\lambda > 0$ tenemos otros dos equilibrios simétricos en $y_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}$. La matriz Jacobiana es $Df(y, \lambda) = \lambda - 3y^2$. Luego, en $y_1 = 0$ tenemos un valor propio λ ; así y_1 es un atractor si $\lambda < 0$ y es repulsor si $\lambda > 0$. Por otro lado, en $y_{2,3}$ tenemos el valor propio -2λ ; luego, $y_{2,3}$ son ambos atractores.

La figura 13.6 muestra el diagrama de bifurcación del sistema $\dot{y} = \lambda y - y^3$. Notemos que, en el plano (λ, y) , los equilibrios se ubican sobre el conjunto de nivel cero de $f(y, \lambda) = y(\lambda - y^2) = 0$. El cuadro que emerge en la figura 13.6 es como la de un tenedor o tridente (*pitchfork*, en inglés), lo cual le da el nombre a esta bifurcación.

Teorema 35 (*Bifurcación pitchfork*) Sea

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \tag{13.3}$$

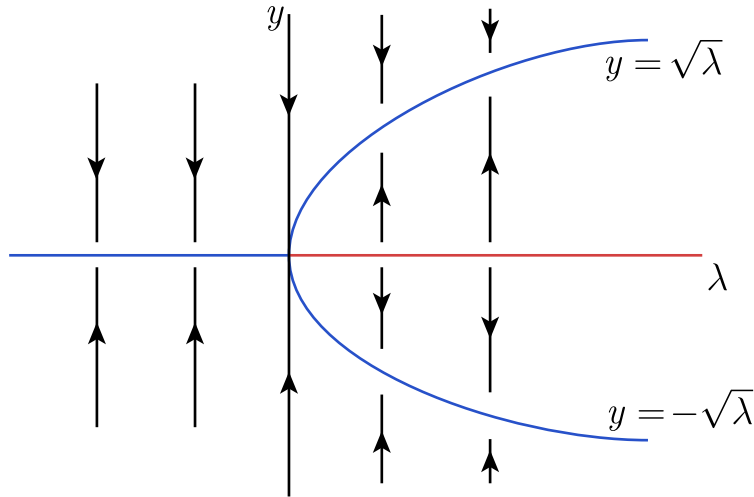


Figura 13.6: El diagrama de bifurcación para el sistema $\dot{y} = \lambda y - y^3$.

donde $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y f es de clase C^3 . Si las siguientes condiciones se satisfacen

1. $f(0, 0) = 0$;
2. $Df(0, 0) = f_x(0, 0) = 0$;
3. $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 0$;
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$;
5. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$;
6. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0$;

entonces (13.3) pasa por una bifurcación pitchfork en $(x_0, \lambda^*) = (0, 0)$.

13.4. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

Cuando un par de valores propios complejos conjugados se mueve atravesando el eje imaginario, típicamente ocurre una bifurcación de Hopf. Luego, para que

esta bifurcación ocurra necesitamos que la dimensión del sistema sea al menos $n = 2$.

Consideremos el sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \lambda y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (13.4)$$

o en su forma matricial equivalente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (13.5)$$

Consideremos el punto de equilibrio en $(0, 0)$. La matriz jacobiana asociada es:

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

con valores propios $\lambda \pm i \in \mathbb{C}$. Claramente, si $\lambda < 0$ el origen es un foco estable hiperbólico, mientras que si $\lambda > 0$ el origen es un foco inestable hiperbólico. Sin embargo, para $\lambda = 0$, tenemos un equilibrio no-hiperbólico: a pesar que en la linealización, el origen sea un centro (con valores propios $\pm i$), no podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman y concluir que también sea un centro en el sistema no lineal (13.4) o (13.5).

Por otro lado, sea $E(x, y) = x^2 + y^2$ y consideremos $\lambda > 0$. Notemos que

$$\langle X, \nabla E \rangle|_{\{x^2+y^2=\lambda\}} = 2x(\lambda x - y - \lambda x) + 2y(x + \lambda y - \lambda y) = 0.$$

Por lo tanto, el campo X es ortogonal al vector ∇E en cada punto de la circunferencia $\gamma = \{x^2 + y^2 = \lambda\}$. Es decir, el campo X es tangente al círculo γ , y luego, γ es un ciclo límite.

Además, reescribiendo (13.4) o (13.5) en coordenadas polares obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda - r^2), \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases} \quad (13.6)$$

Es más fácil analizar este sistema en la forma (13.6), pues las dos ecuaciones son desacopladas. Notemos que $r \geq 0$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$; al identificar $\phi = -\pi$ con $\phi = \pi$, obtenemos que las variables (r, ϕ) viven en un semicilindro. También, este sistema

no posee equilibrios pues la variable ϕ varía continuamente con velocidad constante. Luego, todas las órbitas en el semicilindro fluyen en la dirección positiva de ϕ sin “detenerse”. En particular, para $\lambda > 0$, el ciclo límite γ corresponde a $r = \sqrt{\lambda}$.

Ahora variemos λ . Podemos analizar la ecuación para r separadamente y luego combinar las dos. Esto lleva al diagrama de bifurcación de la figura 13.7. Si consideramos el sistema (13.6) en la forma (13.4) o (13.5), entonces el diagrama de bifurcación con retratos de fase en \mathbb{R}^2 es como en la figura 13.8.

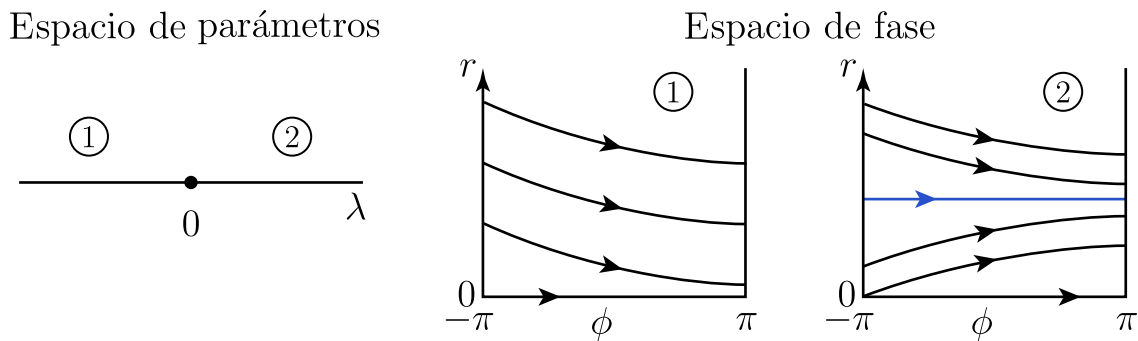


Figura 13.7: Diagrama de bifurcación de la ecuación (13.6).

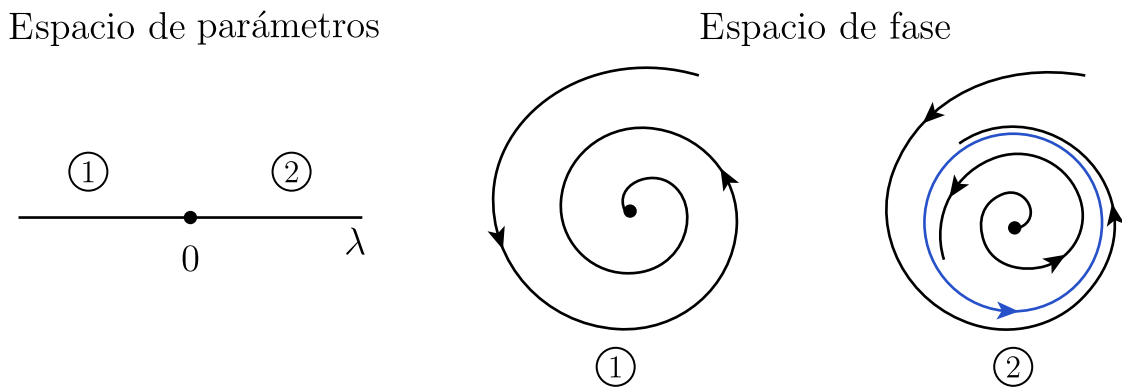


Figura 13.8: Diagrama de bifurcación de (13.5).

Por lo tanto, la bifurcación de Hopf se caracteriza por la aparición de una órbita periódica. La amplitud de la órbita periódica es 0 al momento de la bifurcación ($\lambda = 0$) y crece como $\sqrt{\lambda}$ cuando $\lambda > 0$. La frecuencia de la órbita periódica, al

comienzo de la bifurcación, es igual a 1, el valor absoluto de la parte imaginaria de los valores propios del punto de equilibrio. El equilibrio existe a ambos lados de la bifurcación, pero cambia de estabilidad cuando $\lambda = 0$. Para el sistema en la forma (13.6) podemos dibujar el diagrama de fase/parámetro en el plano (λ, r) e ignorar ϕ obteniendo la figura 13.9. Si el espacio de fase fuera $r \in \mathbb{R}$, en vez de $(r, \phi) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi)$, entonces tendría lugar una bifurcación pitchfork! Compare (13.6) con el ejemplo 71.

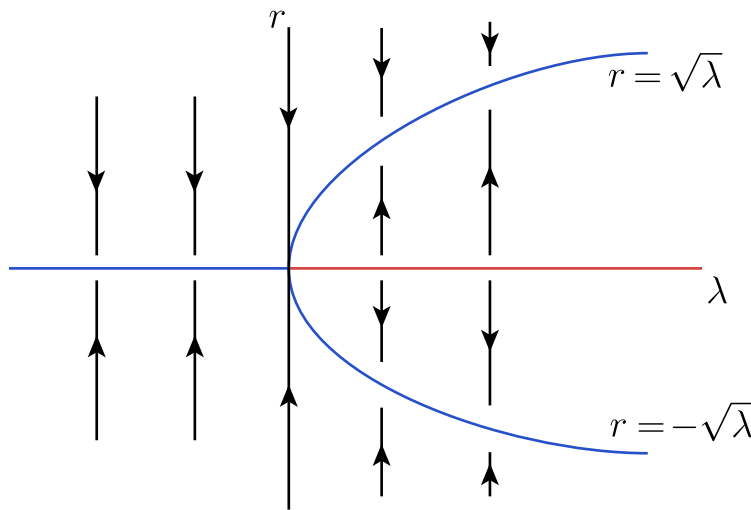


Figura 13.9: Diagrama de bifurcación de (13.6) en el espacio (λ, r) .

El diagrama de bifurcación en el espacio de parámetros vs espacio de fase completo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ para el sistema en la forma (13.4) o (13.5) es un cuadro tridimensional como en la figura 13.10. De hecho, podemos ver la figura 13.9 en el plano (λ, r) como una sección transversal del cuadro tridimensional de la figura 13.10 en el espacio (λ, x, y) cortando el plano (λ, x) o bien el plano (λ, y) . Los retratos de fase **1** y **2** en la figura 13.8 son secciones transversales cortando a través de planos $\lambda = \text{constante}$ en la figura 13.10, dependiendo del signo de λ . La órbita periódica que aparece en la bifurcación de Hopf se ubica en el paraboloides $x^2 + y^2 = \lambda$.

Teorema 36 (*Bifurcación de Hopf*) Considere el sistema bidimensional

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \quad (13.7)$$

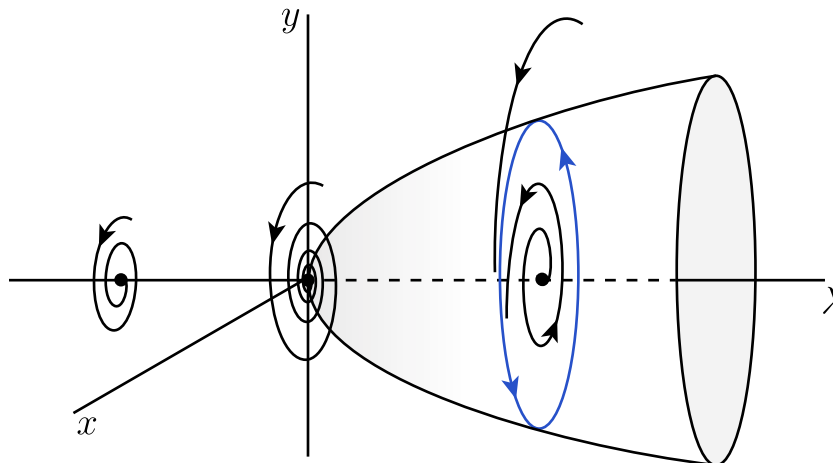


Figura 13.10: Retratos de fase de la forma normal de la bifurcación de Hopf si $l_1 < 0$.

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $y, \lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que para valores de λ cerca de λ^* el sistema (13.7) posee un punto de equilibrio $x(\lambda)$ cuya coordenada depende de λ ; en particular, sea $x_0 = x(\lambda^*)$ y expresemos los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x(\lambda), \lambda)$ en la forma

$$\xi_{1,2}(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda).$$

Las siguientes son condiciones necesarias para que (13.7) exhiba una bifurcación de Hopf en (x_0, λ^*) :

1. $f(x_0, \lambda^*) = 0$;
2. $Df(x_0, \lambda^*)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros $\pm i\omega$, ($\alpha(\lambda^*) = 0, \beta(\lambda^*) = \omega$);
3. $l_1(x_0, \lambda^*) \neq 0$ donde l_1 es especificado más abajo;
4. $\frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha(\lambda^*) \neq 0$.

El coeficiente l_1 en el teorema anterior se conoce como **primera cantidad de Lyapunov**. Se puede computar explícitamente a partir de f en (13.7): Si para $\lambda = \lambda^*$ el sistema 2-dimensional toma la forma

$$\begin{cases} x' &= -\omega y + P(x, y), \\ y' &= \omega x + Q(x, y), \end{cases}$$

entonces la primera cantidad de Lyapunov $l_1(\lambda^*)$ se puede calcular como:

$$16 l_1(\lambda^*) = P_{xxx} + P_{xyy} + Q_{xxy} + Q_{yyy} + \frac{1}{\omega} \left(P_{xy}(P_{xx} + P_{yy}) - Q_{xy}(Q_{xx} + Q_{yy}) - P_{xx}Q_{xx} + P_{yy}Q_{yy} \right), \quad (13.8)$$

donde todas las derivadas están evaluadas en $(0, 0)$.

El signo de la primera cantidad de Lyapunov determina las propiedades de estabilidad de la órbita periódica que aparece en la bifurcación obteniendo la visión general de la figura 13.11. En el caso de una bifurcación de Hopf supercrítica ($l_1 < 0$) siempre tenemos un atractor: a medida que el punto de equilibrio pierde su estabilidad en $\lambda = 0$, aparecen pequeñas oscilaciones estables. Sin embargo, para una bifurcación de Hopf subcrítica ($l_1 > 0$) no tenemos un atractor para $\lambda > 0$, mientras que el equilibrio solo atrae puntos localmente en una vecindad cuando $\lambda < 0$. Por lo tanto, en la práctica, es importante calcular el signo de l_1 !

Notemos que para $l_1 = 0$ el sistema (13.4) o (13.5) se vuelve la ecuación lineal del oscilador armónico, en donde el origen es un centro rodeado de una cantidad infinita (no-numerable) de órbitas periódicas si $\lambda = 0$; mientras que el origen es un foco atractor si $\lambda < 0$ y un repulsor si $\lambda > 0$. Sin embargo, no existen órbitas periódicas para $\lambda \neq 0$. No obstante, a partir del teorema anterior, ¿No es posible decir que el sistema genérico (13.7) es equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf si $l_1 = 0$!

13.5. Ejercicios

1. Encuentre el diagrama de bifurcación en el plano (λ, y) de $\dot{y} = \lambda + y^2$, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara con el diagrama de bifurcación de $\dot{y} = \lambda - y^2$?
2. Encuentre el diagrama de bifurcación en el plano (λ, y) de $\dot{y} = \lambda y + y^2$, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara con $\dot{y} = \lambda y - y^2$?
3. Encuentre el diagrama de bifurcación en el plano (λ, y) de $\dot{y} = \lambda y + y^3$, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara

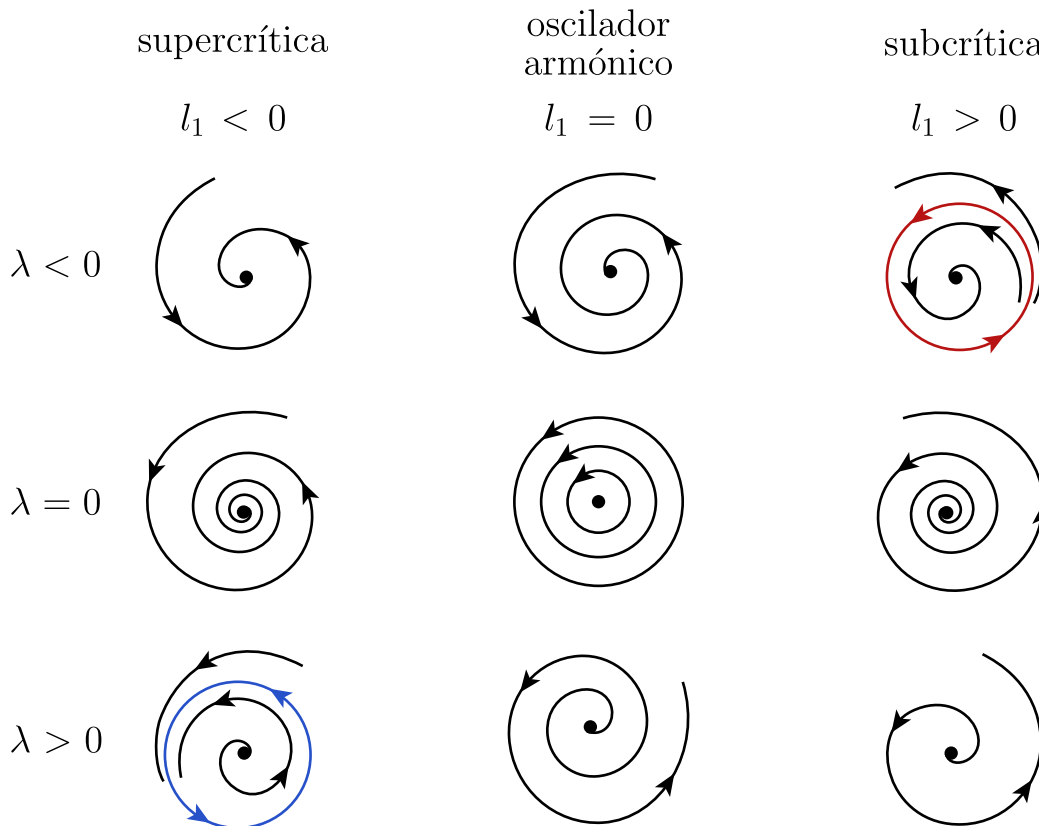


Figura 13.11: El signo de l_1 determina las propiedades de estabilidad del ciclo que aparece en la bifurcación de Hopf.

con $\dot{y} = \lambda y - y^3$?

4. Encuentre el diagrama de bifurcación del sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \lambda y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

¿Para qué valores de λ existe un ciclo límite y cuál es su estabilidad?

5. En ocasiones, cuando una especie se halla con bajas densidades de población, enfrenta dificultades para crecer en número y evitar la extinción. Este fenómeno, llamado *efecto Allee*, se caracteriza por una tendencia a que la tasa de crecimiento decrezca por debajo de un nivel crítico mínimo. En ocasiones, el efecto Allee provoca que la tasa de crecimiento se vuelva negativa,

lo que induce un umbral de extinción, comúnmente llamado el *umbral Allee*, que la población debe superar para sobrevivir en el largo plazo.

Considere el siguiente modelo reescalado de crecimiento de una población con efecto Allee y con depredación proporcional al número de individuos:

$$\dot{x} = x(1-x)(x-m) - px,$$

con $x(t) \geq 0$, $0 < m < 1$, $p \geq 0$.

- a) En el caso en que se ignora el efecto de la depredación, es decir, $p = 0$, encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio x^* del sistema. Determine el umbral Allee.
- b) Determine todas las bifurcaciones que ocurren en el sistema a medida que el parámetro $p > 0$ se hace aumentar desde cero.
- c) Haga un bosquejo del diagrama de estabilidad de puntos de equilibrio x^* en función del parámetro p en el plano (p, x) .
- d) Haga un bosquejo cualitativo del diagrama de bifurcación en el plano (m, p) . Interprete sus resultados.

6. Un modelo de pesquería viene dado por la ecuación

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - C \frac{N}{N+A},$$

donde $C > 0$ y $A > 0$. Aquí, en ausencia de pesca, la población crece en forma logística. Los efectos de la pesca están modelados por el término $-C \frac{N}{N+A}$ que dice que los peces son capturados a una tasa que decrece con N .

- a) ¿Cuál es la interpretación del parámetro A ?
- b) Muestre que el sistema puede ser reescrito en forma adimensional como

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - c \frac{x}{a+x},$$

para cantidades apropiadas x , τ , a y c .

- c) Muestre que el sistema puede tener uno, dos o tres puntos de equilibrio, dependiendo de los valores de a y c . Clasifique la estabilidad de los puntos de equilibrio en cada caso.
- d) Analice la dinámica cerca de $x = 0$ y muestre que ocurre una bifurcación cuando $c = a$. ¿Qué tipo de bifurcación es?
- e) Muestre que otra bifurcación ocurre cuando $c = \frac{1}{4}(a + 1)^2$, para $a < a^*$, donde a^* es un valor por determinar. Clasifique esta bifurcación.
7. Las rayas de las cebras y los patrones en las alas de las mariposas son dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Como un ingrediente en un modelo de formación de patrones, Lewis et al. (1977) consideraron un ejemplo simple de un *interruptor químico*, en el cual un gen G es activado por una sustancia S mediante una señal bioquímica. Por ejemplo, el gen normalmente estaría inactivo, pero podría “encenderse” para producir un pigmento u otro producto cuando la concentración S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del gen, y asuma que la concentración s_0 de S está fija. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4 + g^2},$$

donde las constantes k_i son positivas. La producción de g es estimulada por s_0 a una tasa k_1 , y por un proceso de retroalimentación positivo o *autocatalítico* (el término no-lineal). También hay una degradación lineal de g a una tasa k_2 .

- a) Demuestre que el sistema se puede llevar a la forma adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - r x + \frac{x^2}{1 + x^2},$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son nuevos parámetros.

- b) Demuestre que si $s = 0$, existen dos puntos de equilibrio positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c es un valor a determinar.
- c) Asuma que inicialmente no hay producción del gen, es decir, $g(0) = 0$, y suponga que s crece lentamente desde cero (se enciende la señal

activadora). ¿Qué le sucede a $g(t)$? ¿Qué sucede si s entonces vuelve a cero? ¿El gen se vuelve a apagar?

- d) Encuentre las ecuaciones para las curvas de bifurcación en el plano (r, s) , y clasifique las bifurcaciones que ocurren.
- e) Mediante un computador, grafique el diagrama de bifurcación en el plano (r, s) .

8. En el estudio de reacciones autocatalíticas isotérmicas, Gray y Scott (1985) consideraron una reacción hipotética cuya cinética está dada en forma adimensional por

$$\begin{cases} \dot{u} = a(1 - u) - uv^2, \\ \dot{v} = uv^2 - (a + k)v, \end{cases}$$

donde $a, k > 0$ son parámetros. Demuestre que ocurre una bifurcación cuando $k = -a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a}$. ¿Qué tipo de bifurcación es la hallada? Justifique su respuesta.

9. Considere el campo de vectores $\dot{x} = \lambda x - \sin x$, con $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Demuestre que este campo de vectores pasa por una **bifurcación pitchfork** en algún valor $\lambda = \lambda^*$ por determinar.
- b) Dé un argumento de por qué ocurren infinitas **bifurcaciones silla-nodo**.

10. Estudie el campo de vectores en el eje real \mathbb{R} positivo

$$\dot{x} = x + \lambda - \sqrt{x},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

- a) Muestre mediante un método gráfico que el sistema debe pasar por una bifurcación para algún $\lambda^* \in [0, 1]$. ¿De qué bifurcación se trata?
- b) Calcule los puntos de equilibrio y use esto para hallar un candidato (x_0, λ^*) para la bifurcación en (a).
- c) Verifique la condiciones de bifurcación y de genericidad/transversalidad en (x_0, λ^*) .

- d) Determine la estabilidad de los equilibrios.
- e) Bosqueje el **diagrama de bifurcación** en el plano (λ, x) . (Recuerde que el campo de vectores está definido solamente para $x > 0$).

11. Estudie el campo de vectores en el eje real \mathbb{R}

$$\dot{x} = x - \alpha \sin(\pi x),$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro.

- a) Muestre mediante un método gráfico que el sistema debe pasar por una bifurcación para algún $\alpha^* \in (0, 1)$. ¿De qué bifurcación se trata?
 - b) Encuentre un candidato (x_0, α^*) para la bifurcación en (a).
 - c) Verifique la condiciones de bifurcación y de genericidad/transversalidad en (x_0, λ^*) .
 - d) ¿Cuál es la estabilidad de los equilibrios?
 - e) Bosqueje el **diagrama de bifurcación** en el plano (α, x) en una vecindad del punto (α^*, x_0) .
12. Para cada uno de los siguientes problemas ocurre alguna bifurcación genérica para un valor $\lambda = \lambda^*$ adecuado. Determine qué tipo de bifurcación es la que ocurre en cada caso y encuentre λ^* y el equilibrio x_0 en el cual ocurre dicha bifurcación.

a) $\dot{x} = \lambda e^x - x$.

b) $\dot{x} = \lambda x - \ln(1 + x)$.

Además, dibuje bosquejos de cada diagrama de bifurcación de equilibrios x^* vs λ .

13. Demuestre que la EDO de segundo orden

$$\ddot{x} + (x^2 - \mu)\dot{x} + 2x + x^3 = 0$$

pasa por una bifurcación en $\mu = 0$. Dé la **mayor cantidad de información** que pueda sobre la bifurcación hallada.

14. Demuestre que el modelo del oscilador de Van der Pol:

$$\ddot{y} - \alpha(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$$

tiene un equilibrio que exhibe una bifurcación de Hopf en algún valor de $\alpha = \alpha^*$ (por determinar), y encuentre la estabilidad del ciclo límite bifurcado.

Capítulo 14

Caos

En este capítulo final mostraremos algunas de las principales características de comportamiento extremadamente complicado, hoy conocido como *caos*, que pueden exhibir ecuaciones diferenciales no lineales. En lugar de intentar presentar la teoría del caos propiamente tal, enfocamos la atención en tres ejemplos icónicos y sus propiedades.

14.1. El atractor caótico de Lorenz

En 1963 Edward Lorenz introdujo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (14.1)$$

Este campo de vectores es una versión simplificada de un sistema de EDPs que modela la velocidad de un fluido y perturbaciones de la temperatura en una capa bidimensional calentada desde abajo. La intención de Lorenz era modelar el comportamiento del aire en la atmósfera, y en último término, el tiempo atmosférico. En (14.1) $(x(t), y(t), z(t))$ representan amplitudes reescaladas de las variables originales, y t es una escala de tiempo reescalada. Los parámetros del modelo son: σ (Número de Prandtl), el cual modula la competencia entre difusiones viscosas y térmicas; r (Número de Rayleigh), que simboliza el calor aplicado — este parámetro aparece frecuentemente en mecánica de fluidos cuando una capa de

fluido es calentada desde abajo—; b , el cual es un factor geométrico que resulta de obtener sistema adimensional.

Para los valores “clásicos” $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$, el sistema (14.1), las soluciones son *caóticas*:

- oscilan en forma irregular, sin repetirse nunca (i.e., son aperiódicas),
- siempre permanecen confinadas en una región acotada del espacio de fase,
- convergen hacia un conjunto complicado, un “atractor extraño;”
- además, dos condiciones iniciales cercanas poseen trayectorias que, eventualmente, se separan en forma exponencial;
- y cada trayectoria parece cubrir todo el atractor extraño.

Puedes ver una animación que muestra la formación de este atractor y el comportamiento caótico en el siguiente video: <http://youtu.be/97ryBY0TQ0o>. El atractor extraño no es un punto de equilibrio, ni una órbita periódica, ni siquiera es una superficie. Es un fractal. ¿Cómo llegó Lorenz a esa conclusión?

El sistema (14.1) posee los siguientes equilibrios

- $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$,
- $p^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, para $r > 1$.

Además, presenta una simetría con respecto al eje z : Al reemplazar $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, las ecuaciones no cambian. Luego, si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución, también lo es $(-x(t), -y(t), z(t))$. En consecuencia, todas las soluciones son simétricas, o bien, poseen una contraparte simétrica.

Consideremos $b = 8/3$ y $\sigma = 10$ fijos. En lo que sigue moveremos el parámetro r hasta $r = 28$ y más allá...

14.1.1. El sistema de Lorenz es disipativo

El primer paso para entender la estructura del atractor de Lorenz y el flujo caótico de la trayectorias en él, es el hecho de que este objeto no posee volumen,

es decir, no es un cuerpo tridimensional en \mathbb{R}^3 . La razón es que los volúmenes en el espacio de fase se contraen bajo el flujo inducido por (14.1). Veamos por qué.

Sea $S(t)$ una superficie cerrada que encierra un volumen $V(t)$ en el espacio de fase. Por ejemplo, $S(t)$ podría estar formada de condiciones iniciales para trayectorias. Después de un tiempo dt , S evoluciona a una nueva superficie $S(t + dt)$. ¿Cuál es el volumen $V(t + dt)$?

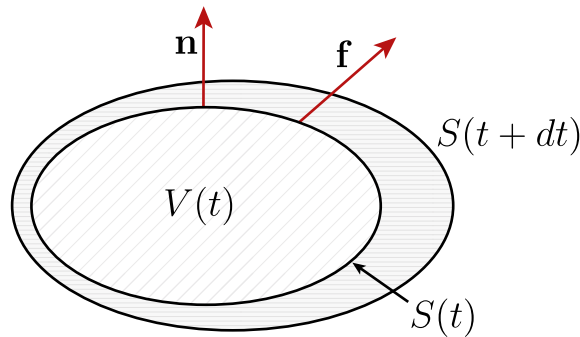


Figura 14.1: Evolución de un elemento de volumen en el sistema de Lorenz.

Sea \mathbf{n} el vector normal unitario a S y denotemos como \mathbf{f} al campo de vectores dado por (14.1). Luego, \mathbf{f} es la velocidad instantánea de los puntos. Entonces, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ es la componente de la velocidad perpendicular a S . En un tiempo dt , un área dA barre un volumen $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt dA$; ver figura 14.2. Luego,

$$V(t + dt) = V(t) + \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt dA.$$

Entonces

$$\dot{V} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV.$$

Sustituyendo por (14.1):

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}[\sigma(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y}[rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z}[xy - bz] = -\sigma - 1 - b < 0.$$

Luego obtenemos la EDO $\dot{V} = -(\sigma + 1 + b)V < 0$, con solución

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}.$$

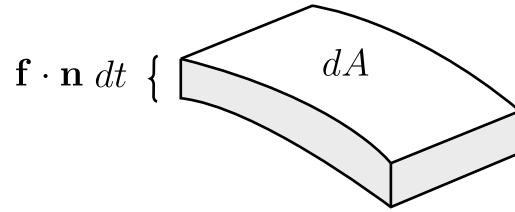


Figura 14.2: Elemento de volumen en el sistema de Lorenz.

Por lo tanto, *los volúmenes en el espacio de fase se achican exponencialmente rápido*. Como consecuencia, las trayectorias convergen a un conjunto atractor de volumen cero. ¿Cuál es ese conjunto atractor? ¿Son puntos de equilibrio?

CONSECUENCIAS:

- No pueden haber toros invariantes o superficies cerradas compactas invariantes: Si los hubiera, entonces, el volumen dentro del toro sería constante en el tiempo, lo cual contradice la propiedad de contracción de volumen.
- No existen puntos de equilibrio ni ciclos repulsivos: Supongamos que encerramos un objeto repulsor con una superficie cerrada de condiciones iniciales (ej, una esfera alrededor del punto de equilibrio o un tubo delgado alrededor de una órbita periódica). Después de un lapso de tiempo, la superficie se habrá expandido pues las correspondientes trayectorias son repelidas. Luego, el volumen dentro de la superficie se incrementaría. Esto es claramente una contradicción.

14.1.2. Bifurcaciones en el sistema de Lorenz

El origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ es un equilibrio para todos los valores de parámetros. La linealización de (14.1) en $\mathbf{0}$ viene dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y, \\ \dot{z} = -bz, \end{cases}$$

La ecuación en z es desacoplada. Luego, $z(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Por otro lado, las direcciones x e y son gobernadas por el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con traza $\tau = -\sigma - 1 < 0$ y determinante $\Delta = \sigma(1 - r)$. Si $r < 1$: $\mathbf{0}$ es un atractor. De hecho, podemos probar que el origen es un atractor global para $r < 1$ con ayuda de la función de Lyapunov $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$ (Tarea). Si $r > 1$: $\mathbf{0}$ es un punto silla, pues $\Delta < 0$. Más aún, posee variedades estable e inestable con dimensiones $\dim W^s(\mathbf{0}) = 2$, $\dim W^u(\mathbf{0}) = 1$.

Lo que ocurre en $r = 1$ es una bifurcación pitchfork. Para $r > 1$, aparecen dos nuevos equilibrios simétricos $p^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Estos puntos son atractores inmediatamente después de la bifurcación, es decir, para valores de r ligeramente mayores a 1, obteniendo un diagrama de bifurcación parcial como el de la figura siguiente.

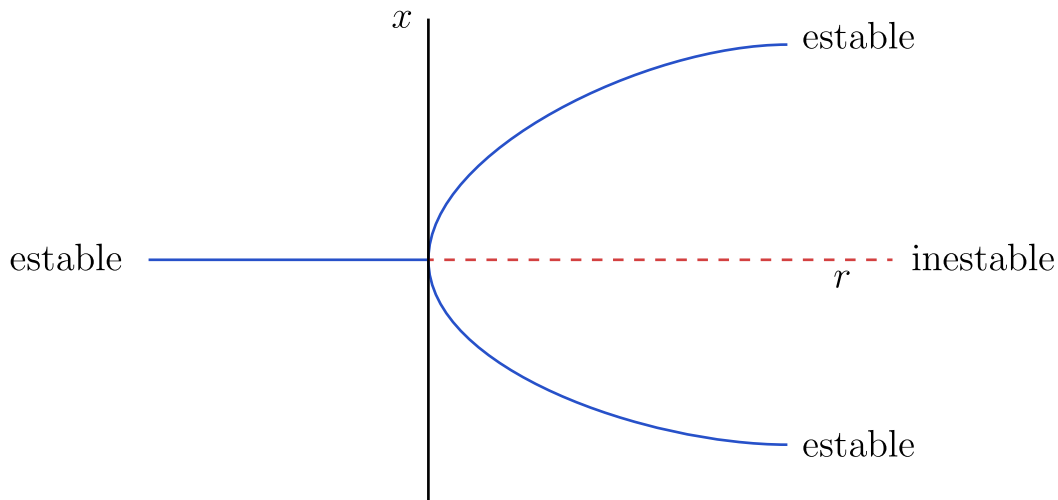


Figura 14.3: Diagrama de bifurcación de la bifurcación pitchfork en el origen del modelo de Lorenz para $r = 1$.

Podemos detallar aún más la estabilidad de p^+ y p^- . Estos equilibrios son hiperbólicos y atractores para

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \approx 24,74,$$

donde se tiene $Re\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$. Para $r = r_H$, p^+ y p^- no son hiperbólicos, pues $Re\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 < 0$, y ambos pasan por una bifurcación de Hopf. En cambio, si $r > r_H$, p^+ y p^- son equilibrios silla-focos hiperbólicos, i.e., $Re\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$. Las bifurcaciones de Hopf en p^+ y p^- son subcríticas. Esto implica que existen dos ciclos de tipo silla (inestable) Γ^+ y Γ^- para $r < r_H$, alrededor de p^+ y p^- , respectivamente. A medida que $r \rightarrow r_H^-$, los ciclos Γ^\pm se achican alrededor de p^\pm .

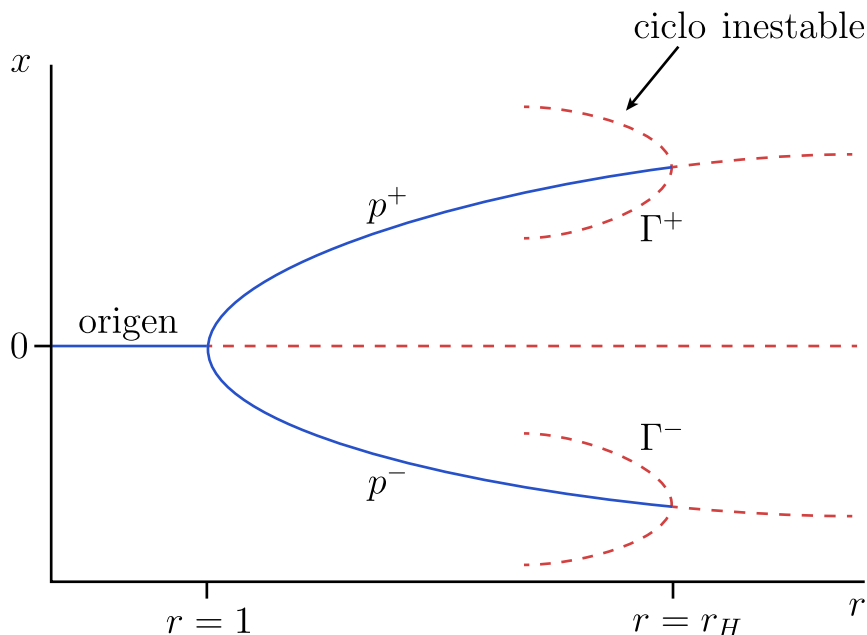


Figura 14.4: Diagrama de bifurcación parcial del modelo de Lorenz.

14.1.3. Ruta al caos

Existen ciertos valores r_{hom} , r_{het} y r_A con $r_{hom} < r_{het} < r_A < r_H$ tal que para $r_{hom} < r < r_{het}$ tenemos dos órbitas periódicas (simétricas) de tipo silla. La variedad inestable $W^u(\mathbf{0})$ del origen converge a los equilibrios p^\pm ; figura 14.5(a). Para $r = r_{het}$ ocurre una bifurcación heteroclínica: Cada rama de $W^u(\mathbf{0})$ converge a Γ^\pm , formándose lo que se conoce como una *conexión heteroclínica* entre el origen y cada uno de los ciclos; figura 14.5(b). Para $r_{het} < r < r_A$ se tiene el fenómeno de *preturbulencia*: aparece un conjunto invariante extraño, pero que no es un atractor, sino un conjunto silla caótico. Para valores de r entre r_{het} y

r_A (figura 14.5(c)), el conjunto invariante extraño consiste en un número infinito (numerable) de órbitas periódicas, un número infinito (no-numerable) de órbitas aperiódicas, y un número infinito (no-numerable) de órbitas que convergen a $\mathbf{0}$. Todas estas órbitas son (individualmente) no-estables.

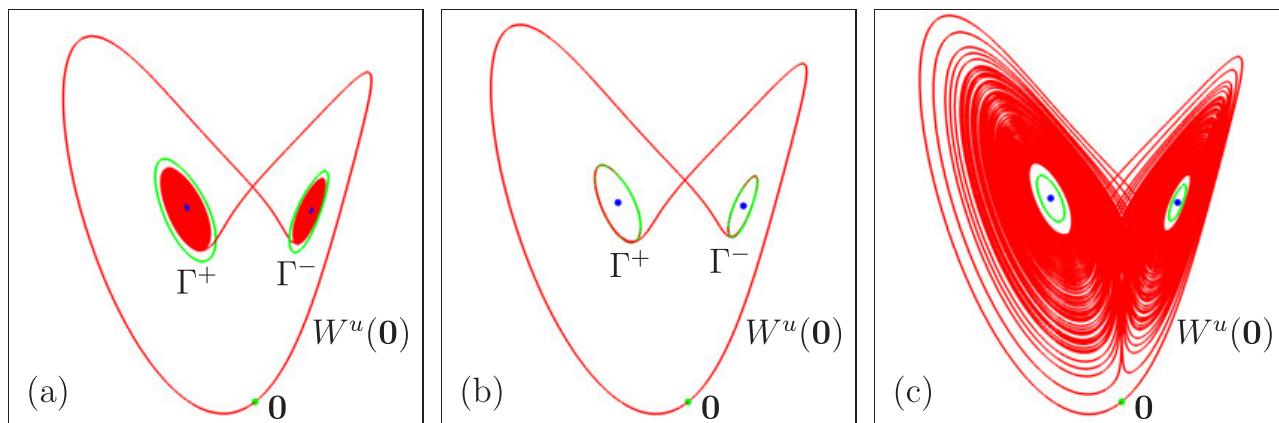


Figura 14.5: Imagen tomada de DOEDEL, KRAUSKOPF & OSINGA, *Global bifurcations of the Lorenz manifold*, *Nonlinearity* 19 (2006), p. 2947-2972.

Una trayectoria pre-turbulenta típica muestra *caos transiente*: se comporta erráticamente “visitando” al conjunto invariante caótico durante un intervalo de tiempo finito antes de converger a p^+ o p^- como en la figura 14.6 (No olvidemos que estos equilibrios siguen siendo atractores para estos valores de parámetro, i.e., estos eventos ocurren “antes” de la bifurcación de Hopf subcrítica). Sea $T(r) =$ el tiempo que le toma a una órbita típica “visitar” al conjunto invariante caótico antes de converger a alguno de los puntos atractores p^\pm . A medida que r se incrementa, el tiempo $T(r)$ que le toma a una órbita en ‘escapar’ del comportamiento caótico transiente también aumenta. En promedio de todas las órbitas que visitan al conjunto invariante extraño,

$$T(r) \longrightarrow \infty, \quad \text{cuando } r \rightarrow r_A \approx 24,06.$$

Luego, para $\boxed{r = r_A}$, la *silla caótica se convierte en un atractor caótico*.

Una órbita típica para valores de r inmediatamente mayores a r_A presenta un transiente inicial, seguido de una aproximación al atractor extraño. Una vez conseguida la convergencia al atractor caótico, se tiene una “oscilación” irregular,

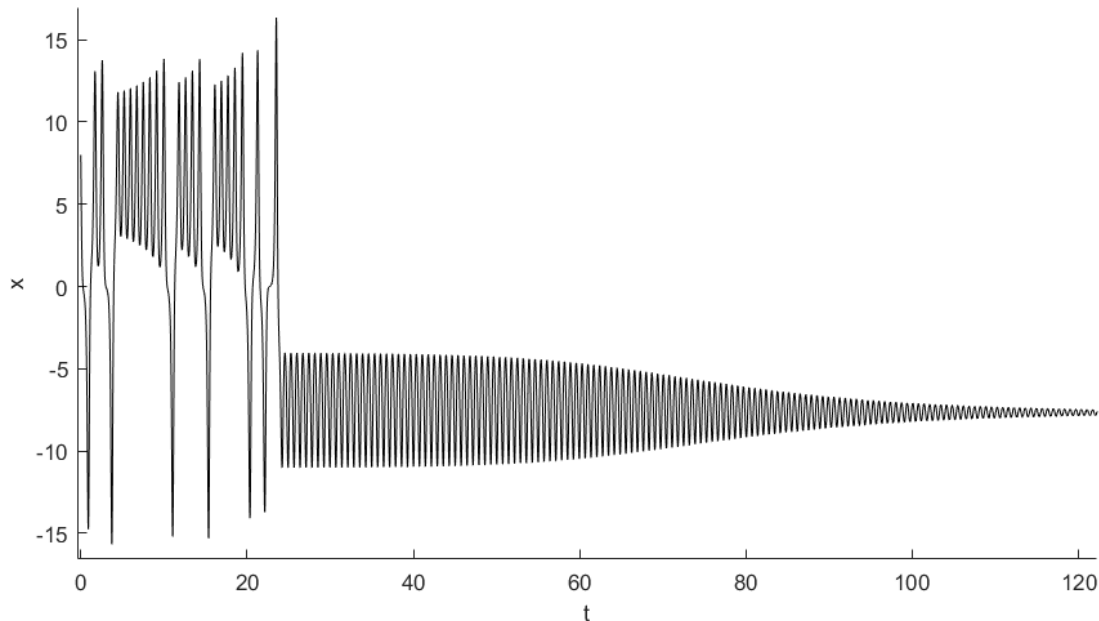


Figura 14.6: Serie temporal de la variable x de una órbita pre-turbulenta en el modelo de Lorenz.

la cual persiste para $t \rightarrow \infty$, pero nunca se repite exactamente: Movimiento aperiódico; ver figura 14.7. Por otro lado, todavía hay órbitas que convergen a p^\pm , los cuales aún son atractores. A medida que r se incrementa, el sistema pasa por una secuencia de “explosiones homoclínicas” que generan nuevos conjuntos invariantes extraños.

En resumen, la ruta al caos que lleva a la creación del atractor de Lorenz puede describirse mediante el diagrama de bifurcación de la figura 14.8:

- Entre $r_{hom} \approx 13,926 < r < r_A \approx 24,06$: Existen dos órbitas periódicas Γ^\pm de tipo silla; el origen $\mathbf{0}$ es un punto silla; p^\pm son equilibrios atractores. Además tenemos caos transiente.
- Para $r = r_A$: Aparición del atractor extraño.
- Para $r > r_H \approx 24,74$: Los ciclos Γ^\pm ya no existen al haber desaparecido en una bifurcación de Hopf subcrítica; el origen $\mathbf{0}$ es un punto silla; los equilibrios p^\pm son ambos de tipo silla-foco; **el único conjunto atractor que**

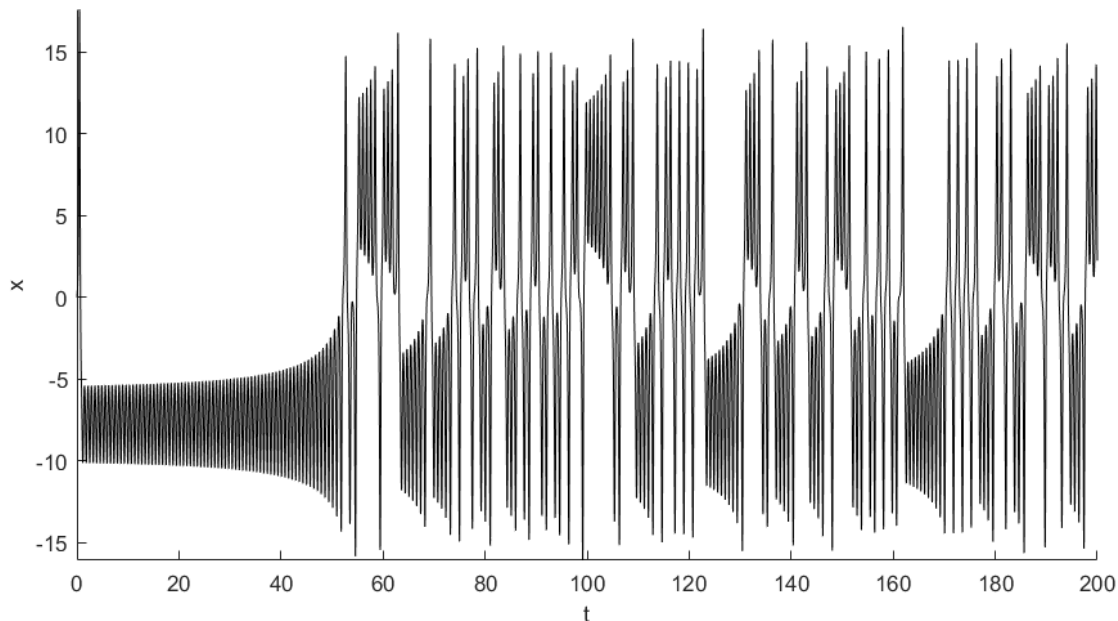


Figura 14.7: Serie temporal de la variable x de una órbita que converge al atractor caótico de Lorenz.

queda es el **Atractor de Lorenz**.

14.1.4. Estructura del atractor de Lorenz

En un cierto rango de parámetros $r > r_A$, no hay puntos de equilibrio atractores ni ciclos atractores. En sus estudios numéricos, Lorenz no pudo seguir usando herramientas estándar y se enfrentó a lo que parecía una **paradoja**: Todas las trayectorias permanecen confinadas en una región acotada ...y son eventualmente atraídas a un conjunto de volumen cero, un atractor extraño \mathcal{A} . ¿Cómo es \mathcal{A} ? ¿Y cómo se mueven las órbitas una vez que llegan a \mathcal{A} ?

Lorenz fijó los valores de parámetros en $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28 > r_H$ e integró numéricamente desde una condición inicial cercana a $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Lorenz sabía que algo raro tenía que ocurrir, pero tuvo que tener cuidado de interpretar correctamente los cálculos numéricos. Esto era a comienzos de los años 60! Al graficar las series de tiempo de sus soluciones emergieron comportamientos como el de la figura 14.7, en donde ploteamos solamente la coordenada y versus t .

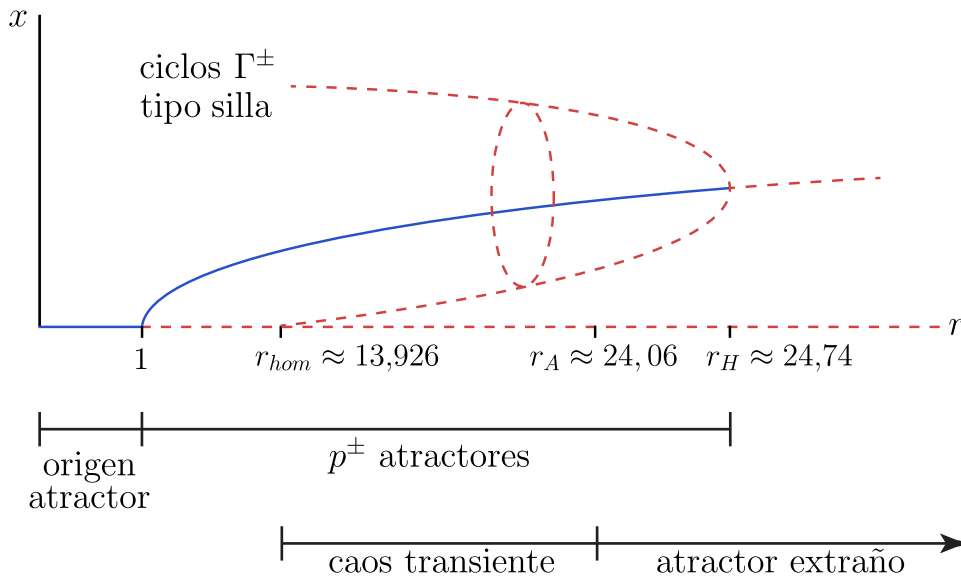


Figura 14.8: Diagrama de bifurcación parcial del modelo de Lorenz.

Inicialmente se observan oscilaciones con una amplitud creciente, seguidas por cambios de signo en y , y luego más oscilaciones a intervalos irregulares. Estas oscilaciones irregulares persisten para $t \rightarrow \infty$ y nunca se vuelven a repetir.

Al visualizar la misma órbita en el espacio de fase tridimensional aparece la “mariposa” de Lorenz de la figura 14.9. La trayectoria cruza de un “ala” a la otra indefinidamente sin abandonar nunca el atractor. El número de vueltas alrededor de p^+ o p^- antes de cambiar de “ala” posee características de variable aleatoria. Esto sucede pues en $r = r_{hom}$ se crean un número infinito de objetos de tipo silla; luego, las trayectorias son repelidas desde un objeto inestable a otro como en un juego de *pinball*. Además, como el sistema es disipativo, las trayectorias están confinadas (en el largo plazo) a un conjunto acotado de volumen cero. Sin embargo, permanecen para siempre en este conjunto sin autointersectarse ni intersectar a otras órbitas. Como consecuencia, el atractor extraño \mathcal{A} presenta características de comportamiento caótico...

- **Transitividad:** Las órbitas recorren todo \mathcal{A} como si se “esparcieran” eternamente por toda la mariposa de Lorenz.
- **Dependencia sensitiva a las condiciones iniciales:** Soluciones cerca-

nas se separan exponencialmente rápido; ver de nuevo <http://youtu.be/97ryBYOTQ0o>.

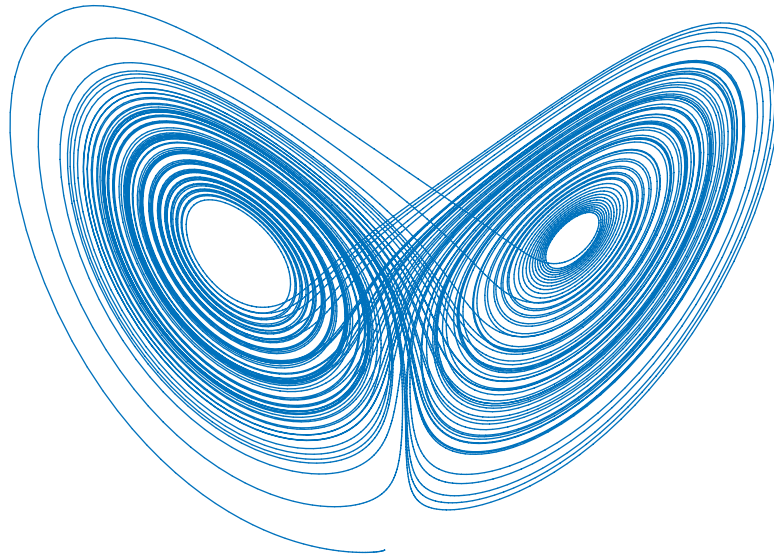


Figura 14.9: Una órbita en el atractor de Lorenz en el espacio tridimensional (x, y, z) .

Para probar que un sistema dinámico posee un atractor extraño, uno puede seguir los siguientes pasos generales:

1. Encuentre una región atrapadora \mathcal{M} ;
2. Muestre que \mathcal{M} contiene un conjunto invariante caótico atrayente, es decir, con las propiedades descritas justo arriba;
3. Luego, el conjunto atractor es $\mathcal{A} \equiv \bigcap_{t>0} \varphi_t(\mathcal{M})$ si el sistema viene definido por un flujo φ_t .

Cada órbita en \mathcal{A} da un número finito de vueltas alrededor de una rama (o ala), y luego cambia a la otra rama. Y repite de nuevo el mismo proceso... infinitas veces. Luego, el atractor \mathcal{A} está formado por dos superficies que se fusionan en la parte baja. Lorenz habló de una superficie “ramificada” S . El borde de esta superficie está formado por la variedad inestable del origen, esto es, $\partial S \subset W^u(\mathbf{0})$. Sin embargo, el hecho de que S conste de dos láminas que se fusionan en la parte

baja presenta un dilema, pues debe haber unicidad de soluciones: Trayectorias no pueden cruzarse ni unirse! La explicación que dio Lorenz fue que las dos superficies se unen sólo *en apariencia*. La “ilusión” se debe a la fuerte contracción de volumen del flujo y por baja resolución numérica.

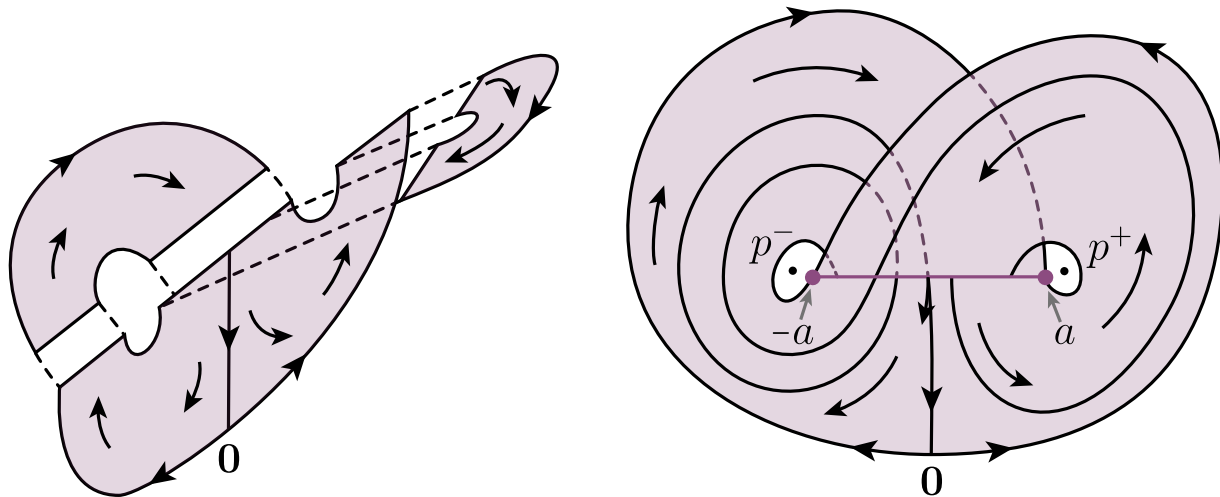


Figura 14.10: Bosquejo cualitativo de la estructura geométrica del atractor de Lorenz.

Reemplacemos el flujo reversible 3D de (14.1) por un *semiflujo* en S , es decir, las soluciones se definen para $t > 0$ solamente. Una semiórbita positiva arbitraria en S eventualmente debe llegar al intervalo de ramificación $[-a, a]$ de la figura 14.10. En ese momento, la órbita “escoge” a cuál rama irá a continuación: si se queda en la misma rama o si cambia a la otra. Además, esta solución se mueve (caóticamente) desde una rama a otra a medida que viaja por el atractor sin intersectarse con otras ni consigo misma (por la propiedad de unicidad de soluciones). Este comportamiento también es el mismo **para cualquier otra trayectoria** en \mathcal{A} . Luego, la superficie S debe estar formada por un número infinito no-numerable de capas o láminas, al cual Lorenz llamó “*un complejo infinito de superficies*.” En resumen, el atractor de Lorenz \mathcal{A} es un conjunto de puntos con volumen cero pero área infinita; una estructura de superficies que se “acumulan” en sí mismas. De hecho, el atractor de Lorenz es un fractal cuya dimensión (no entera) es $\dim \mathcal{A} \approx 2,05$. Hay varias maneras de definir la dimensión fractal de un objeto y están disponibles en muchos textos. Busca tu favorita!

14.1.5. El mapeo de Lorenz

Al estudiar detenidamente el comportamiento de las soluciones en el atractor extraño, Lorenz observó que una “órbita cambia de espiral sólo después de sobrepasar una distancia crítica del centro y esto determina el punto en el cual se entra a la siguiente espiral. A su vez, esto determina el número de circuitos que se ejecutan antes de volver a cambiar de espiral.” Esto le dio la idea para una *codificación de una trayectoria*: Una propiedad de un “circuito” dado predice la misma propiedad en el siguiente “circuito.” Por ejemplo, si z_n es el n -ésimo máximo local de la variable $z(t)$, Lorenz observó que el valor de z_n predice el siguiente máximo local z_{n+1} . ¿Cómo es esto posible?

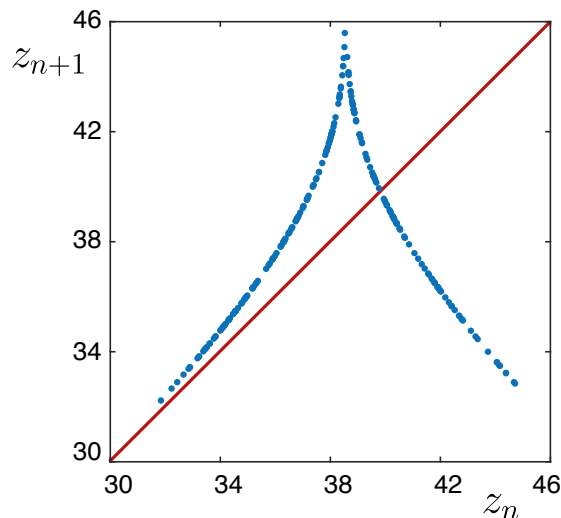


Figura 14.11: Gráfica del mapeo de Lorenz.

Lorenz integró numéricamente por largo tiempo t y midió los máximos locales de $z(t)$. Obtuvo un gráfico z_{n+1} vs z_n como el de la figura 14.11. En ella, los datos parecen coincidir con una curva $z_{n+1} = f(z_n)$, la cual se conoce como **Mapeo de Lorenz**. De esta manera, Lorenz pudo extraer orden del caos a partir de una serie temporal

$$\tau = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_N\}.$$

Observemos que el gráfico de $f(z_n)$ en rigor no es una curva. Tiene un grosor muy pequeño. Luego, $f(z)$ no es una función bien definida. Sin embargo, el trata-

miento como curva resulta conveniente, pues nos entrega información aproximada sobre el comportamiento de una órbita, con tan solo observar una sola variable (y no las tres). Por otro lado, notemos que el mapeo de Lorenz no es un mapeo de Poincaré. Si así fuera, este mapeo tomaría un punto en una superficie transversal 2D, especificado por 2 coordenadas, y nos diría cómo esas dos coordenadas cambian después del primer retorno a la misma superficie. Sin embargo, el mapeo de Lorenz caracteriza la órbita por sólo un número, no dos. En consecuencia, este enfoque funciona sólo si el atractor es muy “delgado”, o sea, cercano a algo bidimensional.

14.1.6. Exponentes de Lyapunov

Podemos cuantificar la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en el sistema de Lorenz —y, de hecho, en cualquier otro sistema— al medir la tasa (promedio) en que dos órbitas cercanas se alejan una de la otra. Sea $\mathbf{x}(t)$ un punto en una órbita en el atractor en el instante t . Si $\delta(t) > 0$ es un desplazamiento suficientemente pequeño, entonces $\mathbf{x}(t) + \delta(t)$ es un punto cercano a $\mathbf{x}(t)$ en el instante t ; podemos considerar, por ejemplo, que $\|\delta_0\| = 10^{-15}$, donde $\delta_0 = \delta(0)$. En el caso del sistema de Lorenz, se puede comprobar que $\delta(t)$ crece exponencialmente de la forma $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t}$, donde $\lambda = 0,9$. Luego, órbitas vecinas se separan exponencialmente rápido. Al graficar $\ln \|\delta(t)\|$ vs t obtenemos una curva parecida a una recta con pendiente $\lambda > 0$. Esta curva tiene altibajos pues la divergencia exponencial varía a lo largo del atractor. La divergencia tiene un máximo cuando la separación es comparable con el “diámetro” del atractor. El número λ se conoce como **exponente de Lyapunov**.

Caso general. Los exponentes de Lyapunov pueden definirse en un contexto más general. Por ejemplo, consideremos el campo de vectores

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ la órbita que pasa por el punto $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Consideremos la linealización del flujo a lo largo de $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, la cual viene dada por $\dot{\mathbf{u}} = Df(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Este último, al ser un sistema lineal, posee una matriz fundamental de soluciones, la que llamaremos $X(t; \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$. Si $\mathbf{v} \neq 0$ es un vector en \mathbb{R}^n , definimos

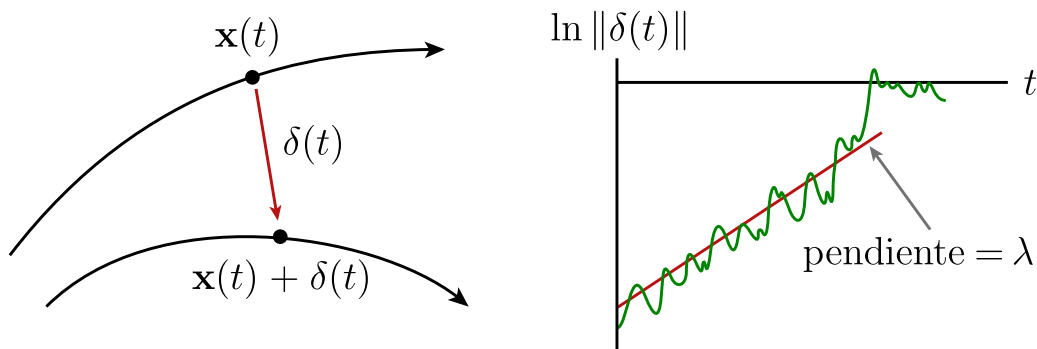


Figura 14.12: Exponentes de Lyapunov en un sistema a tiempo continuo.

el *coeficiente de expansión* a lo largo de la órbita de \mathbf{x}_0 en la dirección dada por \mathbf{v} como

$$\mu_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \frac{\|X(t; \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Este coeficiente mide qué tan grande es la tendencia de las soluciones (en una aproximación lineal) a desviarse en la dirección del vector \mathbf{v} en cada punto de la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ (parametrizada por t) del sistema original $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$. Luego, el *exponente de Lyapunov* en la dirección \mathbf{v} a lo largo de la órbita de \mathbf{x}_0 queda definido por

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mu_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}),$$

es decir, como un promedio temporal (en el largo plazo) del logaritmo del coeficiente de expansión.

En general, para un sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, podemos definir n exponentes de Lyapunov distintos, dados por las n direcciones linealmente independientes en una base de \mathbb{R}^n .

Demos una interpretación de esta cantidad $\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})$ con la ayuda, de nuevo, del modelo de Lorenz. Consideremos una esfera infinitesimal de condiciones iniciales en $t = 0$. Para $0 < t \ll 1$, podemos esperar que esta esfera se deforme en todas las direcciones en un elipsoide infinitesimal. Para tiempos mayores $t \gg 1$, el diámetro del elipsoide es controlado por el exponente de Lyapunov $\lambda(\mathbf{v})$ “más positivo”. Luego, basta que tan solo uno de los n exponentes de Lyapunov sea positivo para que exista una expansión a una tasa exponencial en alguna dirección a lo largo

de la órbita considerada del sistema. En el caso del atractor de Lorenz, el valor de λ obtenido es el exponente de Lyapunov positivo *más grande*.

Este hecho trae consecuencias importantes. Si en $t = 0$ tenemos dos mediciones iniciales (i.e., condiciones iniciales) cercanas con un error $\|\delta_0\|$, entonces para $t > 0$ la discrepancia crece a una tasa $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t}$. En particular, si $a > 0$ es la tolerancia para hacer predicciones —i.e., nuestra predicción del futuro es aceptable solo si $\|\delta(t)\| \leq a$ —, entonces definimos el *horizonte de tiempo* como el instante $t_{horizon}$ tal que nuestra predicción falla para $t > t_{horizon}$. En particular, se tiene

$$t_{horizon} \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \log \frac{a}{\|\delta_0\|}\right).$$

Por lo tanto, no importa qué tan chica sea la discrepancia inicial δ_0 , no podremos predecir por un tiempo más largo que unos múltiplos de $1/\lambda$. Por esta razón, la existencia de (al menos) un exponente de Lyapunov positivo es evidencia de que el sistema posee sensibilidad a las condiciones iniciales.

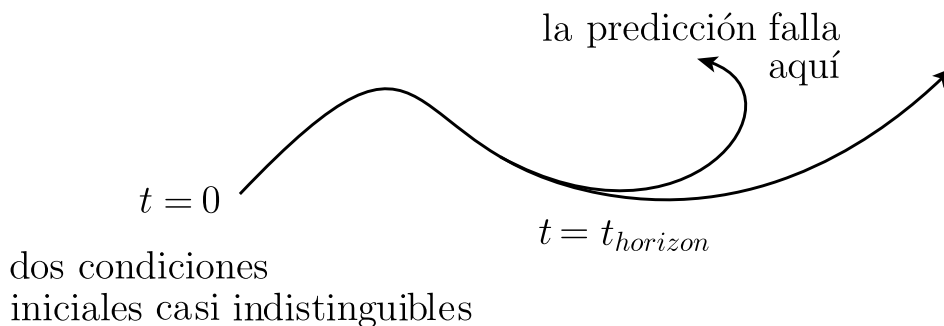


Figura 14.13: Horizonte de tiempo para hacer predicciones en un sistema con sensibilidad a las condiciones iniciales.

Exponentes de Lyapunov para series de tiempo. En la mayoría de los casos, el exponente de Lyapunov debe ser calculado numéricamente. Si tenemos una serie de tiempo unidimensional $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ (proveniente de una muestra de datos de un experimento, o del cálculo numérico de una órbita de un sistema de ecuaciones diferenciales), podemos calcular su exponente de Lyapunov como un indicador de si esta serie proviene de un sistema caótico. Supongamos que los instantes de tiempo en los que fueron registrados los valores de la secuencia X

están equispaciados, donde τ es el intervalo de tiempo entre dos observaciones consecutivas.

Si el sistema se comporta caóticamente, la divergencia de trayectorias cercanas se va a manifestar de la siguiente manera: Si seleccionamos un valor de la secuencia X , digamos x_i , y luego buscamos en la secuencia otro valor que sea cercano, digamos x_j , entonces la secuencia de diferencias

$$\begin{aligned} d_0 &= |x_j - x_i| \\ d_1 &= |x_{j+1} - x_{i+1}| \\ d_2 &= |x_{j+2} - x_{i+2}| \\ &\vdots \\ d_n &= |x_{j+n} - x_{i+n}| \end{aligned} \tag{14.2}$$

debe crecer exponencialmente, al menos en promedio, a medida que n crece. Más formalmente, asumimos que

$$d_n = d_0 e^{n\lambda} \tag{14.3}$$

o, después de tomar logaritmos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{d_n}{d_0} \right). \tag{14.4}$$

En la práctica, tomamos (14.4) como la definición del exponente de Lyapunov λ de la sucesión X . Si λ es positivo, hay evidencia de sensibilidad a las condiciones iniciales. En este método estamos esencialmente localizando dos trayectorias vecinas en el espacio de estados y luego siguiendo las diferencias entre las dos órbitas.

OBSERVACIONES.

1. Hemos asumido una tasa exponencial de separación entre órbitas vecinas. Una forma de examinar la validez de este supuesto es plotear el logaritmo natural de la diferencia d_m como función del índice m . Si la divergencia es exponencial, los puntos graficados caerán aproximadamente sobre una línea recta, cuya pendiente es el exponente de Lyapunov.

2. El valor de λ , en general, depende del valor de x_i escogido como valor inicial. Para caracterizar el atractor, usualmente queremos un valor promedio para λ . Podemos entonces calcular

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda(x_i),$$

tomando el promedio sobre un número grande N de valores iniciales distribuidos sobre el atractor.

3. Para sistemas acotados que son de nuestro interés, el número n en (14.2) no puede ser muy grande. Dado que los valores de la sucesión X están limitados en tamaño para un sistema acotado, las diferencias d_i no pueden ser más grandes que el diámetro del atractor caótico (ej, la diferencia entre el mayor y el menor valor de x). Luego, el crecimiento exponencial en d no puede durar para siempre, y debemos limitar n . Una forma de hacerlo es graficar los valores de d_i y ver cuándo estos valores d dejan de crecer. Por otro lado, si d_0 se hace más pequeño al tomar x_j más cercano en valor a x_i , entonces la divergencia exponencial continuará para valores mayores de n .
4. Si la secuencia de valores X corresponde a comportamiento periódico, los valores de d serán muy chicos o 0 pues la trayectoria regresa exactamente al mismo conjunto de puntos. Luego, este método nos debería dar un valor promedio de $\lambda = 0$, reflejando el hecho de que los d_i no crecen ni decrecen en tamaño. Considerando una dirección transversal a una órbita periódica estable en el espacio de fase, el exponente de Lyapunov debe ser negativo, indicando que trayectorias cercanas son atraídas a la órbita estable. Sin embargo, la serie de tiempo de la trayectoria misma no nos puede decir cómo las órbitas vecinas se aproximan al ciclo.
5. Hay restricciones sobre el valor de j que debe ocuparse para un x_i dado en (14.2). Si la serie de tiempo proviene de un proceso que varía en forma suave en el tiempo o de un muestreo poco espaciado, entonces no debemos escoger j muy cercano a i , pues los dos valores ocurren cerca en el tiempo. Si los dos valores son cercanos en el tiempo, esperamos que el comportamiento

siga siendo cercano, y acabaríamos con un valor para $\lambda(x_i)$ anormalmente pequeño. Podemos evitar este problema al imponer que x_j no sea tan cercano a x_i en la secuencia X . Existen varios criterios para escoger una separación mínima. En general, un ploteo de los valores de la serie como función del tiempo nos permitirá determinar, al menos aproximadamente, cuál debe ser la separación mínima en el tiempo. Por supuesto, si los datos provienen de puntos en una sección de Poincaré, los cuales ya están separados en el tiempo, entonces este problema desaparece.

6. También debemos considerar los límites prácticos para d_0 . El valor de d_0 no puede ser menor que la precisión (o tolerancia mínima) con que los datos han sido almacenados. Por ejemplo, si los datos fueron registrados con solo tres decimales, entonces no tendría sentido considerar una diferencia menor que 0.001.

14.2. El sistema de Rössler

El sistema de Rössler se define como el campo de vectores tridimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c). \end{cases}$$

Este sistema es conocido como uno de los campos vectoriales más sencillos que pueden exhibir caos. Es incluso más sencillo que el sistema de Lorenz. La manera en que este sistema pasa de un comportamiento “sencillo” a uno caótico es distinta al modelo de Lorenz, pero igualmente se puede explicar como una secuencia de transiciones a medida que un parámetro (en este caso c) se incrementa. Esta secuencia de bifurcaciones se conoce como **cascada de duplicaciones de período** y se muestra en la figura 14.14.

Para c relativamente pequeño existe una órbita periódica atractora que se vuelve inestable en una *bifurcación de duplicación de período*. No podemos decir mucho en este punto sobre esta bifurcación particular, más que se trata de un evento que se manifiesta en la aplicación de retorno de Poincaré asociada a esta solución periódica. El principal cambio que ocurre en esta bifurcación es que el

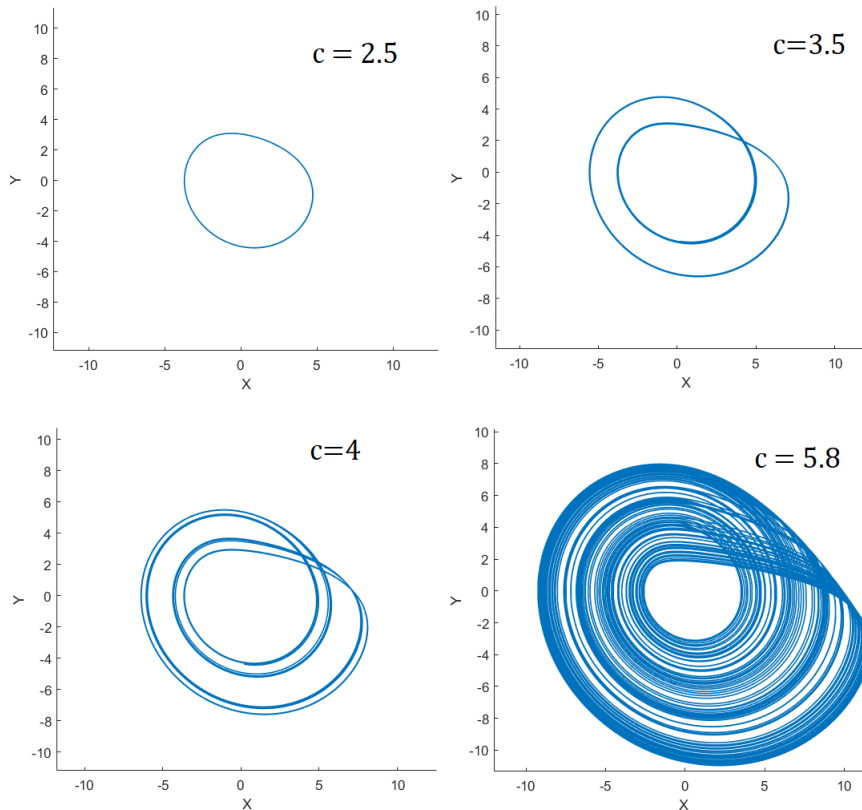


Figura 14.14: Ruta al caos por duplicación de período en el modelo de Rössler.

atractor (el ciclo original) es remplazado por otra órbita periódica del doble de período que da vueltas alrededor dos veces antes de cerrarse. Este atractor es luego remplazado por una órbita periódica que da 4 vueltas alrededor antes de cerrarse, y así sucesivamente, a medida que c aumenta. Este proceso, conocido como **ruta al caos por duplicación de período**, culmina con la creación de un atractor caótico, el cual existe para $a = b = 0,2$, $c = 5,7$; ver figura 14.15.

14.2.1. Estirar y doblar: la receta para crear caos.

La duplicación de período en el sistema de Rössler se debe a un mecanismo de “estirar y doblar”. La figura 14.16(a) muestra el flujo cerca de una trayectoria típica. En una dirección hay una *contracción hacia* el atractor, y en la otra dirección hay una *expansión a lo largo del* atractor. La figura 14.16(b) destaca la

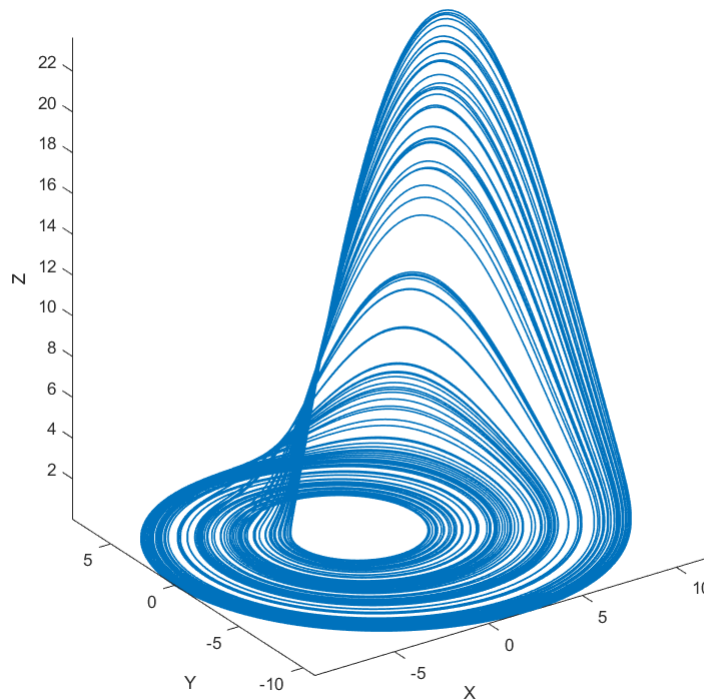


Figura 14.15: El atractor caótico de Rössler.

“lámina” en donde hay **dependencia sensitiva a las condiciones iniciales**: Dos puntos iniciales muy cercanos van a tener órbitas que eventualmente se van a separar exponencialmente. Estas son las direcciones a lo largo de las cuales toma lugar un *estiramiento* del atractor. A continuación, el flujo dobla la parte más ancha de la lámina en dos capas y luego se da la vuelta para regresar muy cerca de la parte más estrecha; ver figura 14.17(a).

Pero el proceso no se detiene allí:

- (a) El flujo se expande a lo largo del atractor doblando una lámina/capa en dos y luego contrae ambas capas resultantes acercándolas una a la otra. De esta forma, el flujo ha tomado una capa y ha producido dos capas después de un circuito a lo largo del atractor.
- (b) Repitiendo el proceso, aquellas dos capas producen cuatro...
- (c) ...y luego producen ocho, y así sucesivamente; ver figuras 14.17(b)-(c).

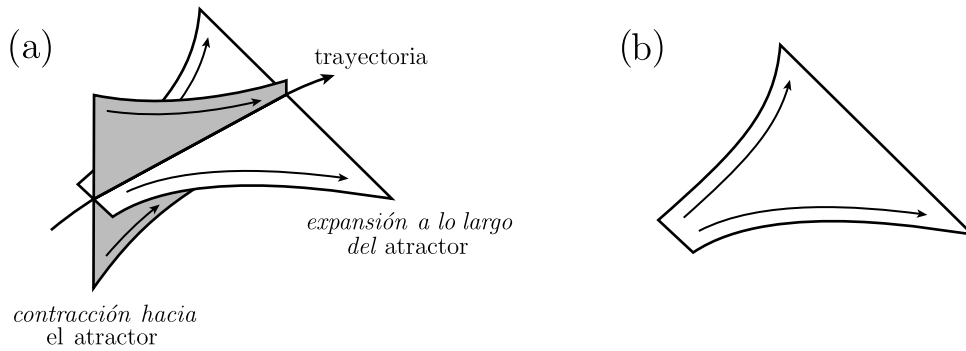


Figura 14.16: Compresión y expansión cerca de una órbita.

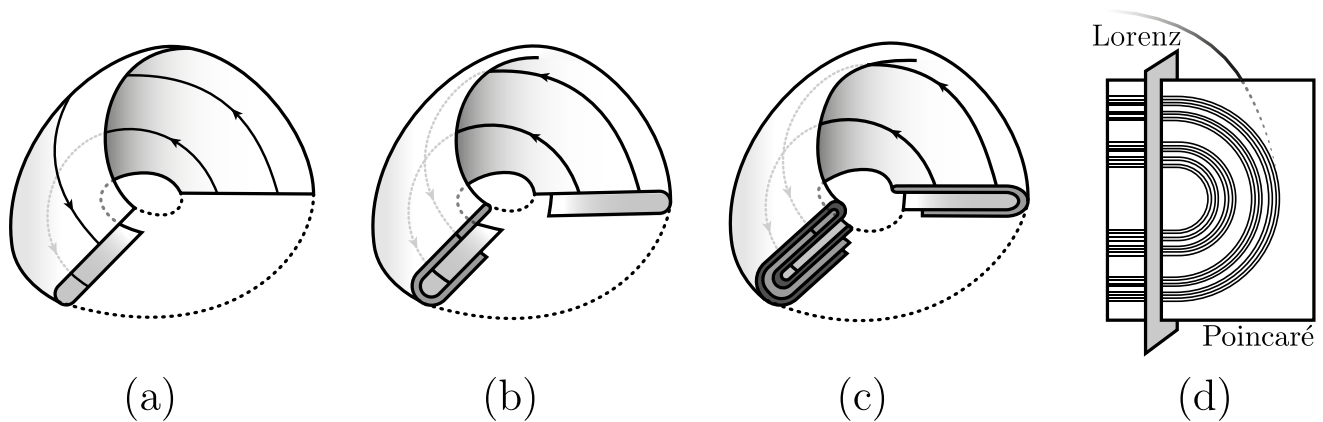


Figura 14.17: Gracias al mecanismo de estirar y doblar, el atractor caótico de Rössler tiene la estructura topológica de un conjunto de Cantor de superficies y es una manifestación de la presencia de herraduras de Smale en secciones de Poincaré.

Esto es análogo a tener un panadero amasando una masa de hojaldre. En este caso, la masa se compone de las trayectorias del sistema. En definitiva, el flujo genera un complejo infinito de superficies apretadas unas con otras: esto es el atractor caótico (!); ver figura 14.17(d).

Dinámica de herradura en la sección de Poincaré. La dinámica caótica en el atractor es una manifestación de la presencia de ciertas estructuras que parecen *herraduras*, las cuales son “visibles” al cortar el atractor transversalmente con una sección de Poincaré; ver figura 14.17. De hecho, la dinámica de herraduras es una característica general de todos los comportamientos caóticos, y no

es exclusivo del atractor de Rössler. La identificación de estas herraduras provee un esquema que permite demostraciones matemáticas de muchos aspectos importantes de la dinámica del sistema. Y además, tiene el beneficio adicional de la reducción de la dimensión del problema original al análisis de un mapeo bidimensional.

Reducción a un mapeo unidimensional. Las trayectorias en el sistema de Rössler son atraídas hacia el atractor caótico muy rápidamente, después de lo cual lo siguen en la dirección del flujo indicada por las flechas en las ilustraciones. Dado que esta atracción es tan fuerte, podemos hacer una *aproximación* del comportamiento del sistema al considerar solamente este objeto doblado y tomar una sección transversal adicional en él (sección de Lorenz). Esto resulta en un *mapeo unidimensional* en el que encontramos un conjunto infinito de puntos separados por espacios vacíos de varios tamaños: un conjunto de Cantor. Esto nos dice entonces que el atractor de Rössler tiene la estructura topológica de un conjunto de *Cantor de superficies*. De hecho, localmente, el atractor es el producto cartesiano de un conjunto de Cantor y una banda.

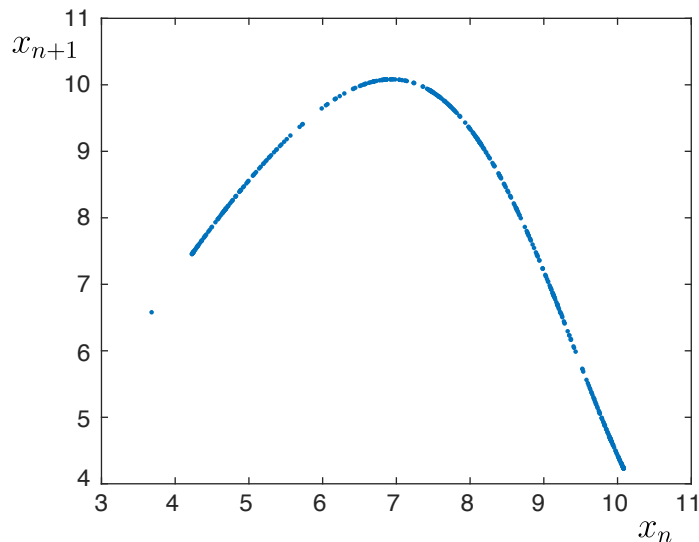


Figura 14.18: Para $c = 5$ la gráfica del mapeo unidimensional x_{n+1} versus x_n de puntos en el atractor de Rössler se ve como una parábola invertida.

El mapeo unidimensional definido en la sección de Lorenz resulta de graficar x_{n+1} versus x_n , donde x_n denota el n -ésimo máximo local de los valores de $x(t)$

para una trayectoria en el atractor. La gráfica que emerge se ve justamente como una parábola invertida en la figura 14.18; hemos encontrado un orden o patrón en el caos (!!!).

En resumen, esta reducción de un campo de vectores tridimensional a una aplicación bidimensional (a través de una sección de Poincaré) y luego a un mapeo unidimensional nos entrega una muy buena *aproximación* para comprender la dinámica en el atractor de Rössler.

14.3. Ecuación de Duffing

En 1918 Duffing introdujo un modelo de oscilador no lineal con un término cúbico de rigidez para describir el efecto “endurecedor” de un resorte observado en muchos problemas mecánicos. Desde entonces, esta ecuación, junto con la ecuación de Van der Pol, se ha vuelto uno de los ejemplos más comunes en textos de oscilaciones no lineales y artículos de investigación. Aquí discutimos una modificación de la ecuación de Duffing convencional en la cual el término de rigidez lineal es negativo. La ecuación que resulta describe la dinámica de una viga o placa doblada cuando se considera solo un modo de vibración. El modelo viene dado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden no autónoma:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t). \quad (14.5)$$

Mecánicamente, si $\delta = \gamma = 0$, el modelo representa un cuerpo sometido a una fuerza conservativa con un potencial de doble pozo; si $\delta > 0$, la viga presenta rigidez o resistencia al movimiento, por lo que el sistema se vuelve disipativo. El término no autónomo $\cos(\omega t)$ en (14.5) representa una fuerza externa actuando periódicamente sobre el cuerpo, en este caso de forma cosenoidal. Si $\gamma = 0$, las trayectorias de (14.5) viven en el plano \mathbb{R}^2 y se muestran en la figura 14.19 para $\delta > 0$ (caso disipativo): el origen es un punto silla, y hay dos focos estables a cada lado.

Consideremos ahora $\gamma \neq 0$. La ecuación (14.5) se puede reescribir como un sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = u - u^3 + \delta v + \gamma \cos(\omega\theta), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (14.6)$$

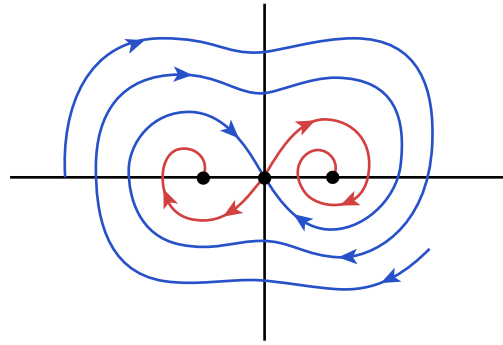


Figura 14.19: Retrato de fase de la ecuación de Duffing sin fuerza externa ($\gamma = 0$) y coeficiente de rigidez $\delta > 0$.

Aquí $(u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T$ es el círculo unitario de período $T = 2\pi/\omega$. Este producto cartesiano es un *modelo de anillo* tridimensional donde viven las trayectorias de (14.6); ver figura 14.20.

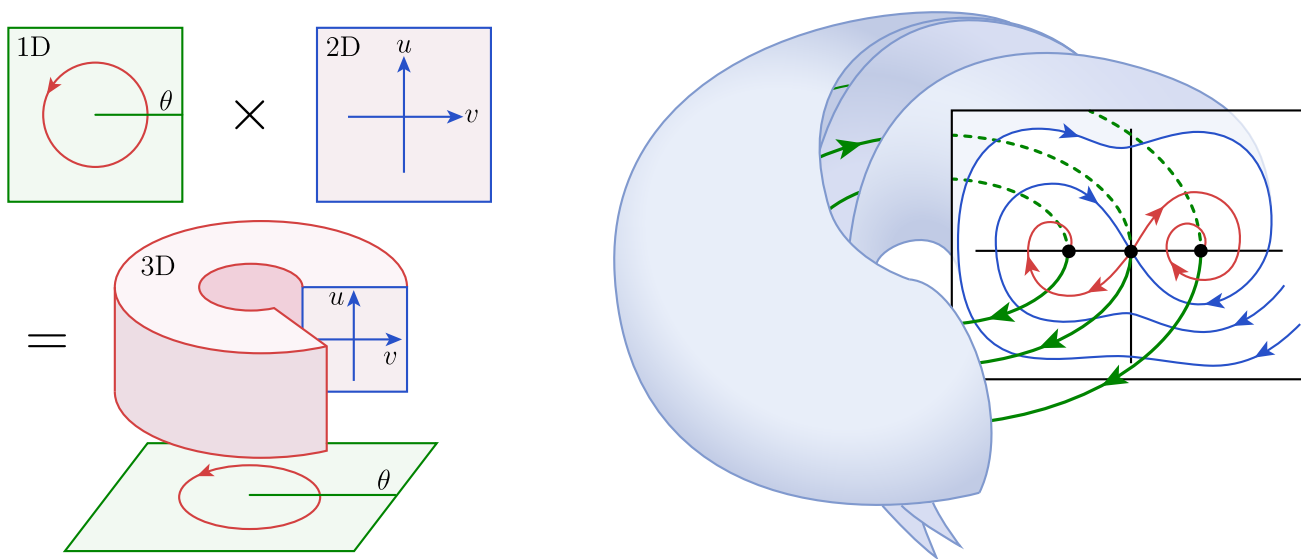


Figura 14.20: Izquierda: Las órbitas de (14.6) viven en un “anillo tridimensional” $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Derecha: Bosquejo esquemático de las soluciones periódicas de (14.6) para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño.

En (14.6) escogemos una sección transversal $\Sigma = \{(u, v, \theta) : \theta = 0\}$ y consideramos la aplicación de retorno de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Se puede demostrar que P está definido globalmente. Claramente, P depende de los parámetros γ, δ, ω , pero en lo que sigue consideramos que $\delta > 0$ y $\omega > 0$ están fijos y variamos γ ;

por eso, escribiremos $P = P_\gamma$.

P_0 es solamente el mapeo del flujo cada $2\pi/\omega$ unidades de tiempo del problema sin fuerza externa, i.e., con $\gamma = 0$. Los puntos de equilibrio de (14.5) con $\gamma = 0$ corresponden a órbitas periódicas de (14.6); y su estabilidad se preserva. En efecto, para pequeños valores de $\gamma > 0$, los dos focos estables del caso $\gamma = 0$ en la figura 14.19 son órbitas periódicas atractoras de período $2\pi/\omega$ (o período 1 para P_γ) y el punto silla se vuelve una órbita de tipo silla. De esta forma, P_γ sigue teniendo tres puntos fijos hiperbólicos. Un bosquejo cualitativamente equivalente de las trayectorias en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ y de la aplicación de Poincaré para $0 < \gamma$ pequeño se muestra en la figura 14.20.

A medida que γ se incrementa, ocurre una cascada de duplicación de período iniciada en las órbitas periódicas estables —i.e., la misma ruta al caos que en el modelo de Rössler—, la que culmina con la aparición de comportamiento caótico y soluciones aperiódicas.

El cuadro superior izquierdo en la figura 14.21 muestra la proyección de una solución de (14.6) al plano (u, v) en el régimen caótico. Notemos que las autointersecciones de la solución no son tales, sino que son un producto de la proyección de una órbita en un espacio 3D al plano 2D (u, v) . Esta trayectoria está “visitando” un conjunto caótico que vive en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Para visualizarlo, simplemente tomamos esta misma solución y consideramos su órbita bajo la aplicación de retorno de Poincaré en la sección transversal Σ . La figura que emerge es la del objeto extraño en el cuadro superior derecho de la figura 14.21. Al igual que el atractor de Lorenz y el atractor de Rössler, este objeto extraño posee una fina estructura autosimilar o fractal, como se aprecia en las imágenes inferiores de la figura 14.21, la que continua a escalas arbitrariamente pequeñas (pero es visible hasta donde lo permite la resolución de nuestros cálculos numéricos).

La estructura del objeto extraño se debe a un complicado arreglo de las variedades estable e inestable de la órbita periódica silla de (14.6), o equivalentemente las del punto silla en la aplicación de Poincaré. Estas variedades forman una intrincada red de (infinitas) intersecciones que da lugar al caos. Un bosquejo de este arreglo, conocido como **estructura homoclínica de Poincaré**, se muestra en la figura 14.22: El comportamiento de una trayectoria vecina es un acercamiento asintótico en espiral a lo largo de la cara “no enredada” de la variedad estable

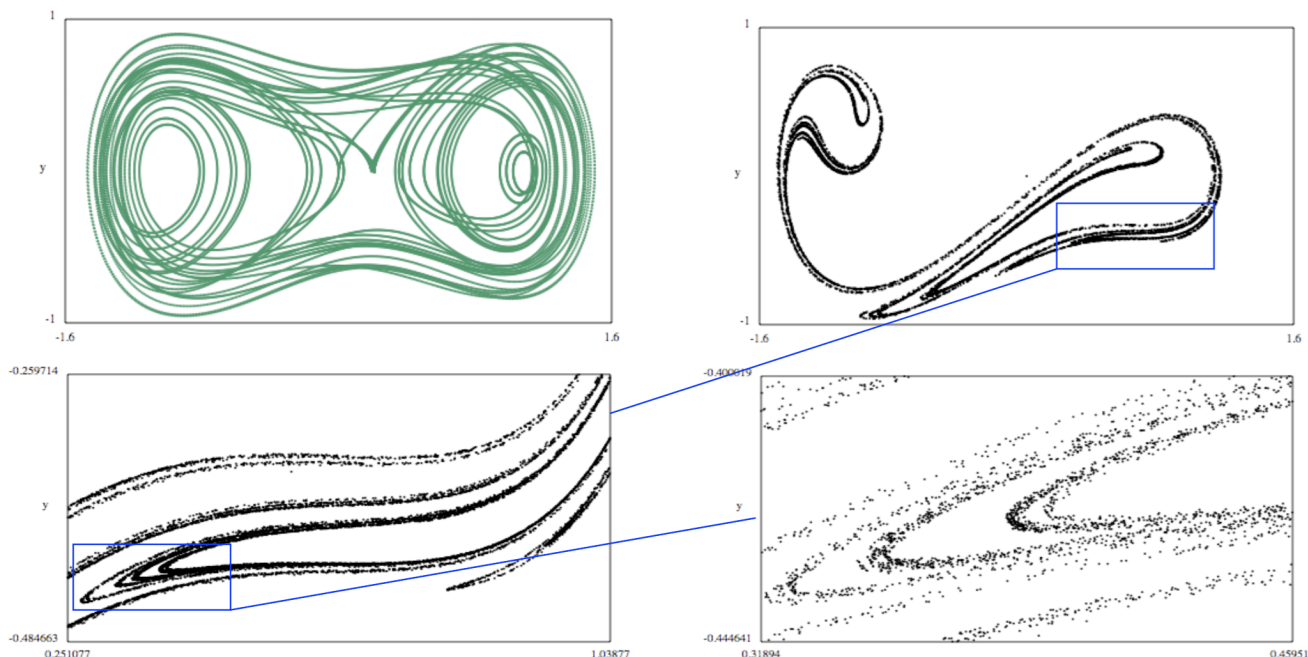


Figura 14.21: Una órbita caótica en la ecuación de Duffing (arriba, izquierda); y el correspondiente atractor extraño de la aplicación de Poincaré (arriba, derecha), junto con ampliaciones (abajo) que muestran su naturaleza fractal. Imagen tomada de P. HOLMES, *The dynamical legacy of Liapunov and Poincaré: Reflections on stability, chaos and randomness*, ASME IDETC/CIE Conference, San Diego, Aug 31–Sept 2, 2009.

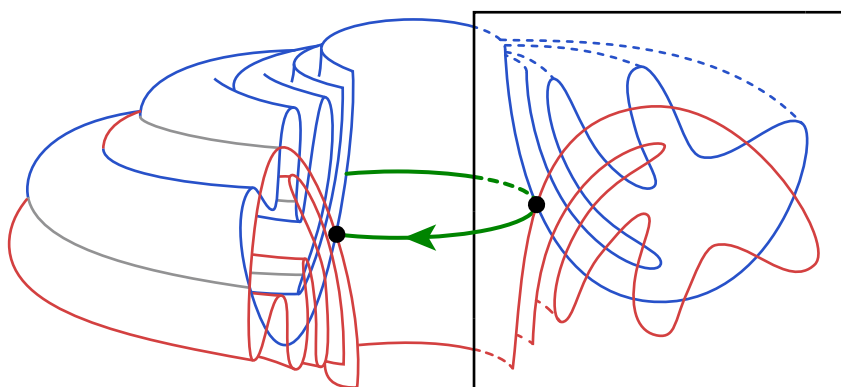


Figura 14.22: Bosquejo esquemático del enredo homoclínico de Poincaré en la sección transversal y la correspondiente organización de variedades invariantes en el espacio 3D.

(superficie azul), seguido de un lapso de movimiento caótico, atrapado dentro del enredo de superficies, y finalmente un escape asintótico en espiral a lo largo de la

mitad no enredada de la variedad inestable (superficie azul). De esta forma, este “enredo” homoclínico provee un modelo geométrico para el caos.

14.4. Ejercicios

Los siguientes problemas propuestos están todos asociados a las ecuaciones de Lorenz. La excepción es la pregunta 8.

1. Considerando la función de Lyapunov $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$, demuestre que el origen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es un equilibrio globalmente estable si $r < 1$.
2. Verifique que el origen sufre una bifurcación pitchfork en $r = 1$.
3. Si $r > 1$, demuestre que el origen es una silla hiperbólica.
4. Demuestre que la ecuación característica para los valores propios de p^\pm es

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

5. Busque valores propios de p^\pm de la forma $\lambda = \pm i\omega$, donde $\omega \neq 0$, y demuestre que ocurre una bifurcación de Hopf cuando $r = r_H = \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$. Encuentre también el tercer valor propio de los equilibrios p^\pm .
6. (Horizonte de tiempo) Para ilustrar el “horizonte de tiempo” después del cual predecir se vuelve imposible (sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales), integre numéricamente (use un computador) las ecuaciones de Lorenz para $r = 28$, $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. Comience dos trayectorias desde condiciones iniciales cercanas, y grafique $x(t)$ vs t para ambas en el mismo gráfico.
7. (Experimentos numéricos) Para cada uno de los valores de r dados abajo, use un computador para explorar la dinámica del sistema de Lorenz, asumiendo $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. En cada caso, grafique $x(t)$ vs t , $y(t)$ vs t , y x vs z . Investigue las consecuencias de escoger condiciones iniciales distintas y diferentes tiempos de integración. Además, en algunos casos, podría ser conveniente ignorar el comportamiento transiente, y graficar sólo el comportamiento sostenido en el largo plazo.

(a) $r = 10$. (b) $r = 22$ (caos transiente), (c) $r = 24,5$ (coexistencia de caos y equilibrios estables), (d) $r = 100$ (sorpresa), (e) $r = 126,52$, (f) $r = 400$.

8. Considere el campo de vectores escalar y lineal $\dot{x} = ax$, $x \in \mathbb{R}$, donde a es una constante. Demuestre que el exponente de Lyapunov de cada órbita de este sistema es a .

Bibliografía

- [1] R. H. Abraham and C. D. Shaw, *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Addison-Wesley, 1992.
- [2] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1992.
- [3] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Dynamical Systems. Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall, 1992.
- [4] L. Barreira & C. Valls, *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*, AMS, 2012.
- [5] N. L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- [6] F. Dumortier, *Singularities of Vector Fields*, Monografías de Matemática N° 32, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [7] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1986.
- [8] R. C. Hillborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*, 2da edición, Oxford University Press, 2000.
- [9] M. W. Hirsch, S. Smale & R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3rd edition, Academic Press, 2013.
- [10] K. Hoffman & R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd Edition, Pearson, 1971.
- [11] D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, 4th Edition, Oxford University Press, 2007.
- [12] A. N. Kolmogorov & S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, 1975.

- [13] S. Lang, *Linear Algebra*, 3rd Edition, Springer, 1987.
- [14] J. Meiss, *Differential Dynamical Systems*, SIAM, Revised edition, 2017.
- [15] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.
- [16] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1976.
- [17] J. Sotomayor, *Equacoes Diferenciais Ordinárias*, Livraria da Física Editora, 2011.
- [18] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, CRC Press, 2014.
- [19] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1990.