

Sistemas Dinámicos No Lineales y Caos

Pablo Aguirre

PRELUDIO

Estas notas están creadas para servir como acompañamiento en un curso de sistemas dinámicos no lineales y caos para estudiantes avanzados de pregrado y aquellos iniciando un postgrado en matemáticas. También puede ser útil para estudiantes avanzados e investigadores de física, química e ingeniería que usen sistemas dinámicos como herramientas/modelos en sus estudios. En este texto se pone énfasis en enseñar las técnicas y métodos que permitirán al estudiante el tomar un sistema dinámico específico (en la forma de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, flujos de campos vectoriales y/o composición de mapeos) y obtener información cuantitativa y cualitativa sobre el comportamiento de este sistema desde el punto de vista geométrico y analítico.

Los lectores promedio pueden no necesariamente poseer una formación formal completa en matemática, aunque sí son necesarios conocimientos sólidos de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, análisis real y nociones generales de topología.

La mayor parte de este texto no corresponde a una obra original, sino a una recopilación de extractos de diversos orígenes. Las principales fuentes en que se basa parcialmente cada capítulo son las siguientes:

- Capítulo 1: [7, 9, 11, 12].
- Capítulo 2: [3, 7, 8, 11, 12, 16, 17, 19].
- Capítulo 3: [3, 7, 8, 11, 12, 17].
- Capítulo 4: [6, 7, 11, 12, 19].
- Capítulo 5: [6, 7, 12].
- Capítulo 6: [3, 6, 7, 12].
- Capítulo 7: [3, 6, 7, 8, 9, 19].
- Capítulo 8: [4, 7, 9, 15, 18, 19].

- Capítulo 9: [7, 8, 9, 12].

Una lista más amplia de textos sugeridos se puede hallar en la Bibliografía al final de estos apuntes.

Hay que notar que las primeras versiones de estos apuntes fueron producidas entre 2020-2021 (en el marco de la pandemia y confinamientos por el coronavirus) para suplir las carencias de la docencia de emergencia a distancia. Como tal, estos apuntes fueron creados contra el tiempo y con insuficientes recursos tecnológicos. De seguro los estudiantes de esas primeras versiones debieron luchar para dar sentido a las imágenes hechas a mano y de baja calidad. A partir del 2023, sin embargo, contamos con excelentes figuras fabricadas mayormente por Dana Contreras y con aportes de Pablo Muñoz en algunas simulaciones específicas del sistema de Rössler, el mapeo logístico y el mapeo de Hénon. Les agradezco enormemente a ambos por su ayuda para incrementar sustancialmente el nivel didáctico de este material.

El texto que tienen en sus manos ha sido revisado y complementado gracias a los certeros aportes, observaciones y sugerencias de los estudiantes del curso. Agradezco en particular el valioso feedback del Prof. José Mujica quien revisó exhaustivamente el texto durante la versión 2020 del curso. Cualquier imperdonable error u omisión esencial deslizo que : siguiera existiendo en esta versión es enteramente dede do mi :::: resqo~>nsbilibiδ:::::::::::::::::::::::::::::

pablo aguirre
Valparaíso y Viña, MMXXIII.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Dos ejemplos introductorios	10
1.2. Primeras definiciones	12
1.2.1. Sistemas dinámicos a tiempo continuo	13
1.2.2. Sistemas dinámicos a tiempo discreto	16
1.3. ¿Qué (no) es caos?	19
1.4. Relaciones entre dinámica continua y dinámica discreta	22
1.5. Propiedades generales de los retratos de fase	23
1.6. Equivalencia y conjugación topológica	30
1.7. Ejercicios	38
2. Sistemas dinámicos a tiempo continuo	44
2.1. Estabilidad de puntos de equilibrio hiperbólicos	49
2.2. Flujos lineales n -dimensionales	52
2.2.1. Subespacios invariantes	55
2.3. Estabilidad de puntos de equilibrio hiperbólicos (continuación) . .	57
2.4. Variedades invariantes	61
2.5. Bifurcaciones	65
2.5.1. Bifurcación Silla-Nodo	67
2.5.2. Bifurcación Transcrítica	72
2.5.3. Bifurcación Pitchfork	74
2.5.4. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf	76
2.5.5. Bifurcaciones en sistemas n -dimensionales	82
2.6. Ejercicios	86

3. Sistemas dinámicos a tiempo discreto	97
3.1. Estabilidad de puntos fijos hiperbólicos	99
3.2. Estabilidad de órbitas periódicas	105
3.3. Variedades invariantes de puntos fijos	106
3.4. Bifurcaciones	108
3.4.1. Bifurcación silla-nodo	109
3.4.2. Bifurcación flip	111
3.4.3. Bifurcación Neimarck-Sacker	114
3.5. Ejercicios	119
4. Del campo de vectores a la aplicación de Poincaré	126
4.1. Estabilidad de órbitas periódicas	128
4.2. Teoría de Floquet	133
4.3. Variedades invariantes de órbitas periódicas	135
4.4. Bifurcaciones de órbitas periódicas	137
4.4.1. Bifurcación silla-nodo de ciclos	137
4.4.2. Bifurcación period-doubling de órbitas periódicas	137
4.4.3. Bifurcación de toro de órbitas periódicas	139
4.4.4. Bifurcación homoclínica	140
4.5. Caos en el sistema de Rössler	141
4.5.1. Estirar y doblar: la receta para crear caos	142
4.6. Ejercicios	146
5. Sistemas dinámicos caóticos	150
5.1. El mapeo logístico	150
5.1.1. Ruta al caos por duplicación de período	151
5.2. Una definición de caos	159
5.3. El conjunto invariante Λ para $r > 4$	164
5.4. Conjuntos hiperbólicos en \mathbb{R}	168
5.5. Exponentes de Lyapunov	169
5.5.1. Estimando exponentes de Lyapunov numéricamente	171
5.5.2. Escalamiento universal del exponente de Lyapunov	172
5.5.3. Comportamiento ergódico	174

5.6. Ejercicios	177
6. Nociones de dinámica simbólica	184
6.1. Secuencias infinitas de dos símbolos	185
6.2. El mapeo shift	189
6.3. Mapeo shift en el espacio de secuencias de N símbolos	193
6.4. Ejercicios	194
7. La herradura de Smale	199
7.1. El conjunto invariante Λ	202
7.2. Estructura hiperbólica de la herradura	205
7.3. Puntos homoclínicos y estructura homoclínica de Poincaré	209
7.4. Ejercicios	213
8. Dinámica en cilindros, toros y círculos	215
8.1. Oscilaciones periódicamente forzadas	215
8.1.1. La ecuación de Duffing	221
8.2. Dinámica en toros	225
8.2.1. Ruta al caos por cuasiperiodicidad	230
8.2.2. Ecuaciones diferenciales no autónomas en el toro	235
8.3. Dinámica en círculos	236
8.3.1. Número de rotación y lenguas de Arnold	238
8.4. Ejercicios	243
9. El atractor caótico de Lorenz	251
9.1. Propiedades del sistema de Lorenz	252
9.1.1. El sistema de Lorenz es disipativo	252
9.1.2. Bifurcaciones locales en el sistema de Lorenz	254
9.1.3. Bifurcaciones globales y ruta al caos	256
9.2. Estructura del atractor de Lorenz	261
9.3. Exploración: Cuantificando el caos en sistemas continuos	264
9.3.1. Exponentes de Lyapunov	265
9.3.2. El mapeo de Lorenz	268
9.3.3. Reconstrucción del espacio de fase a partir de series de tiempo	269

9.3.4. Dimensiones fractales	273
9.4. Ejercicios	277
10. Bonus: Bifurcación y caos — o las rutas al caos más comunes	279
10.1. Duplicación de período	279
10.2. Cuasiperiodicidad	280
10.3. Intermittencia y crisis	280
10.4. Caos de Shilnikov	281
11. Epílogo	282

Capítulo 1

Introducción

¿Qué son los sistemas dinámicos? La teoría de los sistemas dinámicos busca explicar los mecanismos matemáticos subyacentes de estructuras o cantidades que evolucionan en el tiempo mediante una regla determinística. Típicamente, la evolución de estas cantidades puede venir gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

definido por el campo de vectores $f(x, \alpha)$, el cual, en general, también puede depender de un vector de parámetros $\alpha \in \mathbb{R}^m$. En otras ocasiones, el sistema dinámico viene definido mediante un proceso iterativo que consiste en la composición reiterada de una aplicación

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde nuevamente $\alpha \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. Sin embargo, la noción de sistema dinámico también es aplicable en otros contextos más generales. Por ejemplo, una ecuación diferencial parcial parabólica

$$u_t = f(u) + u_{xx},$$

también puede entenderse como un sistema dinámico de la forma

$$u_t = F(u), \quad u \in \mathcal{B},$$

donde el operador F está definido en algún espacio de Banach \mathcal{B} apropiado. Incluso, si buscamos un poco más allá, podemos hallar ejemplos de sistemas dinámicos

en contextos tan diversos como geometría compleja (acciones de grupos en superficies de Riemann), teoría de la medida (propiedades de sistemas dinámicos actuando sobre conjuntos medibles), topología diferencial (flujos definidos en variedades, campos de vectores sobre fibrados tangentes), etc.

En sus inicios, la *dinámica*, como rama de la ciencia, tuvo una motivación proveniente de la física para entender el movimiento de los cuerpos, aunque poco a poco su formalización y abstracción matemática fueron creciendo. Podemos encontrar sistemas dinámicos en todas partes: desde el sistema solar, el clima, los ecosistemas, hasta las máquinas creadas por el hombre y la bioquímica de nuestros propios cuerpos. Hoy en día, hablar de *dinámica* es referirse prácticamente a un área científica interdisciplinaria con facetas tanto matemáticas (teóricas), aplicadas (modelación), e incluso experimentales.

¿Qué es caos? Por otro lado, caos es el término usado para describir el comportamiento aparentemente *complejo* de sistemas dinámicos que consideramos más bien simples. **El comportamiento caótico parece ser errático e incluso aleatorio.** Sin embargo, estos sistemas son esencialmente determinísticos; es decir, el conocimiento preciso de las condiciones del sistema en un instante de tiempo, nos permite predecir con exactitud el comportamiento futuro de ese sistema.

Para comprender esta aparente contradicción o paradoja, resulta útil leer las palabras de R. C. Hilborn en su libro *Chaos and Nonlinear Dynamics* [9]:

El elemento clave para reconciliar las nociones de aleatoriedad y determinismo es la *no linealidad*: Si un sistema es perturbado por un cierto estímulo, y observamos cierta respuesta a tal estímulo, entonces podemos preguntarnos cómo responde el sistema ante un estímulo del doble de intensidad. Si la respuesta no es el doble de grande (podría ser mayor o menor), decimos que el comportamiento del sistema es no lineal. En términos matemáticos, un sistema no lineal es aquel cuyas ecuaciones de evolución son no lineales. Para estos sistemas, un pequeño cambio en un parámetro puede gatillar un súbito y dramático cambio (o *bifurcación*) en las propiedades cuantitativas y cualitativas de un sistema. Para un valor, el comportamiento podría ser periódico; mientras que para un valor ligeramente distinto, el comportamiento podría ser completamente aperiódico (nunca se repite exactamente). Estos cambios pueden

llevar al sistema eventualmente a comportarse en forma caótica.

Caos vs Ruido vs Complejidad. Si vemos un sistema con un comportamiento complejo y que parece aleatorio, podríamos tratar de explicar ese comportamiento ya sea con argumentos basados en la noción de “ruido” o con argumentos basados en “complejidad”. Según el argumento del ruido, el comportamiento complejo podría deberse a la influencia de efectos externos fuera de nuestro control (vibraciones mecánicas, fluctuaciones de temperatura, etc). Como estas influencias externas cambian de una manera no controlada, el comportamiento del sistema parece aleatorio. Según el argumento de la complejidad, reconocemos que la mayoría de los sistemas reales en biología, química, física e ingeniería están formados por billones y billones de átomos y moléculas. Dado que no podemos controlar (ni siquiera conocer) con precisión el comportamiento de todos estos átomos y moléculas (quizás, lo mejor que podemos hacer es controlar su comportamiento promedio), no es sorprendente que esta falta de control lleve a fluctuaciones y aleatoriedad en el comportamiento del sistema visto como un todo. La importancia del caos es que nos provee de una explicación alternativa para esta aparente aleatoriedad, una que no depende ni del ruido estocástico ni de la complejidad. El comportamiento caótico aparece en sistemas que están esencialmente libres de ruido y también son relativamente simples (solo hay unos pocos grados de libertad activos).

En definitiva, ¿Para qué estudiar sistemas dinámicos no lineales y caos? La respuesta tiene dos partes:

- (1) El estudio del caos nos entrega nuevas herramientas conceptuales y teóricas que nos permiten estudiar y comprender comportamiento complicado;
- (2) El comportamiento caótico está lejos de ser una mera excepción a la regla: aparece en osciladores mecánicos, circuitos eléctricos, láseres, sistemas ópticos no lineales, reacciones químicas, células nerviosas, interacción entre poblaciones, fluidos, y muchos otros sistemas. Más aún, este comportamiento caótico muestra características universales, es decir, son independientes de los detalles del sistema en particular. Esta universalidad significa que podemos aprender sobre dinámica caótica al estudiar, por ejemplo, simples modelos matemáticos, y lo que aprendamos lo podemos aplicar inmediatamente para comprender el comportamiento caótico de láseres o de células cardíacas.

Las principales preguntas que nos haremos a lo largo de este texto serán las siguientes:

1. ¿Cómo evoluciona un sistema dinámico en el largo plazo? (Converge a un estado de reposo, o a un comportamiento periódico, o quizás caótico?)
2. ¿Cómo podemos describir cuantitativa y cualitativamente la dinámica de un sistema?
3. ¿Cómo cambia el comportamiento de un sistema no lineal si variamos los parámetros que describen al sistema?
4. ¿Qué tipos de sistemas dinámicos exhiben caos?
5. ¿Cómo podemos decidir si un sistema es caótico y cómo describimos cuantitativamente el caos?

1.1. Dos ejemplos introductorios

Ejemplo 1 El péndulo clásico es uno de los sistemas mecánicos más simples. Se busca describir el desplazamiento angular $\theta = \theta(t)$ en función del tiempo $t > 0$ de un péndulo de masa m dada una posición inicial $\theta(t_0) = \theta_0$ en ausencia de roce con el aire. En la Figura 1.1(a) se ve la masa del péndulo sujeta a la fuerza de gravedad y unida a una cuerda rígida sin masa de longitud L , la cual ejerce una tensión sobre la masa. Al aplicar las leyes de Newton a este sistema obtenemos una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

la cual puede ser reducida a un sistema de dos EDOs de primer orden.

Como sabemos de un curso elemental de ecuaciones diferenciales, el ángulo inicial θ_0 es insuficiente como dato para determinar el estado futuro del péndulo, es decir, para conocer el par $(\theta, \dot{\theta})$. Debido a la naturaleza periódica de las incógnitas $(\theta, \dot{\theta})$, el “espacio de estados” donde “viven” estas variables $(\theta, \dot{\theta})$ es $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, donde

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \bmod 2\pi$$

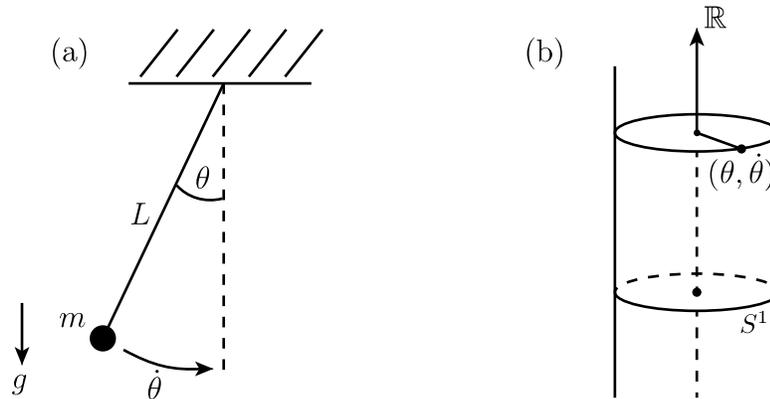


Figura 1.1: El péndulo no-lineal define un sistema dinámico a tiempo continuo. El espacio de estados corresponde a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

es el círculo unitario (parametrizado por $\theta \in [0, 2\pi[$), y \mathbb{R} es el eje real correspondiente a todas las posibles velocidades del péndulo. El conjunto X puede ser considerado como un cilindro en \mathbb{R}^3 , ver figura 1.1(b).

Este ejemplo del péndulo queda modelado entonces por un sistema dinámico, el cual describe la ley de movimiento al considerar el tiempo $t > 0$ como una variable continua.

Ejemplo 2 Uno de los modelos más simples que describen la evolución en el tiempo de una población viene dado por la ecuación logística

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Este es un ejemplo de un sistema dinámico donde la variable temporal “avanza” en forma discreta. Aquí, x_n es el tamaño poblacional en el instante n -ésimo, el cual se asume como una variable discreta, esto es, $n \in \mathbb{N}$; el parámetro $r > 0$ es la tasa de nacimientos por unidad de tiempo de la especie.

El modelo logístico describe la dependencia del tamaño poblacional en el instante $n + 1$ en función del instante “presente” n . En particular, el espacio de estados donde “vive” matemáticamente hablando la variable x es $X = \mathbb{R}^+$.

1.2. Primeras definiciones

Definición 1 *Un sistema dinámico es un proceso cuyo comportamiento se puede describir mediante un operador de evolución*

$$\begin{aligned}\Phi^t : X &\longrightarrow X, \\ x_0 &\mapsto \Phi^t(x_0) = x_t\end{aligned}$$

definido en un espacio X para todo $t \in T$. El espacio X se llama **espacio de estados** o **espacio de fase**. El espacio T (o tiempo) puede ser \mathbb{R} (en cuyo caso hablamos de un **sistema dinámico a tiempo continuo**) o \mathbb{Z} (que corresponde a un **sistema a tiempo discreto**).

El operador Φ^t debe satisfacer las siguientes condiciones para cualesquiera condiciones iniciales $x_0 \in X$ y para todo $t, s \in T$:

1. $\Phi^0(x_0) = x_0$.

Es decir, si el tiempo no corre, no hay evolución de la cantidad x .

2. $\Phi^{t+s}(x_0) = \Phi^t(\Phi^s(x_0))$.

La evolución en el tiempo es determinística y sólo depende del dato inicial x_0 y no de cómo “contamos” el paso del tiempo; ver figura 1.2.

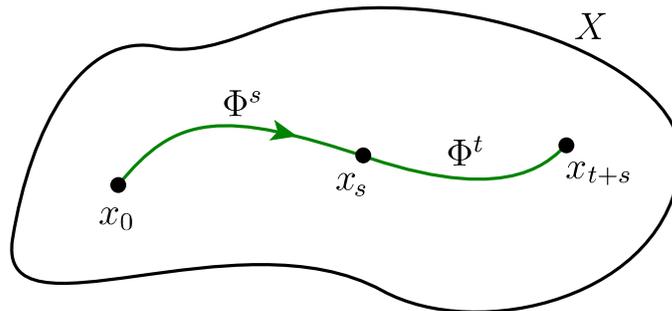


Figura 1.2: Evolución en el tiempo es determinística y sólo depende del dato inicial x_0 y no de cómo “contamos” el paso del tiempo.

Definición 2 *Una órbita es un subconjunto ordenado del espacio de estados X definido por*

$$\mathcal{O} = \{x \in X : x = \Phi^t(x_0), \forall t \in T \text{ tal que } \Phi^t(x_0) \in X\}.$$

Una órbita nos indica qué le sucede a un punto inicial x_0 a medida que pasa el tiempo; puede entenderse como el “itinerario” del sistema dinámico al partir desde el punto x_0 .

1.2.1. Sistemas dinámicos a tiempo continuo

Si $T = \mathbb{R}$ (caso continuo), el sistema dinámico viene dado típicamente como un sistema de ecuaciones diferenciales o un campo de vectores. La forma general de un campo de vectores en \mathbb{R}^n es:

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (1.1)$$

donde $x \in X = \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. La función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ asigna un vector

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f_1(x, \lambda) \\ \vdots \\ f_n(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

a cada punto en el espacio de fase. De esta forma, el campo vectorial f puede interpretarse como un campo de fuerzas en \mathbb{R}^n .

En el caso continuo, el operador de evolución describe el **flujo** del campo de vectores en la forma de una familia $\{\Phi_{x_0}(t)\}_{x_0 \in X}$, donde usamos la notación $\Phi_{x_0}(t) = \Phi^t(x_0)$ para recalcar la dependencia de Φ como función del tiempo t desde una condición inicial $x_0 \in X$. Luego, este flujo satisface la EDO (1.1), es decir,

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = f(\Phi(t)), \quad \forall t \in T. \quad (1.2)$$

En el caso continuo las órbitas son curvas en X parametrizadas por t y orientadas en la dirección de crecimiento de t . Si el campo de vectores f es suficientemente suave también podemos ir “hacia atrás” en el tiempo y seguir el flujo en reversa y ver “desde dónde” venía el punto x_0 ; ver figura 1.3.

OBSERVACIÓN. En lo que nos concierne, asumiremos que el campo f es suficientemente suave de manera que el pasado y el futuro estén únicamente determinados

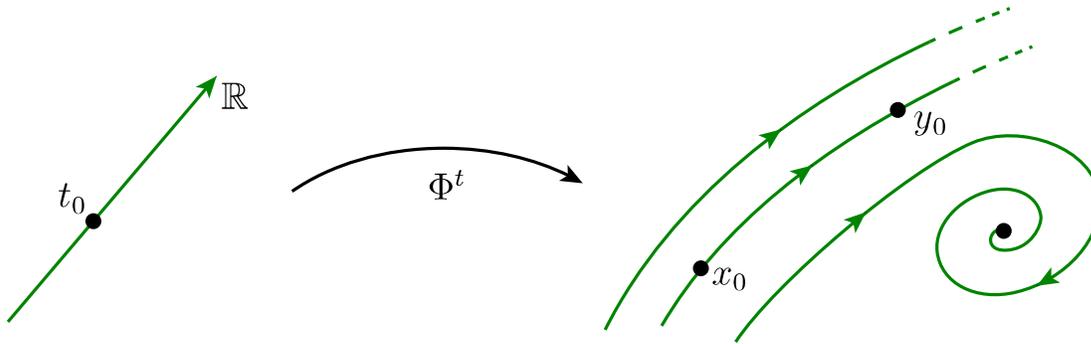


Figura 1.3: Órbitas en el caso continuo.

por la condición inicial x_0 . En otras palabras, la EDO (1.1) siempre tendrá soluciones únicas para un número suficiente de condiciones iniciales o condiciones de frontera.

Proposición 1 Si $y_0 = \Phi^t(x_0)$ para algún $t \in T$, entonces las órbitas $\mathcal{O}(y_0)$ y $\mathcal{O}(x_0)$ coinciden.

Ejemplo 3 El sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy, \end{cases} \quad (1.3)$$

es un sistema dinámico continuo tridimensional, es decir, $X = \mathbb{R}^3$, y $T = \mathbb{R}$. Aunque no podamos resolver explícitamente este sistema de EDOs, igual podemos determinar las soluciones en forma única hacia adelante y hacia atrás en el tiempo dada una condición inicial (x_0, y_0, z_0) .

Órbitas especiales en el caso continuo

1. **Puntos de equilibrio:** Son puntos $x^* \in X$ tales que $f(x^*) = 0$.
2. **Órbitas periódicas:** Para un punto $x^* \in X$ existe un instante $\tau \in \mathbb{R}$ con $\tau > 0$ tal que $\Phi^\tau(x^*) = x^*$. La órbita periódica está definida como la curva cerrada γ en X

$$\gamma = \{\Phi^t(x) \in X : 0 \leq t < \tau^*\},$$

donde $\tau^* > 0$ es el número τ más pequeño tal que $\Phi^{\tau}(x^*) = x^*$ y se llama el **período** de γ .

Ejemplo 4 La ecuación del péndulo vista en el ejemplo 1 viene dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

Si introducimos un nuevo parámetro (frecuencia angular) $\omega = \sqrt{g/L}$ y reescalamos el tiempo de la forma $\tau = \omega t$, la ecuación se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin \theta = 0.$$

Introduciendo una variable auxiliar $v = d\theta/d\tau$, el modelo se transforma en un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias escalares

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} = v, \\ \frac{dv}{d\tau} = -\sin \theta. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dado que $(\theta, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, el espacio de fase es un cilindro. Los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$. Pero también hay órbitas periódicas; he hecho, hay dos familias no numerables de ellas como se muestra en la figura 1.4. El origen $(0, 0)$ representa al péndulo en reposo. Las órbitas cerradas alrededor del centro son pequeñas oscilaciones alrededor del estado de reposo y representan movimientos periódicos de pequeña amplitud. El equilibrio $(\pi, 0)$ es un estado de equilibrio con el péndulo invertido. Las órbitas que rodean al cilindro también son órbitas periódicas que representan oscilaciones de gran amplitud por sobre la posición invertida. La frontera entre oscilaciones de pequeña y gran amplitud son las dos órbitas que conectan $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ y se conocen como *órbitas heteroclínicas*; aquí el péndulo realiza una vuelta completa desde y hacia la posición invertida.

Definición 3 *El retrato de fase de un sistema dinámico es una partición del espacio de estados X en órbitas. Esta definición también es la misma para sistemas a tiempo discreto.*

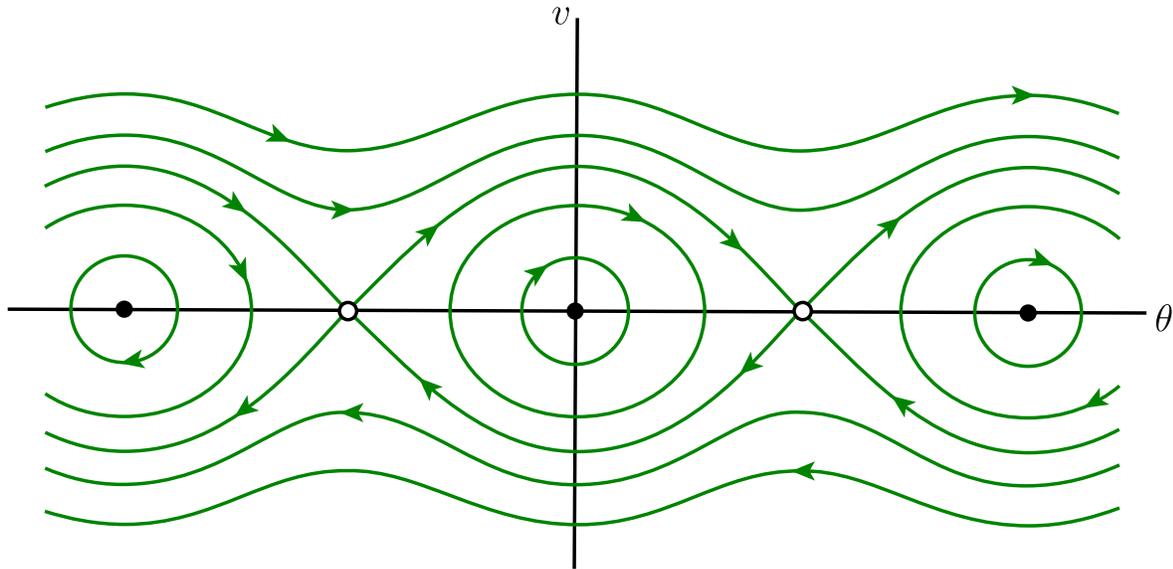


Figura 1.4: Retrato de fase para el sistema (1.4).

Como ha quedado claro a partir del ejemplo anterior, el retrato de fase contiene mucha información sobre el comportamiento de un sistema dinámico, a saber:

- Cantidad de estados asintóticos hacia los cuales el sistema tiende a medida que $t \rightarrow \pm\infty$.
- Características de los estados asintóticos (atractores, repulsores, etc.).

Muchos de los teoremas y técnicas estudiados en este curso están destinados a entender y caracterizar el retrato de fase de un sistema dinámico!

1.2.2. Sistemas dinámicos a tiempo discreto

Si $T = \mathbb{Z}$ (caso discreto), el sistema queda definido por un mapeo o aplicación

$$x \mapsto g(x),$$

donde $g : X \rightarrow X$ es una función. El operador de evolución es el mismo mapeo g y $\Phi^t(x) = \Phi^n(x) = g^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, donde

$$g^n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{n \text{ veces}}$$

denota la n -ésima composición (o iteración) de g .

En el caso discreto las órbitas son sucesiones de puntos en X enumeradas por enteros crecientes. Si g es invertible entonces podemos también mirar el “pasado” del punto x_0 ; ver figura 1.5. (Sin embargo, siempre podemos considerar la **semiórbita positiva** de un sistema dinámico

$$\{\Phi^t(x_0) : t \in T, t \geq 0\}.)$$

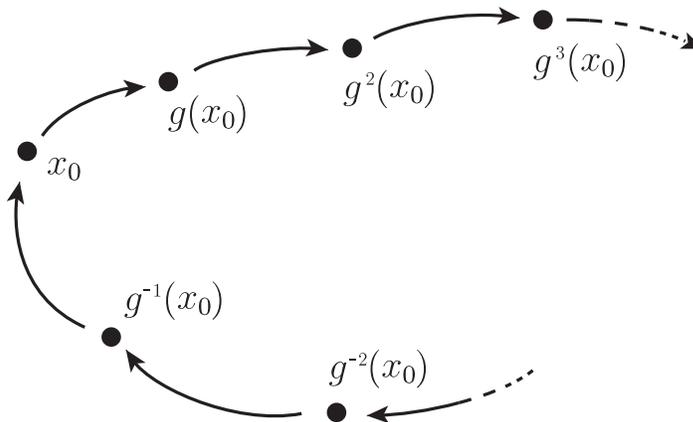


Figura 1.5: Órbitas en el caso discreto para un sistema invertible.

Órbitas especiales en el caso discreto:

1. **Puntos fijos:** Son puntos $x^* \in X$ tales que $g(x^*) = x^*$.
2. **Puntos periódicos:** Son puntos $x_0 \in X$ tales que $g^n(x_0) = x_0$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, mientras que $g^i(x) \neq x$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ con $0 < i < n$. Aquí n es el **período** de x_0 .
3. **Órbitas periódicas:** Es un subconjunto (discreto) $\gamma \subset X$ de n puntos compuesto por la órbita de un punto periódico x_0 :

$$\gamma = \{g^i(x_0) : 0 \leq i < n\}.$$

Aquí n se dice el **período** de γ . La diferencia entre órbitas periódicas en el caso continuo y el caso discreto se ilustra en la figura 1.6.

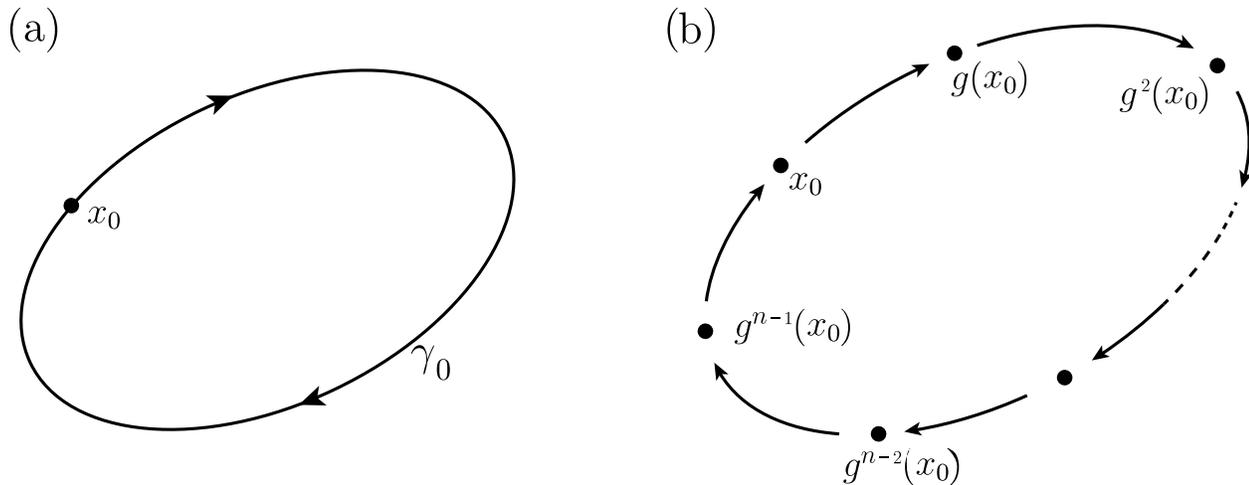


Figura 1.6: Órbitas periódicas en el caso continuo (a) y en el caso discreto (b).

Ejemplo 5 (Mapeo logístico)

$$x \mapsto rx(1 - x).$$

Es un sistema dinámico discreto unidimensional para cualquier valor del parámetro $r \in \mathbb{R}$. Concretamente, $X = \mathbb{R}$. En este caso, las órbitas son iteraciones (o composiciones) de $g(x) = rx(1 - x)$ a partir de una condición inicial x_0 . Sin embargo, este mapeo no es invertible, luego sólo podemos mirar las órbitas positivas, es decir, $T = \mathbb{N}_0$. Más aún, dado que x representa individuos o densidad de población, nos concentramos en valores no-negativos para x .

Es claro que $x^* = 0$ es un punto fijo para todo $r \in \mathbb{R}$. Si $r > 1$, el punto $x^* = 1 - 1/r$ es otro punto fijo positivo. Sin embargo, la estructura del conjunto de órbitas periódicas puede ser extremadamente complicada dependiendo del valor de r , como veremos más adelante, transformándose en la práctica en la columna vertebral de comportamiento caótico por el cual el mapeo logístico es famoso.

Ejemplo 6 (Dinámica simbólica)

Consideremos un conjunto $X = \Omega_2$ de todas las posibles secuencias bi-infinitas de dos símbolos, por ejemplo, $\{1, 2\}$. Un punto $\omega \in \Omega_2$ entonces es de la forma

$$\omega = \{\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots\},$$

donde $w_i \in \{1, 2\}$. A la “coordenada” w_0 la llamamos la “posición cero”.

A continuación, consideremos un mapeo

$$\sigma : \Omega_2 \rightarrow \Omega_2,$$

el cual transforma la sucesión $\omega = \{\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots\} \in \Omega_2$ en la sucesión $\theta := \sigma(\omega)$ definida por:

$$\theta = \{\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots\} \in \Omega_2,$$

donde $\theta_k = w_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Es decir, el mapeo σ simplemente desplaza la sucesión en una posición hacia la izquierda. Por esto, se le conoce como **mapeo shift**. El mapeo shift σ define un sistema dinámico discreto sobre Ω_2 , el cual es invertible (¿Cuál es σ^{-1} ?). El proceso definido por el mapeo shift es usualmente conocido como *dinámica simbólica*.

Los puntos fijos y periódicos son muy fáciles de hallar (casi trivialmente!). ¿Puedes determinarlos?

A pesar de quedar determinado mediante un proceso tan sencillo como desplazar una posición hacia la izquierda, la descripción de las propiedades matemáticas de la dinámica simbólica puede ser increíblemente compleja, como veremos más adelante.

1.3. ¿Qué (no) es caos?

A continuación damos una primera idea sobre lo que se entiende por caos. Ésta no es una definición rigurosa (de hecho, no existe una definición universalmente aceptada de caos), pero nos basta para ilustrar ciertas propiedades que un sistema debe presentar —o no debe presentar— para ser considerado caótico.

Consideremos el comportamiento en el largo plazo de la evolución de una condición inicial x_0 bajo el operador Φ^t . Los posibles “destinos” de la órbita de x_0 podrían ser, por ejemplo:

- $\Phi^t(x_0)$ tiende a un punto de equilibrio (o punto fijo) cuando $t \rightarrow \infty$.
- $\Phi^t(x_0)$ tiende a una órbita periódica cuando $t \rightarrow \infty$.

- $\Phi^t(x_0)$ se escapa a la frontera de X cuando $t \rightarrow \infty$. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, entonces, $\Phi^t(x_0) \rightarrow \pm\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Estos tres comportamientos **no** son caóticos, pues son predecibles. Un sistema es caótico si posee un subconjunto de órbitas confinadas a una región compacta, en donde éstas se comporten en forma impredecible.

Por ejemplo, consideremos el sistema de Lorenz (1.3) con $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$. Para cualquier condición inicial, las órbitas parecen acumularse (para $t \rightarrow \infty$) en un objeto con forma de alas de mariposa: El famoso atractor caótico de Lorenz.

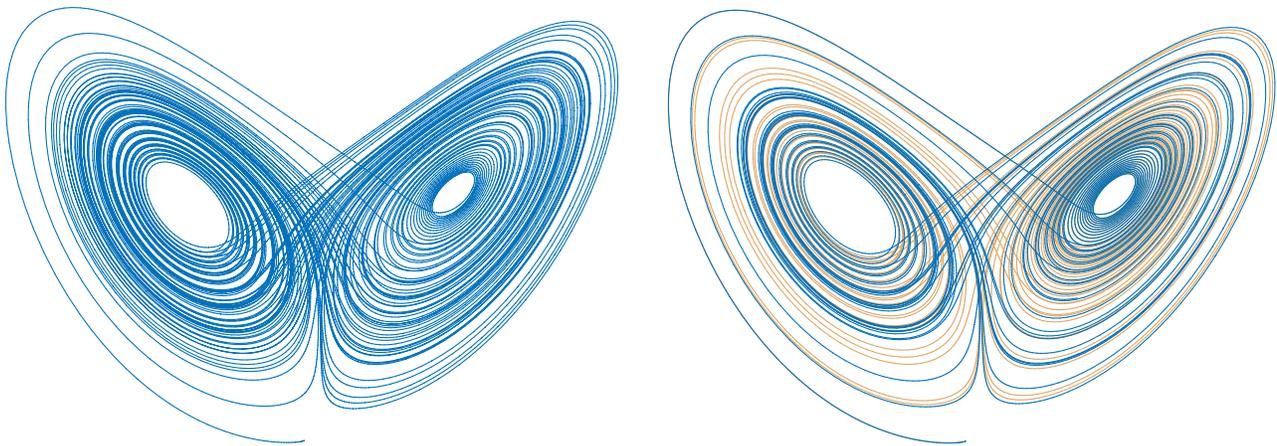


Figura 1.7: Las órbitas en el atractor caótico de Lorenz muestran sensibilidad a las condiciones iniciales: En la imagen de la derecha, dos órbitas inicialmente muy cercanas inevitablemente se separan después de un tiempo finito.

La figura 1.7 muestra en el lado derecho dos órbitas en el atractor de Lorenz (una naranja y otra azul); ambas convergen en el largo plazo al mismo conjunto atractor con forma de alas mostrado en la imagen izquierda. Estas dos órbitas parten desde condiciones iniciales muy cercanas. Tan cercanas que ambas se comportan inicialmente en forma muy similar y es difícil distinguir la órbita naranja de la azul. Sin embargo, de pronto las dos órbitas comienzan a comportarse de manera muy diferente, a diverger una de la otra y, luego de un tiempo, ya se vuelve imposible adivinar que alguna vez ambas estuvieran tan cerca inicialmente; compare también las series temporales correspondientes para la variable z

vs t en la figura 1.8. Este fenómeno se conoce como *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales* o *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

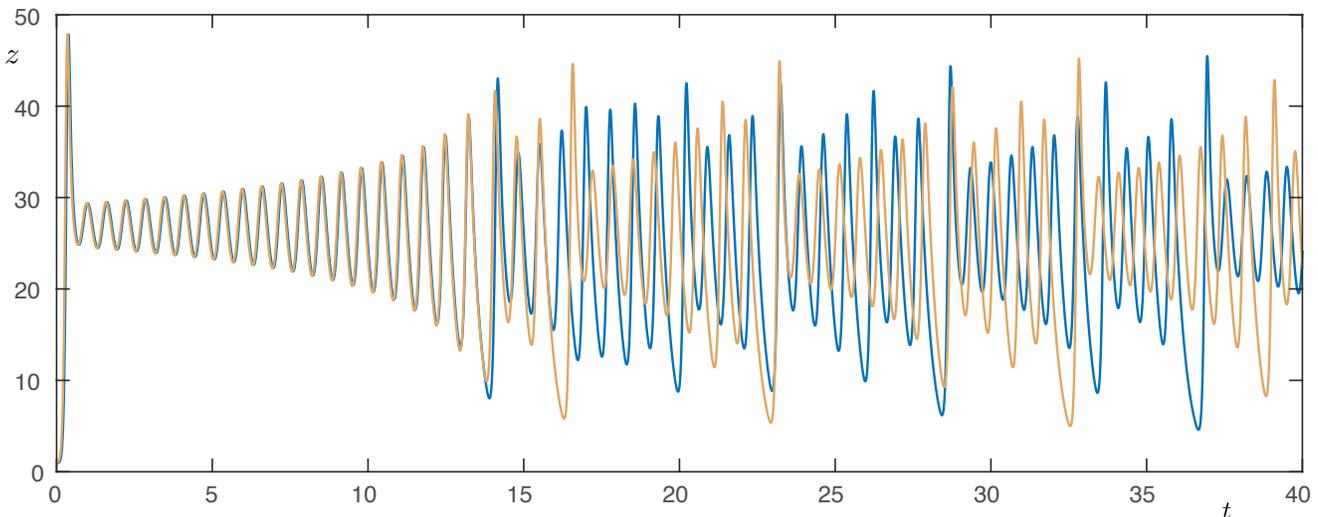


Figura 1.8: Dos órbitas en el modelo de Lorenz mostrando dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

Esta propiedad es una característica del tipo de comportamiento que hoy llamamos caótico. Su importancia es la siguiente: Si un sistema, como el modelo de Lorenz, exhibe dependencia sensitiva a las condiciones iniciales para un rango de los valores de sus parámetros, entonces el comportamiento de ese sistema se vuelve virtualmente impredecible, i.e., no podemos predecir en detalle su comportamiento en el largo plazo. El sistema todavía es determinístico, en el sentido de que si conociéramos *exactamente* las condiciones iniciales de una órbita, entonces podríamos predecir el futuro de esa órbita al integrar (o resolver) las ecuaciones de evolución para el sistema. Pero si hacemos el más mínimo cambio en las condiciones iniciales, la órbita resultante rápidamente diverge siguiendo un camino distinto al original. Dado que siempre hay alguna imprecisión al especificar las condiciones iniciales en cualquier experimento real o en un cálculo numérico, vemos que el comportamiento futuro es de hecho impredecible para un sistema caótico. Por otro lado, veremos que no es necesario introducir un elemento estocástico a las ecuaciones de evolución de un sistema caótico para obtener el comportamiento *aparentemente* aleatorio: La dependencia sensitiva a las condiciones iniciales es una propiedad *inherente* a un sistema caótico; es decir, se presenta

independiente del método (numérico o analítico) que ocupemos para analizar las órbitas. Más aún, una órbita por sí sola (i.e., dada una sola condición inicial) de un sistema caótico, puede mostrar características análogas a la de una variable aleatoria (!); basta observar el comportamiento errático de las soluciones en la figura 1.8.

En resumen, el futuro o evolución de un sistema caótico es esencialmente *impredecible* aún cuando el sistema sea *determinístico*. En otras palabras, al modelarlo matemáticamente no necesitamos agregar un ruido externo para producir o explicar su comportamiento complejo y aparentemente aleatorio.

1.4. Relaciones entre dinámica continua y dinámica discreta

Existen varias maneras de construir nuevos sistemas dinámicos a partir de uno dado. La aplicación de retorno de Poincaré (vista en cualquier curso de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales y que veremos también más adelante) es uno de los ejemplos más comunes. Estas construcciones nos dan una indicación de cómo traducir resultados para sistemas dinámicos en tiempo continuo a aquellos con tiempo discreto, y viceversa.

Además de la aplicación de retorno de Poincaré, tenemos...

Suspensión

Es una construcción general por la cual uno “extiende” un sistema a tiempo discreto para obtener un sistema a tiempo continuo. En cierto sentido, es *casi* el proceso inverso al mapeo de retorno de Poincaré. Más formalmente, si comenzamos con una aplicación invertible $\varphi : X \rightarrow X$ como sistema dinámico a tiempo discreto con $T = \mathbb{Z}$, entonces el nuevo sistema a tiempo continuo está definido en el espacio cociente $\tilde{X} = X \times \mathbb{R} / \sim$, donde \sim representa la relación de equivalencia dada por

$$(x_1, s_1) \sim (x_2, s_2) \Leftrightarrow s_2 - s_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \varphi^{s_2 - s_1}(x_2) = x_1.$$

Otra forma de construir \tilde{X} es tomar $X \times [0, 1]$ e identificar los “bordes” $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ tal que los puntos $(x, 0)$ y $(\varphi^1(x), 1)$ “se peguen”.

Tomando el mapeo en tiempo τ

Si comenzamos con un sistema dinámico con $T = \mathbb{R}$, podemos obtener un nuevo sistema dinámico al restringir el operador de evolución o flujo Φ^t al conjunto de tiempos

$$T' = \{n\tau \mid n \in \mathbb{Z} \text{ o } \mathbb{Z}_+\}$$

para algún $\tau > 0$ fijo. Éste es otro ejemplo de cómo un flujo continuo da origen a una dinámica discreta asociada. Esta construcción tiene un interés teórico pues muchos métodos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales se basan en (una aproximación de) un mapeo a tiempo τ , usualmente para un valor de τ pequeño.

1.5. Propiedades generales de los retratos de fase

Definición 4 *Un conjunto invariante de un sistema dinámico es un subconjunto $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$ entonces $\Phi^t(x_0) \in S$, $\forall t \in T$. En particular, esta definición implica que $\Phi^t(S) \subseteq S$, $\forall t \in T$.*

OBSERVACIONES.

1. Un conjunto invariante S consiste de órbitas de un sistema dinámico.
2. Cualquier órbita individual $\mathcal{O}(x_0)$ es obviamente un conjunto invariante por sí misma. Por lo tanto, puntos de equilibrio y órbitas periódicas son conjuntos invariantes.
3. Siempre es posible restringir el operador Φ^t a un conjunto invariante y considerar el operador

$$\Psi^t = \Phi^t|_S : S \rightarrow S,$$

inducido por Φ^t en S .

4. Si el espacio de estados X posee una métrica ρ , podemos considerar conjuntos invariantes *cerrados* en X . Por ejemplo, con la métrica euclidiana usual podemos tener los siguientes conjuntos invariantes cerrados:
 - a) Puntos de equilibrio y órbitas periódicas.

- b) En muchos sistemas a tiempo continuo aparecen toros topológicos en los cuales la dinámica es invariante. Un ejemplo concreto ocurre siempre que un sistema exhibe un fenómeno conocido como bifurcación Neimark-Sacker; hablaremos de ello más adelante en el capítulo sobre teoría de bifurcaciones.
- c) Algunos sistemas dinámicos diferenciables, invertibles y definidos por ecuaciones (algebraicamente) muy simples pueden llegar a tener conjuntos invariantes cerrados extremadamente complicados de describir. Por ejemplo, veremos más adelante que el sistema dinámico discreto planar conocido como la *herradura de Smale* —un ejemplo clásico de sistema caótico— posee un conjunto invariante cerrado Λ que contiene un número infinito de órbitas periódicas y aperiódicas. Este conjunto invariante Λ es (en algún sentido) equivalente a un conjunto de Cantor bidimensional; sin embargo, la restricción de la dinámica a Λ se comporta como una dinámica simbólica como la del mapeo shift (!).

Una generalización de estos conjuntos invariantes es el conjunto no-errante Ω .

Definición 5 *Un punto p se llama **no-errante** para el flujo Φ^t (resp. el mapeo g) si, para cualquier vecindad U de p , existe un t arbitrariamente grande (resp. $n > 0$) tal que $\Phi^t(U) \cap U \neq \emptyset$ (resp. $g^n(U) \cap U \neq \emptyset$). Todos estos puntos forman el **conjunto no-errante** Ω . El complemento del conjunto de puntos errantes se llama **conjunto errante**.*

Un punto no-errante está ubicado en órbitas (o cerca de ellas) que regresan a una distancia pequeña de sí mismas. Puntos de equilibrio y órbitas periódicas son claramente no-errantes. Dado que el conjunto de puntos errantes es abierto, Ω es cerrado, y debe contener la clausura del conjunto de puntos de equilibrios y órbitas periódicas. Los puntos errantes corresponden a comportamiento transiente, mientras que el comportamiento “a largo plazo” o asintótico corresponde a órbitas de puntos no-errantes. Efectivamente, en muchas aplicaciones estamos interesados en el “destino” o comportamiento en el largo plazo del operador Φ^t , es decir, dar una descripción de qué ocurre cuando $t \rightarrow \infty$. Para “observar” un estado asintótico de un sistema dinámico debemos ubicar un conjunto invariante

\mathcal{A} que sea *estable*, es decir, que “atraiga” a las órbitas cercanas. En lo que sigue suponemos que X es un espacio métrico completo y que \mathcal{A} denota un conjunto invariante cerrado.

Definición 6 *Un conjunto invariante \mathcal{A} se dice **estable** o **atrayerente** si se satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente:*

(a) *para toda vecindad suficientemente pequeña U de \mathcal{A} existe una vecindad V de \mathcal{A} tal que*

$$\Phi^t(x) \in U, \quad \forall x \in V, \quad \forall t > 0;$$

(b) *existe una vecindad U_0 de \mathcal{A} tal que*

$$\Phi^t(x) \longrightarrow \mathcal{A} \quad \text{para } t \rightarrow 0, \quad \forall x \in U_0.$$

*Un **atractor** es un conjunto atrayerente que contiene una órbita densa. Un conjunto **repulsor** se define en forma análoga invirtiendo el sentido del tiempo $t \mapsto -t$.*

Si \mathcal{A} es un equilibrio o una órbita periódica, esta definición es la estándar de equilibrios y ciclos atractores. La propiedad (a) de la definición se llama **estabilidad de Lyapunov**. Si un conjunto \mathcal{A} es Lyapunov-estable, las órbitas cercanas no abandonan su vecindad. La propiedad (b) se conoce como **estabilidad asintótica**.

Ejemplo 7 Considere el retrato de fase planar de la figura 1.9. Claramente, la curva cerrada $\gamma \cup \{p\}$, incluido el equilibrio p , es un conjunto atrayerente, pero el punto p no es atractor ni repulsor (es asintóticamente estable pero no es Lyapunov-estable, pues hay simultáneamente órbitas que son atraídas y repelidas por p). De hecho, γ está llena de puntos errantes y los equilibrios p y q son las únicas componentes del conjunto no-errante. Dado que hay una órbita densa en $\gamma \cup \{p\}$, nuestro conjunto atrayerente es, de hecho, un atractor.

Definición 7 *El **dominio de atracción** de un conjunto atrayerente \mathcal{A} de un sistema dinámico continuo se define por:*

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \bigcup_{t \leq 0} \Phi^t(U),$$

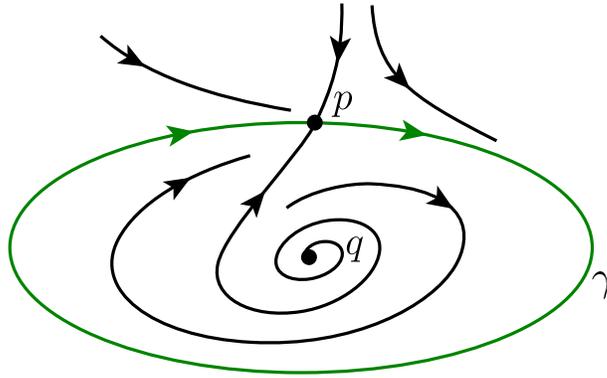


Figura 1.9: Retratos de fase planar del ejemplo 7.

donde U es cualquier abierto satisfaciendo $\Phi^t(U) \subset U$ (i.e., U es invariante) y $\bigcap_{t>0} \Phi^t(U) = \mathcal{A}$ (i.e., el flujo tiende a \mathcal{A}). Similarmente, para un sistema dinámico discreto el dominio de atracción de un conjunto atrayente \mathcal{A} es

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \leq 0} g^n(U),$$

donde U es cualquier abierto que satisfaga $g^n(U) \subset U$ (i.e., U es invariante) y $\bigcap_{n>0} g^n(U) = \mathcal{A}$ (i.e., las órbitas tienden a \mathcal{A}).

Un dominio de atracción también es llamado **base o cuenca de atracción**.

OBSERVACIONES.

1. Un conjunto atrayente captura todas las órbitas que comienzan en su dominio de atracción.
2. Los dominios de atracción de dos conjuntos atrayentes disjuntos son necesariamente conjuntos disjuntos y están separados por las variedades estables de los conjuntos no-atractores, las que actúan como fronteras entre las cuencas. Por esta razón, a las variedades estable presentes en un sistema también se les llama usualmente *separatrices*. Esto lo estudiaremos en el capítulo 2.

Ejemplo 8 Considere el sistema dinámico continuo lineal unidimensional

$$\dot{x} = \alpha x,$$

con $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$. La solución exacta de esta EDO queda unívocamente determinada por la elección de la condición inicial $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}$ y es de la forma

$$x(t) = e^{\alpha t} x_0. \quad (1.5)$$

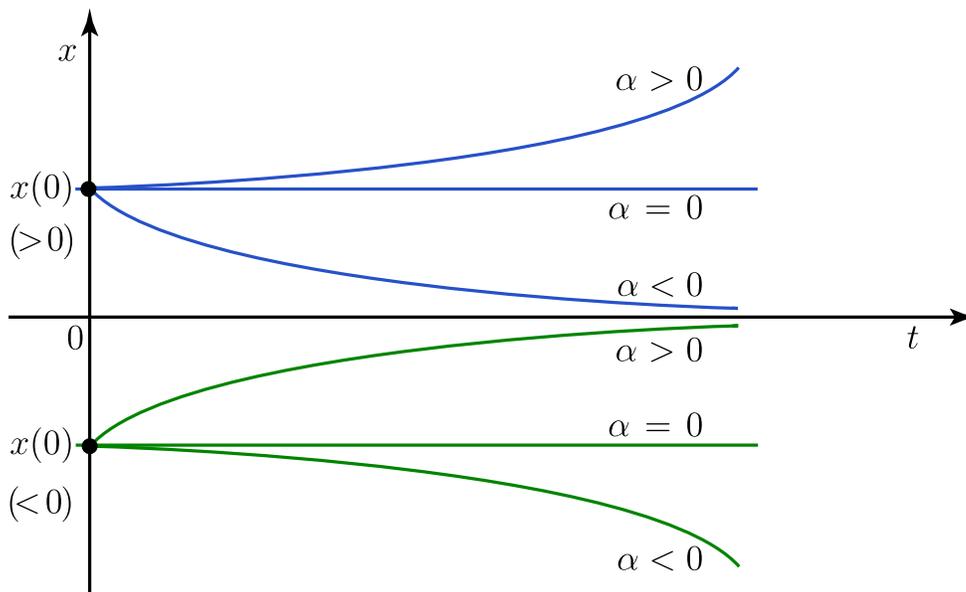


Figura 1.10: Bosquejo de las soluciones de $\dot{x} = \alpha x$ dependiendo del signo de la condición inicial x_0 y del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, en la mayoría de los casos, hallar una fórmula cerrada para la solución de una EDO es imposible. Luego, uno debe recurrir a métodos geométricos para obtener información cuantitativa y cualitativa sobre las soluciones. Por ejemplo, la Figura 1.10 muestra bosquejos de las posibles gráficas de la solución de $\dot{x} = \alpha x$ dependiendo del signo de la condición inicial x_0 y del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular, si $\alpha < 0$, la solución $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$; si $\alpha = 0$, $x(t) \equiv x(0) = cte$; y si $\alpha > 0$, entonces $x(t) \rightarrow \pm\infty$ para $t \rightarrow \infty$.

Aunque estos comportamientos son fácilmente deducibles de la forma explícita de la solución (1.5), también es posible visualizar el comportamiento cualitativo de $x(t)$ al comparar la velocidad \dot{x} con la posición x como en la Figura 1.11 y determinar la estabilidad del origen como punto de equilibrio. Cuando $\alpha < 0$, en el panel (a), la pendiente de \dot{x} versus x es negativa y, luego, $\dot{x} > 0$ para $x < 0$, y $\dot{x} < 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, la función $x(t)$ es creciente para $x < 0$ y

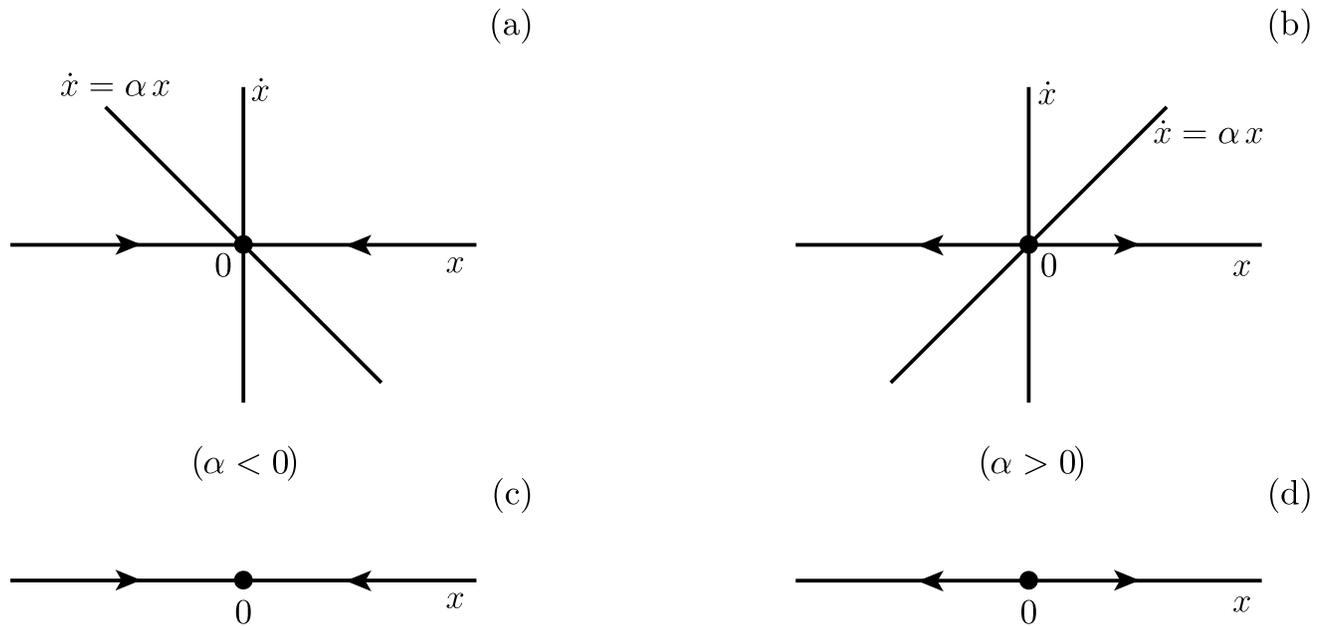


Figura 1.11: La comparación de la velocidad \dot{x} versus la posición x en los casos $\alpha < 0$ (panel (a)) y $\alpha > 0$ (panel (b)) permite obtener las líneas de fase en los paneles (c) y (d), respectivamente.

decreciente para $x > 0$. Esto da origen a la *línea de fase* del panel (c), la cual indica que toda solución con condición inicial no-nula decae hasta la posición de reposo: El origen es un punto de equilibrio atractor. Contrariamente, para $\alpha > 0$, en el panel (b), la línea de fase asociada que se obtiene en el panel (c) indica que las soluciones se alejan del origen, el cual es repulsor.

En muchos problemas es posible hallar una **región atrapadora**, esto es, un conjunto cerrado, conexo $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\Phi^t(D) \subset D$ para todo $t > 0$. Para esto, en el caso a tiempo continuo, es suficiente mostrar que el campo de vectores apunta hacia el interior de D en todo punto de ∂D . En este caso, podemos definir el conjunto atractor asociado como

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} \Phi^t(D).$$

En el caso de flujos bidimensionales el teorema de Poincaré-Bendixson nos dice

bajo qué condiciones podemos caracterizar completamente los conjuntos atractores y el comportamiento asintótico de las órbitas.

Teorema 1 (*Poincaré-Bendixson*) Sea $\dot{x} = f(x), x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, un campo de vectores diferenciable definido en un dominio Ω abierto. Sea $R \subset \Omega$ una región atrapadora compacta que no contiene puntos de equilibrio de f . Suponga además que existe una órbita C que está “confinada” a R , es decir, permanece en R para todo $t > 0$; ver figura 1.12. Entonces la curva C es, o bien, una órbita cerrada o converge a una órbita cerrada a medida que $t \rightarrow \infty$. (En cualquiera de los dos casos, la región R contiene una órbita cerrada.)

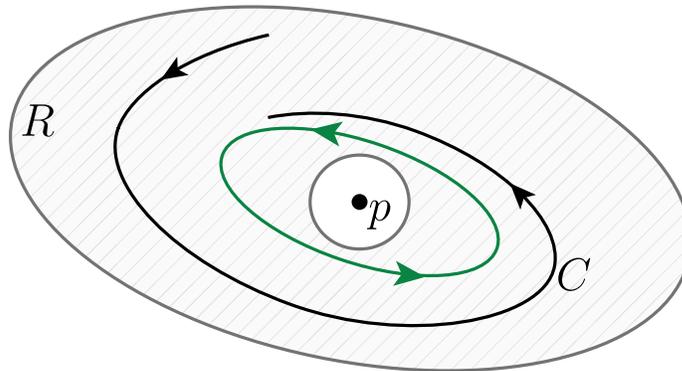
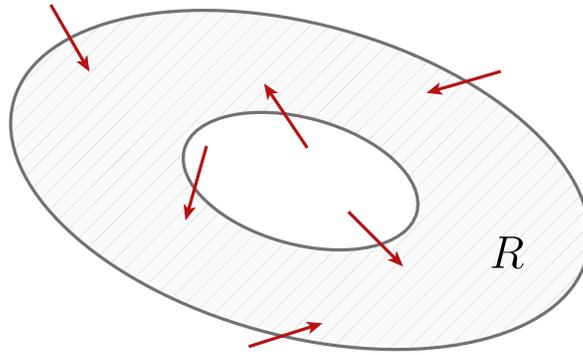


Figura 1.12: El teorema de Poincaré-Bendixson.

Al aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson, debemos asegurarnos que existe una órbita C confinada a cierta región R . Para ello, podemos construir R de manera que sea una región atrapadora, es decir, un conjunto cerrado y conexo tal que el campo de vectores siempre apunta hacia el interior de R en la frontera ∂R ; ver figura 1.13. Entonces, *todas* las órbitas en R están confinadas. Si además podemos asegurarnos que no hay equilibrios en R , entonces el teorema de Poincaré-Bendixson asegura que R contiene al menos una órbita cerrada.

Ejemplo 9 Considere el sistema en coordenadas polares

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta, \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

Figura 1.13: Una región atrapadora R .

el cual posee un ciclo límite estable en $r = 1$ cuando $\mu = 0$. Demostraremos que este ciclo todavía existe para valores de $\mu > 0$ suficientemente pequeños.

Buscaremos dos círculos concéntricos con radios r_{min} y r_{max} , tales que $\dot{r} < 0$ en el círculo exterior y $\dot{r} > 0$ en el círculo interior. De esa manera el anillo $0 < r_{min} \leq r \leq r_{max}$ será nuestra región atrapadora. Notemos que no hay puntos de equilibrio en el anillo pues $\dot{\theta} > 0$. Luego, si podemos hallar r_{min} y r_{max} , el teorema de Poincaré-Bendixson implicará la existencia de al menos una órbita cerrada.

Para encontrar r_{min} , requerimos que $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta > 0$ para todo θ . Dado que $\cos \theta \geq -1$, una condición suficiente para r_{min} es $1 - r^2 - \mu > 0$. Luego, $r_{min} < \sqrt{1 - \mu}$ nos sirve, siempre que $\mu < 1$. Por un argumento similar, el flujo apunta hacia adentro en el círculo exterior si $r_{max} > \sqrt{1 + \mu}$. Por lo tanto, existe al menos una órbita periódica para todo $0 < \mu < 1$ y está contenida en el interior del anillo $\sqrt{1 - \mu} < r < \sqrt{1 + \mu}$.

1.6. Equivalencia y conjugación topológica

Ejemplo 10 Considere la EDO unidimensional

$$\dot{x} = \sin x.$$

Estudiamos el comportamiento de la solución que pasa por $x(0) = x_0 = \pi/4$. Esta EDO es separable. Al integrarla obtenemos la fórmula implícita en x :

$$t = \ln \left| \frac{(1 - \cos x) \sin x_0}{(1 - \cos x_0) \sin x} \right|,$$

la cual es difícil de interpretar en términos de la naturaleza de la función $x = x(t)$. Mucho menos podemos decir sobre el comportamiento de la solución que pasa exactamente por $x(0) = \pi/4$.

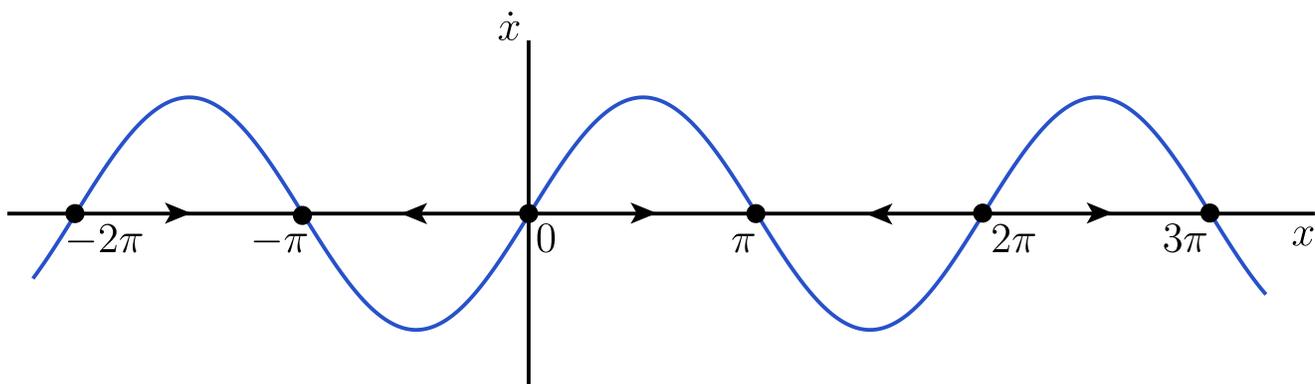


Figura 1.14: Línea de fase para la EDO $\dot{x} = \sin x$.

Por el contrario, más ilustrativo resulta mirar el gráfico de $\dot{x} = \sin x$ versus x en la Figura 1.14. Los puntos de equilibrio del sistema son de la forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Además, es fácil deducir que los equilibrios $\dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$ son atractores, y los equilibrios $\dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots$ son repulsores. En particular, para $x_0 = \pi/4$, la solución $x(t) \rightarrow \pi$ para $t \rightarrow \infty$.

En el ejemplo anterior, notemos que el gráfico de $\sin x$ cerca de $x = \pi$ se parece localmente al de αx (con $\alpha < 0$) cerca de $x = 0$; ver ejemplo 8. Ciertamente, ambas funciones son decrecientes cerca de estos puntos de equilibrio. Más aún, los respectivos retratos de fase en las figuras 1.11 y 1.14 son idénticos al restringirnos a vecindades suficientemente pequeñas de estos equilibrios. Decimos que estos dos sistemas dinámicos son localmente topológicamente equivalentes en estas respectivas vecindades.

Antes de dar una definición formal de equivalencia topológica, necesitamos el siguiente concepto.

Definición 8 Diremos que un **homeomorfismo** es una función f continua e invertible tal que su inversa f^{-1} también es continua. Más en general, una función f de clase C^k , $k \geq 1$, se dice un **C^k -difeomorfismo** si es invertible y si f^{-1} también es de clase C^k .

Definición 9 Un sistema dinámico (X, T, Φ^t) sobre el espacio X es **topológicamente equivalente** a un sistema dinámico (Y, T, Ψ^t) sobre el espacio Y si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ que transforma órbitas de Φ en órbitas de Ψ , respetando la orientación del tiempo.

Dado que esta definición sólo exige que la *orientación* de las órbitas se respete, una equivalencia topológica —inducida por el homeomorfismo h — entre los flujos Φ y Ψ queda definida por la condición

$$h(\Phi^t(x)) = \Psi^{\tau_y(t)}(y),$$

con $y = h(x)$, donde τ_y es una función creciente de t para todo y . Es decir, en general, la escala temporal podría no preservarse bajo equivalencias topológicas.

Si la definición anterior se satisface con $h \in C^k$, $k \geq 1$, entonces decimos que Φ y Ψ son **C^k -equivalentes**. En el caso continuo, también decimos que los campos de vectores asociados son C^k -equivalentes. Si $\tau_y(t) = t$ (i.e., el parámetro t se preserva), entonces h es una **conjugación topológica** (resp. **C^r -conjugación**) entre Φ y Ψ .

Ejemplo 11 En la figura 1.15 se muestran retratos de fase de dos sistemas localmente topológicamente equivalentes. Es posible definir un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ en dos vecindades apropiadas U y V , tal que los campos vectoriales respectivos tienen el mismo número de equilibrios y órbitas periódicas. Además, los retratos de fase son cualitativamente idénticos —es decir, se preservan la estabilidad de todos los conjuntos invariantes y la orientación de las órbitas—, excepto por posibles deformaciones continuas (dilataciones, contracciones y rotaciones en determinadas direcciones) y por estar posiblemente definidos en escalas de tiempo distintas.

Ejemplo 12 Las EDOs planares

$$\dot{r} = \frac{1}{2}r(1 - r), \quad \dot{\theta} = 1, \tag{1.6}$$

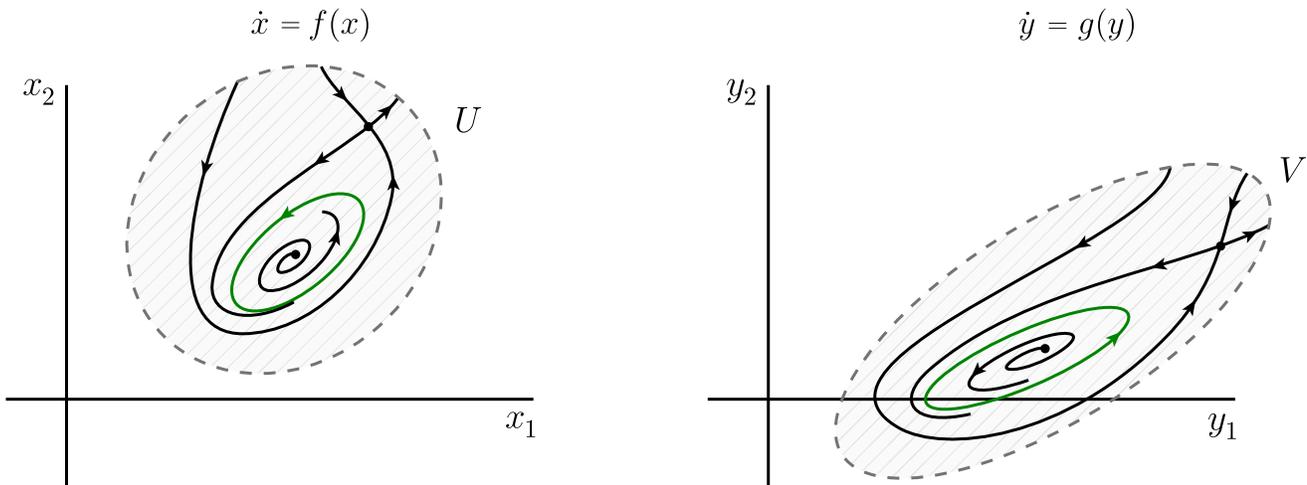


Figura 1.15: Dos sistemas topológicamente equivalentes poseen retratos de fase cualitativamente idénticos.

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = 2, \quad (1.7)$$

donde (r, θ) son coordenadas polares, poseen retratos de fase equivalentes. Ambos tienen una órbita cerrada atractora γ con $r(t) \equiv 1$ y un equilibrio repulsor en el origen. Sin embargo, la órbita cerrada tiene período 2π en (1.6) y período π en (1.7). De hecho, notemos que el reescalamiento del tiempo $t \mapsto 2t$ transforma (1.7) en (1.6).

Conjugación de sistemas a tiempo discreto.

En el caso discreto podemos obtener una relación explícita entre los mapeos de dos sistemas equivalentes. Consideremos los sistemas discretos $x \mapsto f(x)$, $y \mapsto g(y)$, con $x, y \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que ambas funciones f y g son suaves e invertibles y ambos sistemas dinámicos son topológicamente equivalentes por el homeomorfismo h . Consideremos las órbitas

$$\begin{aligned} \dots, f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots, \\ \dots, g^{-1}(y), y, g(y), g^2(y), \dots \end{aligned}$$

Supongamos que x e y están relacionados por el homeomorfismo h de forma que $y = h(x)$. Luego, la órbita de x es mapeada en la órbita de y por h como se indica

en el diagrama conmutativo de la figura 1.16. Es decir,

$$g(y) = h(f(x)) \iff g(h(x)) = h(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego,

$$f(x) = h^{-1}(g(h(x))),$$

pues h es invertible. O bien, en notación más compacta,

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

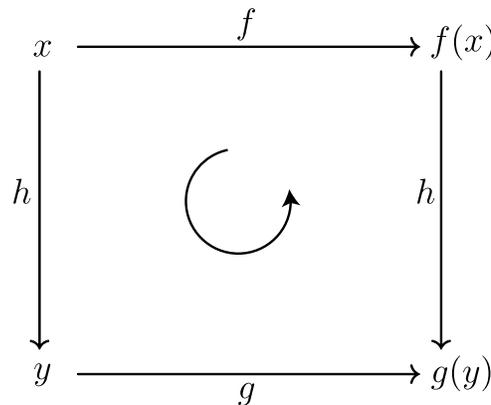


Figura 1.16: Diagrama conmutativo de la equivalencia topológica inducida por el homeomorfismo h sobre dos sistemas dinámicos discretos.

Definición 10 *Dos mapeos f y g que satisfagan la relación*

$$h \circ f = g \circ h,$$

*para algún homeomorfismo h , se dicen **topológicamente conjugados**. Si ambos h y h^{-1} son C^k -difeomorfismos, con $k \geq 1$, f y g se dicen **C^k -conjugados**.*

Si $k \geq 1$, dos aplicaciones f y g conjugadas se pueden considerar como el mismo mapeo escrito en dos sistemas de coordenadas diferentes, mientras que h puede verse como un cambio de coordenadas suave. Luego, dos sistemas dinámicos discretos difeomorfos son prácticamente indistinguibles.

Conjugación de sistemas a tiempo continuo.

La conjugación de dos flujos $\Phi^t, \Psi^t : X \rightarrow X$ a tiempo continuo se define de la misma manera mediante la relación

$$h \circ \Phi^t = \Psi^t \circ h, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

En particular, se desprende de esta definición que una conjugación entre dos flujos Φ^t y Ψ^t no sólo mapea órbitas de un sistema en órbitas del otro, sino que —a diferencia de una equivalencia— también preserva la variable temporal t .

Ejemplo 13 Consideremos el sistema no lineal en $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$X : \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + x^3, \end{cases}$$

El flujo de X está dado por

$$\Phi^t(x, y) = \left(x e^t, \left(y - \frac{x^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{x^3}{4} e^{3t} \right),$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Consideremos el cambio de coordenadas $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4} \right).$$

Se puede verificar que $h^{-1}(\Phi^t(h(x, y))) = (e^t x, e^{-t} y)$, el cual es el flujo de una silla lineal

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Luego, h es una conjugación entre $X(x, y) = (x, -y + x^3)$ e $Y(x, y) = (x, -y)$. Efectivamente, los retratos de fase son como los de la figura 1.17.

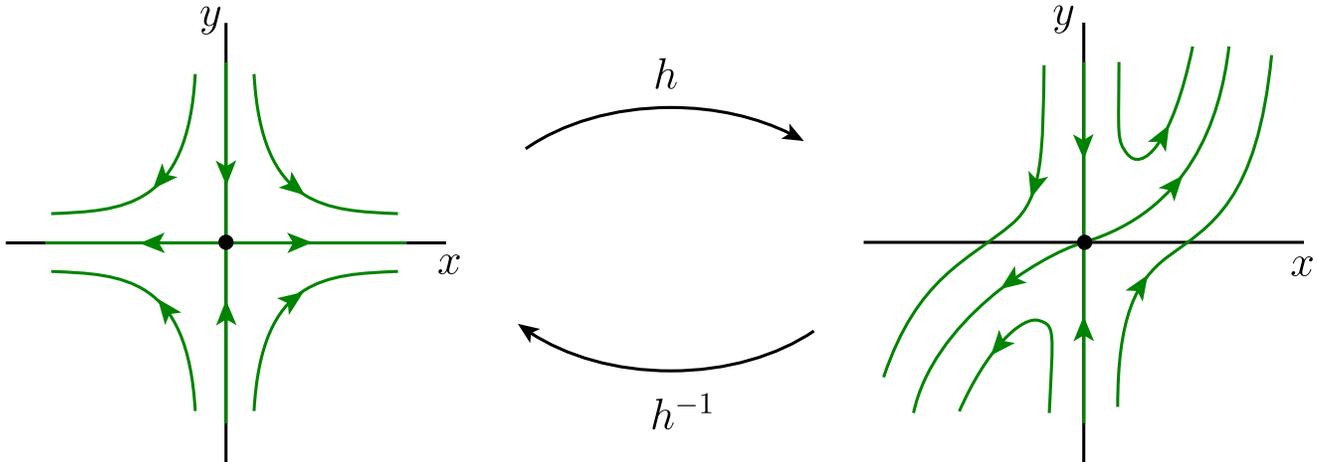


Figura 1.17: Retratos de fase del ejemplo 13.

Si derivamos la ecuación (1.8) con respecto a t y evaluamos en $t = 0$ obtenemos

$$\left(Dh(\Phi^t(x)) \frac{d\Phi^t}{dt}(x) \right) \Big|_{t=0} = \frac{d\Psi^t}{dt}(h(x)) \Big|_{t=0} \quad (1.9)$$

Sean f y g los campos de vectores asociados a Φ^t y Ψ^t , respectivamente. Luego, de las igualdades (1.2) y (1.9), y recordando que $\Phi^0 \equiv Id_X$, se obtiene

$$Dh(x)f(x) = g(h(x)). \quad (1.10)$$

Por otro lado, consideremos ahora la misma conjugación h vista como un cambio de coordenadas $y = h(x)$ aplicada a la EDO $\dot{x} = f(x)$. Con la ayuda de (1.10) hallamos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} = Dh(x)f(x) = g(h(x)) = g(y) \quad (1.11)$$

como uno esperaría. Luego, si h es una conjugación entre los flujos Φ^t y Ψ^t de las EDOs $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$, respectivamente, la aplicación lineal Dh transforma el campo de vectores f en el campo g con $y = h(x)$ mediante la relación

$$f = (Dh)^{-1} \circ g \circ h \quad (1.12)$$

o equivalentemente

$$g = Dh \circ f \circ h^{-1}.$$

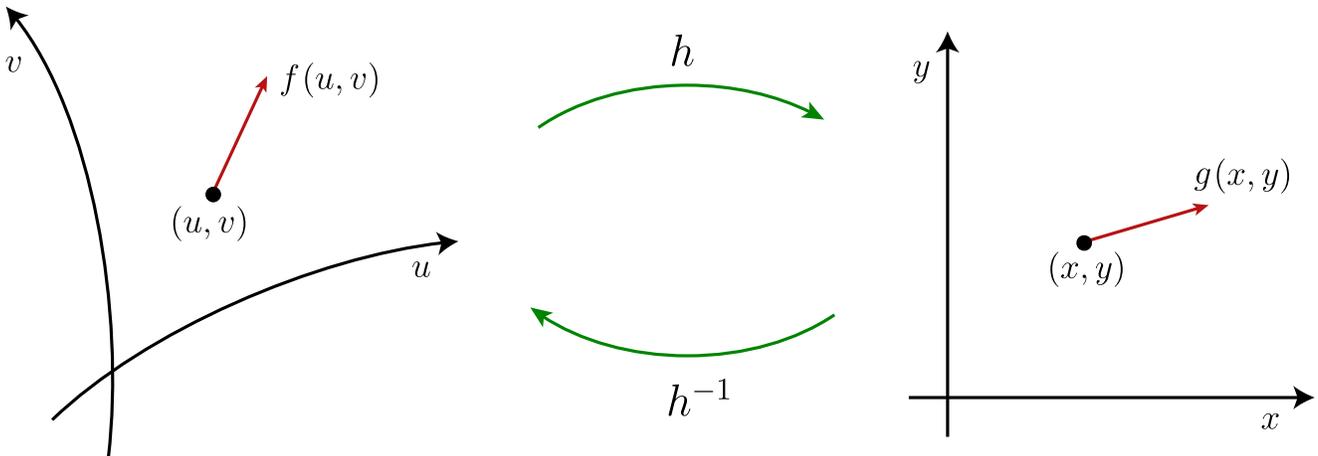


Figura 1.18: El cambio de coordenadas h define una conjugación entre los sistemas definidos por los campos vectoriales f y g .

Ejemplo 14 Considere el sistema planar dado por el campo de vectores g :

$$g : \begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Sea el cambio de coordenadas $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ dado por la transformación

$$h : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases} \quad (1.13)$$

Luego, para determinar cómo h transforma el campo vectorial g en otro campo f definido en el sistema de coordenadas (u, v) como en la figura 1.18, aplicamos la fórmula (1.12) y obtenemos:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (Dh)^{-1} \cdot g(x(u, v), y(u, v)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P(x(u, v), y(u, v)) \\ Q(x(u, v), y(u, v)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

(La igualdad (1.14) también puede obtenerse derivando (1.13) a ambos lados con respecto a t y ocupando la regla de la cadena.)

En particular, si $P(x, y) = x - 2y$ y $Q(x, y) = -y$, el campo de vectores g es

lineal y su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la transformación de coordenadas h dada por la matriz cambio de base cuyas columnas corresponden a vectores propios (o vectores propios generalizados, si fuese el caso) de A , es decir, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ con

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

(Aquí, los valores propios de A son 1 y -1 .) Con esto, según (1.14), el campo de vectores f en las coordenadas (u, v) es

$$f : \begin{cases} \dot{u} = u, \\ \dot{v} = -v, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

es también un sistema lineal y su matriz asociada es justamente la forma diagonal (en general, la Forma Canónica de Jordan) de la matriz A en las coordenadas originales.

1.7. Ejercicios

1. Considere la ecuación del péndulo simple $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$, con $\theta \in \mathbb{S}^1$.
 - a) Introduzca el parámetro $\omega = \sqrt{g/L}$, el reescalamiento del tiempo $\tau = \omega t$ y la nueva variable adicional $v = \frac{d\theta}{d\tau}$, y encuentre el sistema de EDOs de orden 1 equivalente.
 - b) Verifique los puntos de equilibrio para el modelo del péndulo simple.
 - c) Usando un computador reproduzca el retrato de fase del péndulo simple.
2. Encuentre los puntos fijos y las órbitas periódicas de período 2 del mapeo logístico.
3. Usando un computador reproduzca el atractor de Lorenz (“mariposa” de Lorenz) para $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$.

4. En las ecuaciones de Lorenz considere dos condiciones iniciales que difieran en $\epsilon = 10^{-4}$, integre numéricamente sus órbitas y grafique las soluciones en el plano x vs t . Repita el ejercicio para valores distintos de ϵ . ¿Qué puede observar acerca de la separación de las soluciones (dependencia sensitiva a las condiciones iniciales) a medida que varía ϵ ?

5. Verifique que

$$\Phi^t(x) = \frac{x \exp(t)}{x \exp(t) - x + 1}$$

define un operador de evolución a tiempo continuo (flujo) en $[0, 1]$ y encuentre su campo de vectores asociado. ¿Por qué no es un flujo en \mathbb{R} ?

6. Sea γ una órbita periódica del flujo Φ^t en el espacio de fase X y suponga que existen $T > 0$ y $x_0 \in \gamma$ tales que $\Phi^T(x_0) = x_0$. Demuestre que $\Phi^T(x) = x$, para todo $x \in \gamma$. Además, encuentre dos órbitas periódicas γ_1 y γ_2 y períodos positivos T_1 y T_2 para el flujo del sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r-1)(r-2), \\ \dot{\theta} = r^2, \end{cases}$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares en \mathbb{R}^2 .

7. Considere la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que define un sistema dinámico discreto $x \mapsto f(x)$.

a) Demuestre que $f^n \circ f^m = f^{m+n}$ y $(f^n)^m = f^{mn}$.

b) Si $f : I \rightarrow I$, y $a \leq x \leq b$ para todo $x \in I \subset \mathbb{R}$, demuestre que $a \leq f^n(x) \leq b$, para todo $n \geq 1$.

8. Considere el mapeo $x \mapsto f(x) = x^2 - 2$.

a) Encuentre todos los puntos fijos de f .

b) Demuestre que $f^2(x) - x = (f(x) - x)Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio cuadrático.

c) Encuentre todos los puntos periódicos de período 2 de f , es decir, aquellos puntos x^* tales que $f^2(x^*) = x^*$.

9. Demuestre que la frontera, clausura, interior y el complemento de un conjunto invariante de un sistema dinámico son también invariantes.
10. Encuentre el conjunto no errante del siguiente sistema de EDOs dado en coordenadas polares (r, θ) para diferentes valores de μ_1 y μ_2 : $\dot{r} = r(\mu_1 + \mu_2 r^2 - r^4)$, $\dot{\theta} = 1 - r^2$.
11. Encuentre el conjunto no errante de $\dot{\theta} = \mu - \sin \theta$, con $\theta \in \mathbb{S}^1$. Considere $\mu < 1$, $\mu = 1$, y $\mu > 1$.
12. Demuestre que existe una región atrapadora para el flujo del sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_1 x - x(x^2 + y^2) - xy^2, \\ \dot{y} = \mu_2 y - y(x^2 + y^2) - yx^2, \end{cases}$$

para todos los valores finitos de μ_1, μ_2 . Encuentre los puntos de equilibrio y discuta su estabilidad. Muestre que, para $\mu_1 = \mu_2 > 0$, la recta $x = y$ separa dos dominios de atracción distintos. (Sugerencia: Considere un disco cerrado D con frontera $x^2 + y^2 = c^2$, con $c > 0$ grande.)

13. Considere el sistema en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Encuentre el conjunto no-errante. Demuestre que el intervalo cerrado $[-1, 1]$ es un conjunto atrayente, aunque la mayoría de los puntos son errantes. ¿Adónde van a converger la mayoría de las órbitas para $t \rightarrow \infty$?

14. Demuestre que el círculo $r = 1$ es un conjunto atrayente para el flujo de $\dot{r} = r - r^3$, $\dot{\theta} = 1 - \cos(2\theta)$. ¿Cuál de los puntos de equilibrio es atractor y cuál es repulsor? Describa el comportamiento asintótico de órbitas para puntos típicos dentro y fuera del círculo $r = 1$ y en los semiplanos superior e inferior.
15. Construya un ejemplo de un flujo bidimensional con un atractor que no contenga puntos de equilibrio ni órbitas periódicas.
Sugerencia: Considere traslaciones lineales en el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dadas por el campo de vectores $\dot{\theta} = \alpha$, $\dot{\phi} = \beta$.

16. El comportamiento de un sistema mecánico aislado que conserva la energía, con s grados de libertad, está determinado por $2s$ ecuaciones Hamiltonianas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

para $i = 1, 2, \dots, s$. La función escalar $H = H(q, p)$ se llama *función Hamiltoniana*. Por ejemplo, las ecuaciones de movimiento del péndulo ideal

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -k^2 \sin \theta, \end{cases}$$

son ecuaciones Hamiltonianas con $(q, p) = (\theta, \omega)$ y $H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - k^2 \cos \theta$.

- a) Demuestre que una función Hamiltoniana es constante a lo largo de las órbitas de un sistema Hamiltoniano, es decir, $\dot{H} = 0$.
 - b) Demuestre que el equilibrio $(\theta, \omega) = (0, 0)$ del péndulo ideal es estable en sentido Lyapunov. ¿Es este equilibrio asintóticamente estable?
 - c) Haga un bosquejo del retrato de fase.
17. Encuentre valores apropiados (o condiciones suficientes) para los parámetros $\sigma, \beta, \rho \geq 0$ tales que el elipsoide **sólido** E dado por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2\rho)^2 \leq c < \infty\}$$

sea una región atrapadora de todas las órbitas de las ecuaciones de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases}$$

18. Use el teorema de Poincaré-Bendixon para probar que el oscilador de van der Pol $\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ posee al menos una órbita cerrada.
19. Identifique las funciones siguientes como homeomorfismos, difeomorfismos (o como ninguno) en sus dominios de definición:
- (a) $h(x) = 2x + 1$; (b) $h(x) = 2x^2$; (c) $h(x) = x^3$;
 - (d) $h(x) = \frac{5}{3}x^{5/3}$; (e) $h(x) = e^x$; (f) $h(x) = \arctan x$.

20. Construya un homeomorfismo de la recta real que sirva para establecer una equivalencia topológica entre las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = 2x$ y $\dot{x} = x + 2$.
21. Muestre que los campos de vectores $\dot{x} = -x$, $\dot{x} = -4x$, y $\dot{x} = -x^3$ son todos topológicamente equivalentes. Encuentre explícitamente homeomorfismos que relacionen sus órbitas.
22. Considere la ecuación $\dot{x} = x^2 - 1 + \lambda$ que depende del parámetro real λ . Demuestre que esta EDO es topológicamente equivalente a:
- $\dot{x} = x^2 - 1$ si $-\infty < \lambda < 1$,
 - $\dot{x} = x^2$ si $\lambda = 1$,
 - $\dot{x} = x^2 + 1$ si $\lambda > 1$.
23. Considere dos mapeos escalares lineales

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x, \quad \text{y} \quad g : y \mapsto \frac{1}{3}y.$$

Verifique que la transformación $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$h(x) = \begin{cases} x^\nu, & x \geq 0, \\ -|x|^\nu, & x < 0, \end{cases}$$

define una conjugación topológica entre f y g para algún ν apropiado.

24. Demuestre que la transformación $y = h(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, es una conjugación topológica entre los mapeos $x \mapsto 2x$ e $y \mapsto 2^{2n+1}y$ en \mathbb{R} . ¿Por qué no existe una conjugación diferenciable cuando $n > 0$?
25. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos difeomorfismos que definen dos sistemas dinámicos discretos $x \mapsto f(x)$ e $y \mapsto g(y)$. Suponga además que f y g son C^k -conjugados, $k \geq 1$, mediante $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f(0) = 0$, demuestre que las matrices jacobianas de f en 0 y de g en $h(0)$ son similares. ¿Qué implica esto sobre los valores propios de $Df(0)$ y $Dg(h(0))$?
26. Demuestre que los dos mapeos $f(x) = \mu x(1 - x)$ y $g(x) = c - x^2$ son conjugados, al encontrar una función invertible $h(x)$ de la forma $h(x) = ax + b$, tal que $f(h(x)) = h(g(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (También vas a necesitar especificar una relación entre los parámetros μ y c .)

27. Encuentre una conjugación entre el mapeo-tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2; \\ -2x + 2, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

y $G(x) = 2x^2 - 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Sugerencia: Considere la identidad trigonométrica $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

28. Sean φ y ψ dos flujos en la recta real \mathbb{R} con una cantidad finita de puntos de equilibrio. Demuestre que φ y ψ son topológicamente equivalentes si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) Los equilibrios de ambos, ordenados en la recta real, se pueden poner en una correspondencia uno-a-uno que mantenga el orden — es decir, al equilibrio n -ésimo de φ le corresponde el equilibrio n -ésimo de ψ ;
- b) Los equilibrios correspondientes entre φ y ψ tienen el mismo tipo topológico (atractor, repulsor, silla).

Capítulo 2

Sistemas dinámicos a tiempo continuo

Para estudiar y describir la forma geométrica de las órbitas de

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

lo primero que debemos notar es que el campo de vectores (2.1) le asocia un vector $f(x)$ a cada punto x . Localmente, una órbita de (2.1) es una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que pasa por un punto $x(0) = p$ y cuyo campo de vectores tangentes (o campo de velocidades) coincide con f en cada punto, es decir, tal que $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(t) = f(\alpha(t))$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

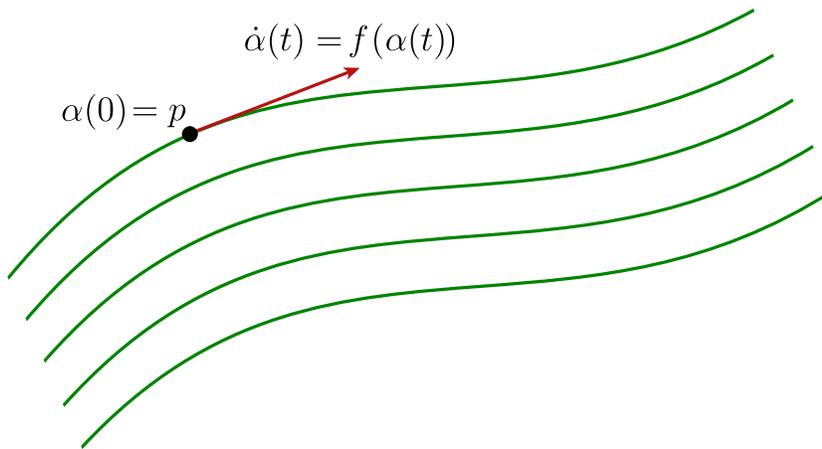


Figura 2.1: El campo de vectores es tangente a las órbitas del sistema en cada punto.

Como vimos en el capítulo anterior, las órbitas de (2.1) coinciden o son disjuntas. Esto es, el retrato de fase de (2.1) se puede descomponer en una unión

disjunta de curvas diferenciables, pudiendo cada una de ellas ser:

- a) Imagen biunívoca de un intervalo de \mathbb{R} ,
- b) Un punto (de equilibrio), o
- c) Difeomorfa a un círculo (i.e., una órbita periódica).

En general, nos interesa poder dar una descripción cuantitativa de este retrato de fase. Las primeras preguntas que uno puede hacerse son, entonces: ¿cuáles y cuántos son los estados asintóticos del sistema (por ejemplo, equilibrios y órbitas periódicas)? ¿cuál es la estabilidad de estos conjuntos invariantes ante pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales?

Ejemplo 15 Considere el oscilador armónico con fricción. Físicamente, este sistema puede interpretarse como una masa unida a un resorte, el cual está sujeto a una pared, y cuya energía es disipada por el roce con el suelo. La segunda ley de Newton nos dice que el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de reposo viene dado por la EDO de 2do orden:

$$\ddot{x} - c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = cy - \omega^2 x. \end{cases}$$

Éste es un sistema lineal y por lo tanto no es difícil hallar una solución explícita. Sin embargo, dado que se trata de un sistema físico, también podemos dar una descripción intuitiva del comportamiento de las soluciones como en la figura 2.2. Si $c = 0$, en la figura 2.2(b), no se considera roce con el suelo y el sistema conserva la energía. La dinámica resultante corresponde a un movimiento oscilatorio perfectamente sinusoidal. El origen en el plano (x, y) es un *centro*, un equilibrio estable en sentido Lyapunov (pero no es asintóticamente estable) rodeado de un continuo de órbitas periódicas. Si $c < 0$, en la figura 2.2(a), el sistema masa-resorte pierde energía debido al roce, por lo tanto la amplitud de las oscilaciones decrece hasta converger al estado de reposo en el origen, el cual es un equilibrio atractor. Por último, si $c > 0$ —caso físicamente improbable—, en la figura 2.2(c),

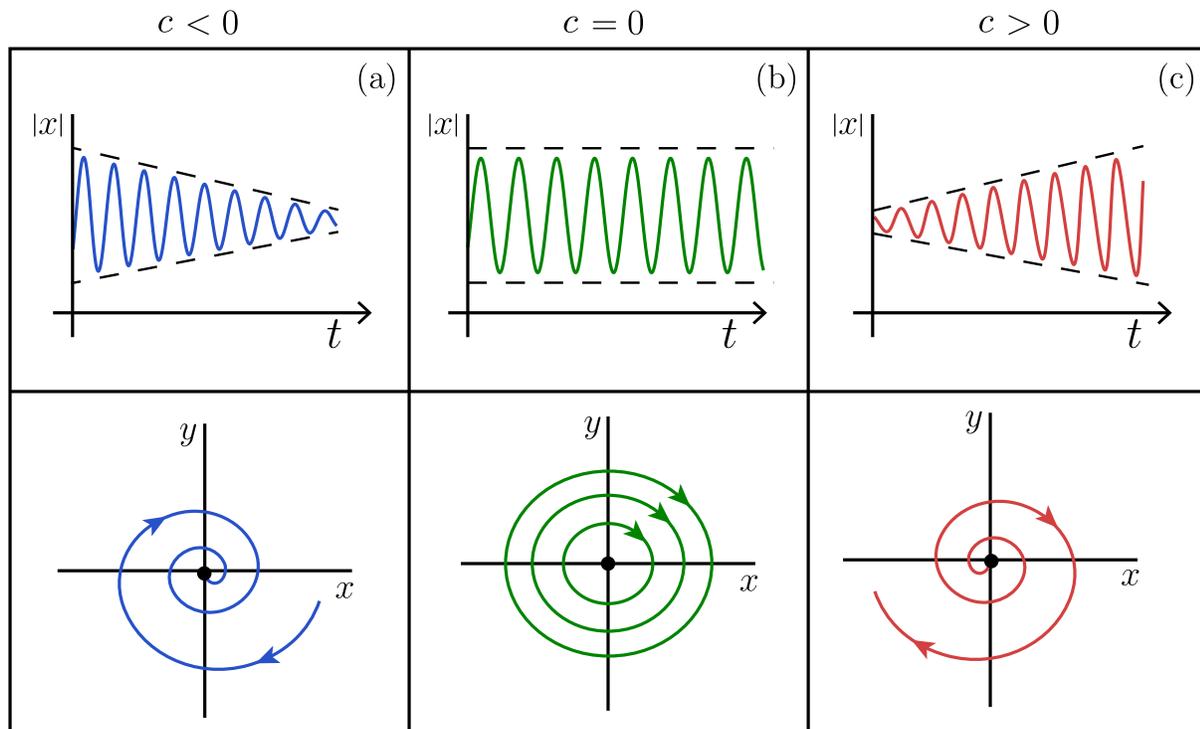


Figura 2.2: Diferentes retratos de fase del oscilador armónico dependiendo del signo de c .

la amplitud de las oscilaciones crece y el origen es un repulsor. En este ejemplo, fuimos capaces de deducir propiedades de estabilidad de los equilibrios. En caso de no estar seguros de estas propiedades podemos hacer un poco más de álgebra para asegurarnos. Éste será el tópic de esta sección.

Aún cuando podamos indicar la dirección del flujo en el retrato de fase, no podemos dar mucha información sobre qué tan rápido es el movimiento. Por ejemplo, las figuras dan indicación sobre la amplitud pero no la frecuencia de las oscilaciones. En particular, la frecuencia es la misma para todas las órbitas periódicas en el retrato de fase para $c = 0$, lo cual no se puede deducir de la imagen.

Ejemplo 16 Considere el siguiente modelo reescalado de dos poblaciones que compiten por el mismo alimento (o recurso), de manera que esta competencia

inhibe el crecimiento de cada uno:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) := x(1 - x - \alpha y), \\ \dot{y} = g(x, y) := \lambda y(1 - y - \beta x). \end{cases} \quad (2.2)$$

Los parámetros α y β son positivos e indican el efecto de inhibición o competencia. El parámetro $\lambda > 0$ es una tasa de crecimiento reescalada. Notemos que sólo estamos interesados en el cuadrante positivo, pues tratamos con poblaciones de especies.

En ausencia de la especie y , la especie x sigue un *crecimiento logístico*: La especie x crece hasta alcanzar un valor de equilibrio en $x = 1$ si $x_0 < 1$, o bien decrece hasta $x = 1$ si $x_0 > 1$. Los puntos de equilibrio cuando $y = 0$ corresponden a $(0, 0)$ (repulsor) y $(1, 0)$ (atractor). Similarmente, en ausencia de la especie x , la especie y crece en forma logística. En este escenario se añade el equilibrio atractor $(0, 1)$.

Para obtener información sobre las soluciones del sistema para $x > 0$ e $y > 0$, una herramienta útil es graficar las **nulclinas** que se definen como las curvas de nivel $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$. Cada punto intersección de las nulclinas corresponde a un equilibrio. Además, el campo de vectores es completamente horizontal en los puntos donde $g(x, y) = 0$, y vertical en los puntos de la curva $f(x, y) = 0$. De esta forma, podemos “llenar” el resto del espacio de fase para cada uno de los casos

En este ejemplo particular, se tienen las nulclinas

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\longrightarrow x = 0, y = \frac{1}{\alpha}(1 - x), \\ \dot{y} = 0 &\longrightarrow y = 0, y = 1 - \beta x. \end{aligned}$$

Dependiendo de los valores de los parámetros α y β se tiene las siguientes posibilidades:

- $\alpha, \beta < 1$: Ambos equilibrios $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son inestables; p^* es estable; $(0, 0)$ es repulsor. Luego, las poblaciones llegan a una situación de equilibrio donde ambos x e y son positivos. Desafortunadamente, este caso es bien raro en la naturaleza. Típicamente al menos α o β es mayor a uno.

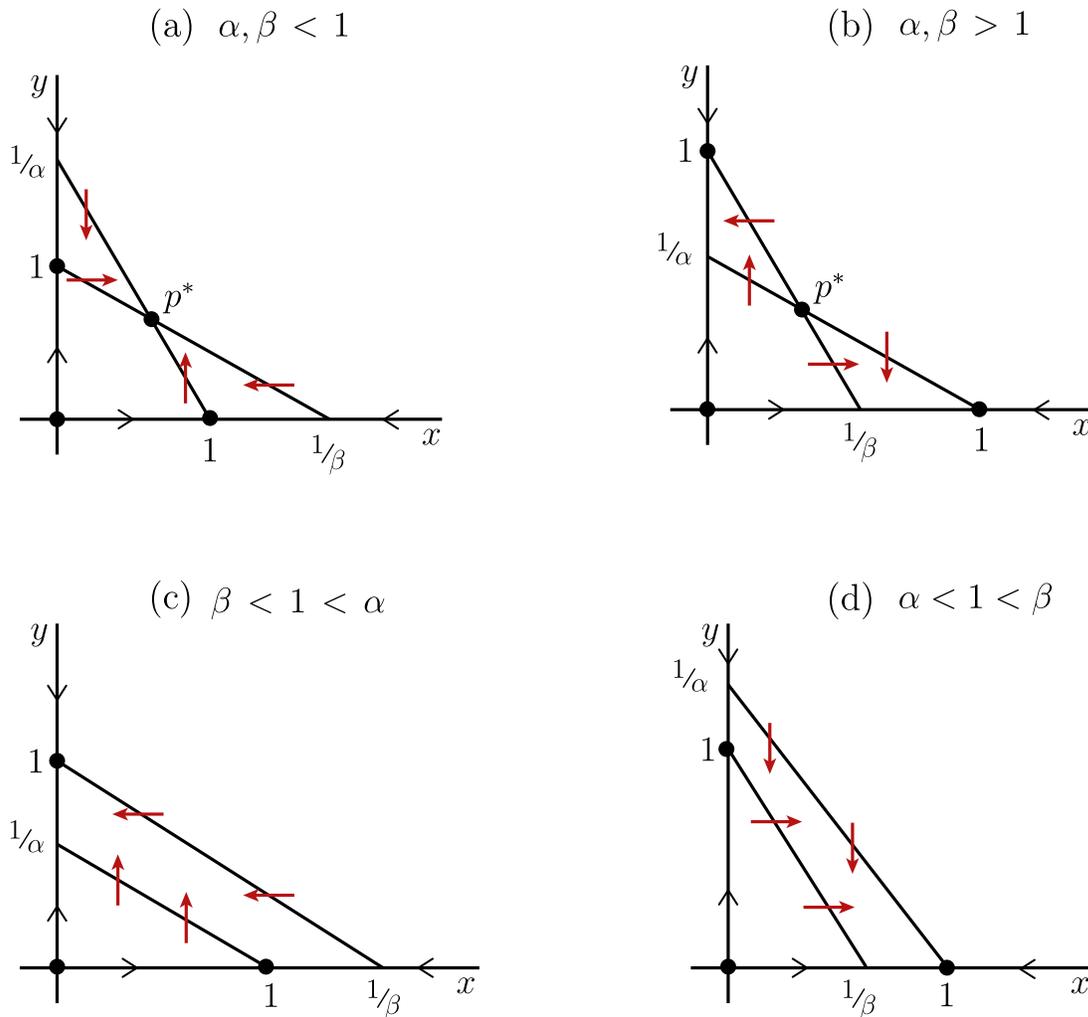


Figura 2.3: Diferentes gráficas de las nulclinas del sistema en el ejemplo 2 dependiendo de los parámetros α y β .

- $\alpha, \beta > 1$: Ambos equilibrios $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son estables; p^* es inestable; $(0, 0)$ es repulsor. Luego, existen dos atractores en este sistema y depende de las condiciones iniciales si la población x o la población y se extingue. Esto significa que debe existir una curva que pasa por p^* y que separa el primer cuadrante en dos regiones: A un lado de esta *separatriz*, las soluciones convergen a $(1, 0)$; al otro lado, convergen a $(0, 1)$. Es decir, la *separatriz* separa los dos *dominios de atracción*. En general no es posible hallar una ecuación explícita para la separatriz. Sin embargo, es claro que dicha curva debe existir. Diremos más acerca de separatrices entre dos dominios de atracción

disjuntos en secciones futuras.

- $\beta < 1 < \alpha$: El punto $(1, 0)$ es inestable, y el punto $(0, 1)$ es estable. Así, la población x muere. Intuitivamente esto se ve de las ecuaciones diferenciales del modelo. Si $\beta < 1 < \alpha$ entonces y tiene un efecto inhibitor más fuerte en x que x sobre y . Por lo tanto, en ese sentido, los x están en desventaja.
- $\alpha < 1 < \beta$: Análogo al caso anterior. El punto $(1, 0)$ es estable, y el punto $(0, 1)$ es inestable. En este caso, es la población y la que muere.

En tres de los cuatro casos una de las poblaciones se extingue. Esto ilustra el principio de *exclusión competitiva* que es muy común en la naturaleza. Típicamente, una de las dos especies se hará a un lado o escogerá otra fuente de alimentos para sobrevivir. Luego, naturalmente, una especie (la más inhibida de las dos) intenta ajustarse a la inhibición que la otra tiene sobre ella. Por ejemplo, supongamos que estamos en la situación $\beta < 1 < \alpha$. Esto significa que y tiene un efecto inhibitor más fuerte sobre x que x sobre y . Luego, x intentará adaptarse para poder sobrevivir. Matemáticamente, esto significa que x tratará de cambiar el parámetro α buscando otra fuente de alimento, por ejemplo. Si α decrece sólo ligeramente, la situación permanece topológicamente igual, y x se extinguirá (simplemente le tomará más tiempo). Sin embargo, cuando α decrece dramáticamente, de manera que $\alpha < 1$, entonces la situación se vuelve topológicamente diferente y x logra sobrevivir. El momento de cambio entre los dos casos topológicamente distintos sucede cuando $\alpha = 1$. A este tipo de transición entre dos retratos de fase topológicamente diferentes le llamamos una bifurcación. Estudiaremos algunas de las bifurcaciones más relevantes en este capítulo.

2.1. Estabilidad de puntos de equilibrio hiperbólicos

Considere el campo de vectores $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, o equivalentemente en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

con un equilibrio en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La matriz Jacobiana $Df(x_0)$ de f en x_0 está definida como la matriz $n \times n$

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Definimos las tres cantidades siguientes:

- n_0 = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real nula;
- n_+ = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real positiva;
- n_- = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real negativa.

Obviamente, $n_0 + n_+ + n_- = n$ al considerar la multiplicidad de valores propios.

Definición 11 *Un equilibrio x_0 del sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, se dice **hiperbólico** si $n_0 = 0$.*

Las propiedades de estabilidad de un equilibrio hiperbólico x_0 de un sistema dinámico no-lineal están determinadas por la *linealización* del campo vectorial f alrededor de x_0 . Esto se conoce como el teorema de Hartman-Grobman, del cual omitimos su demostración pues se escapa del dominio de este curso, pero remitimos al lector a las siguientes referencias [13, 16, 17].

Teorema 2 (*Hartman & Grobman*) *Si el campo de vectores*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

tiene un equilibrio hiperbólico x_0 , entonces existe una vecindad \mathcal{U} de x_0 tal que (2.3) en \mathcal{U} es localmente topológicamente equivalente al sistema linealizado

$$\dot{x} = Df(x_0)x$$

en una vecindad \mathcal{V} del origen.

Ejemplo 17 El sistema $\dot{x} = \sin x$ cerca del equilibrio $x = \pi$ es topológicamente equivalente al sistema

$$\dot{x} = \left(\frac{d}{dx} \sin x \Big|_{x=\pi} \right) \cdot x = \cos \pi \cdot x = -x,$$

como habíamos visto en el Ejemplo 10 del capítulo 2.

El teorema de Hartman-Grobman nos dice que la dinámica de cualquier sistema dinámico continuo no-lineal es similar a la dinámica de un sistema lineal cerca de sus equilibrios hiperbólicos. Esto nos lleva a la pregunta ¿Cuáles son las posibles dinámicas de un sistema lineal? Para dar una respuesta, por simplicidad, consideremos todos los campos de vectores lineales en \mathbb{R}^2 . El caso general para \mathbb{R}^n es similar y lo revisaremos en la siguiente sección.

Sea A una matriz 2×2 no-singular con coeficientes en \mathbb{R} y consideremos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El único punto de equilibrio de este sistema es el origen $(x, y) = (0, 0)$. Los valores propios de A están determinados por los ceros de su polinomio característico

$$\det(\lambda I - A) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - A \right| = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A),$$

donde $\text{Tr}(A)$ y $\det(A)$ son la traza y el determinante de A , respectivamente. Notemos que $n_0 = 1$ implica $\det(A) = 0$. Como asumimos que A es invertible, entonces basta suponer que el origen es hiperbólico, es decir, $n_0 = 0$. De esta manera tenemos la partición del plano $\text{Tr}(A), \det(A)$ en las regiones de la figura 2.4 dada por la naturaleza de las raíces del polinomio característico:

- En 1 y 1a: $n_- = 2$. Luego, el origen es un atractor.
- En 2 y 2a: $n_+ = 2$. El origen es un repulsor.
- En 3: $n_- = n_+ = 1$. El origen es una silla.

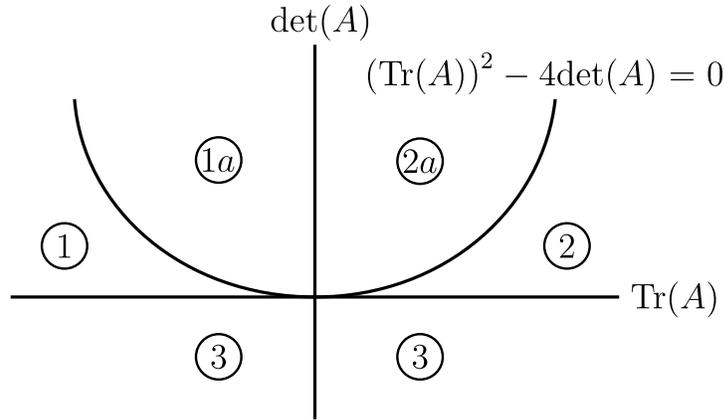


Figura 2.4: Naturaleza de los valores propios de la matriz A dependiendo de $\text{Tr}(A)$ y $\text{det}(A)$.

Para cada una de estas regiones tenemos el cuadro de la figura 2.5 con los retratos de fase en cada caso. Si $\text{det}(A) > 0$ vemos que la estabilidad del origen queda completamente determinada por el signo de $\text{Tr}(A)$. La transición ocurre sobre el semieje positivo $\text{Tr}(A) = 0$ en donde $n_0 = 2$ (los valores propios son imaginarios puros) y el origen no es hiperbólico. En cambio, en el semiplano inferior $\text{det}(A) < 0$, el origen siempre es una silla. Luego, sobre el eje $\text{det}(A) = 0$ hay un valor propio que está anulándose —es decir, $n_0 = 1$ — al cambiar de signo positivo a negativo (o viceversa) y el origen deja de ser hiperbólico en esta transición. Además, los valores propios de A son complejos conjugados en las regiones 1a y 2a en donde el discriminante $(\text{Tr}(A))^2 - 4\text{det}(A) < 0$; y son reales y distintos en las regiones 1, 2 y 3 cuando $(\text{Tr}(A))^2 - 4\text{det}(A) > 0$. Sobre la parábola $(\text{Tr}(A))^2 - 4\text{det}(A) = 0$ el sistema tiene un único valor propio (real) con multiplicidad 2. En tal caso, el equilibrio sigue siendo hiperbólico siempre que $\text{det}(A) \neq 0$.

2.2. Flujos lineales n -dimensionales

En el caso n -dimensional general tenemos que la solución de

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

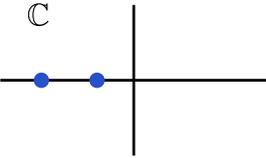
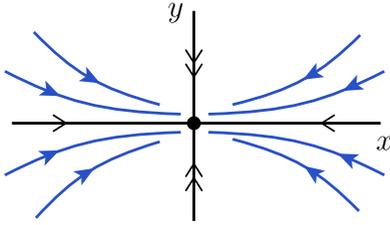
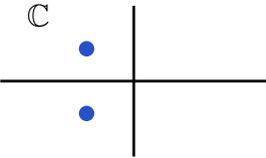
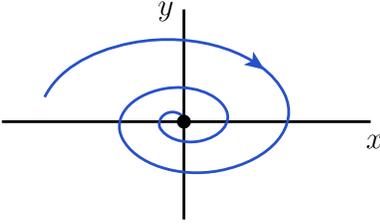
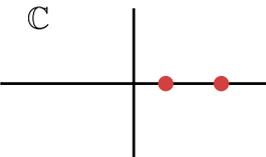
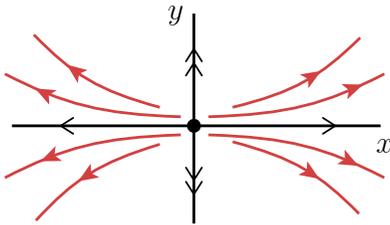
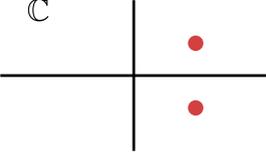
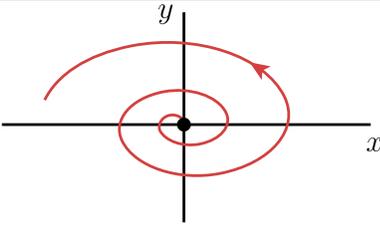
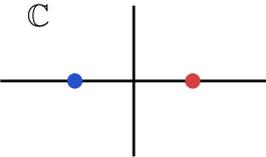
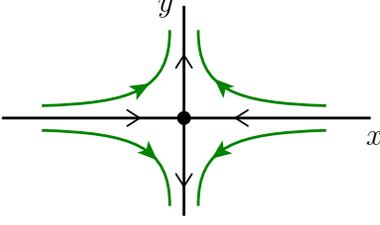
Región	Valores propios	Retrato de fase	Estabilidad
①			Nodo Atractor
①a			Foco Atractor
②			Nodo Repulsor
②a			Foco Repulsor
③			Punto Silla

Figura 2.5: Retratos de fase del origen del sistema lineal bidimensional $\dot{x} = Ax$ en los casos hiperbólicos genéricos.

viene dada por

$$x(x_0, t) = e^{tA}x_0, \tag{2.5}$$

donde $x(0) = x_0$ es la condición inicial y e^{tA} se define formalmente como la serie convergente

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots \quad (2.6)$$

Una solución general para (2.4) se puede obtener como combinación lineal de n soluciones linealmente independientes $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t), \quad (2.7)$$

donde las constantes c_j quedan determinadas por las condiciones iniciales. Si A tiene n vectores propios linealmente independientes v^j , $j = 1, \dots, n$, entonces podemos tomar como una base para el espacio de soluciones a las siguientes funciones vectoriales

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j, \quad (2.8)$$

donde λ_j es el valor propio asociado a v^j . Para valores propios complejos sin multiplicidad, $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, con vectores propios $v^R \pm iv^I$, podemos tomar

$$\begin{aligned} x^j &= e^{\alpha_j t} (v^R \cos(\beta t) - v^I \sin(\beta t)), \\ x^{j+1} &= e^{\alpha_j t} (v^R \sin(\beta t) + v^I \cos(\beta t)), \end{aligned} \quad (2.9)$$

como el par de soluciones (reales) linealmente independientes asociadas. Cuando hay valores propios repetidos y menos de n vectores propios, entonces uno genera los vectores propios *generalizados* (Más detalles al respecto se pueden hallar en cualquier texto clásico que cubra la teoría de ecuaciones diferenciales lineales como [16, 17].). Denotamos la **solución fundamental** a aquella matriz $n \times n$ que contiene n soluciones linealmente independientes en sus columnas como

$$X(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)]. \quad (2.10)$$

Las columnas x^j , $j = 1, \dots, n$ de $X(t)$ forman una base del espacio de soluciones de (2.4). Es fácil probar que

$$e^{tA} = X(t)X^{-1}(0). \quad (2.11)$$

Por otro lado, la ecuación (2.4) también se puede resolver al primero hallar una transformación invertible T que diagonalice A o al menos la ponga en su

forma normal de Jordan (si hay valores propios repetidos). La ecuación (2.4) se transforma en

$$y' = Jy, \quad (2.12)$$

donde $J = T^{-1}AT$ y $x = Ty$. Es más fácil trabajar con (2.12), pero dado que las columnas de T son justamente los vectores propios (generalizados) de A , al final se requiere la misma cantidad de trabajo que con el primer método. La exponencial e^{tA} se puede calcular como

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}. \quad (2.13)$$

En particular, las exponenciales para las matrices de Jordan de tamaño 2×2 son:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & e^{tA} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, & e^{tA} &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, & e^{tA} &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Notemos también que si v^j es un vector propio asociado a un valor propio real λ_j de A , entonces v^j es también un vector propio asociado al valor propio $e^{\lambda_j t}$ de e^{tA} . Más aún, si el subespacio generado por $\operatorname{Re}(v^j)$ y $\operatorname{Im}(v^j)$ es un espacio propio asociado al par de valores propios complejos conjugados $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$, entonces es también un espacio propio asociado a $e^{\lambda_j t}, e^{\bar{\lambda}_j t}$.

2.2.1. Subespacios invariantes

La matriz e^{tA} puede considerarse como una aplicación de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n : dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(x_0, t) = e^{tA}x_0$ es el punto en el cual está la solución que partió en x_0 después de un tiempo t . Luego, el operador e^{tA} contiene información *global* sobre el conjunto de *todas* las soluciones de (2.4), pues la fórmula (2.5) se satisface para todos los puntos $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, e^{tA} es un ejemplo de un flujo, en este caso, generado por el campo de vectores lineal Ax definido en \mathbb{R}^n .

El flujo $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se puede pensar como el conjunto de todas las soluciones de (2.4). En este conjunto, hay ciertas soluciones que juegan un rol especial;

aquellas que están en los subespacios vectoriales generados por los vectores propios. Estos subespacios son invariantes bajo e^{tA} , en particular, si v^j es un vector propio (real) de A y, entonces también de e^{tA} , entonces una solución que parte en un punto $c_j v^j \in \mathbb{R}^n$ permanece en el subespacio generado por v^j para todo tiempo; de hecho,

$$x(c v^j, t) = c v^j e^{\lambda_j t}. \quad (2.15)$$

Similarmente, el subespacio (bidimensional) generado por $\operatorname{Re}(v^j)$ y $\operatorname{Im}(v^j)$, cuando v^j es un vector propio complejo, es invariante bajo e^{tA} . En resumen, los espacio propios de A son subespacios invariantes para el flujo.

Dividimos los subespacios generados por los vectores propios en tres clases: Definimos el **espacio estable de A** —denotado por E^s — como el subespacio generado por los vectores propios (generalizados) de A correspondientes a los valores propios con parte real negativa. Similarmente, el **espacio inestable de A** —denotado por E^u — es el subespacio generado por los vectores propios (generalizados) de A correspondientes a los valores propios con parte real positiva. Finalmente, el **espacio central E^c** es el subespacio generado por los vectores propios (generalizados) de A correspondientes a los valores propios con parte real nula.

Los nombres reflejan el hecho de que las soluciones en E^s se caracterizan por un decaimiento exponencial (ya sea, monótono u oscilatorio), aquellas en E^u por un crecimiento exponencial, y aquellas en E^c por ninguna de las anteriores. En ausencia de valores propios múltiples, estas últimas soluciones o bien oscilan a una amplitud constante (si $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i\beta$) o permanecen constantes (si $\lambda = 0$). Cuando hay valores propios múltiples para los cuales sus multiplicidades algebraica y geométrica difieren, entonces uno podrá tener crecimiento de soluciones en E^c .

Ocupando la notación de la sección 2.1, tenemos que $\dim E^s = n_-$, $\dim E^u = n_+$ y $\dim E^c = n_0$. Por supuesto, $n_- + n_+ + n_0 = n$. En particular, si $n_0 = 0$, decimos que el sistema lineal (2.4) es **hiperbólico**.

Teorema 3 *Considere los dos sistemas lineales*

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.16)$$

$$\dot{x} = Bx, \quad (2.17)$$

donde A y B son matrices de tamaño $n \times n$. Si $n_0(A) = n_0(B) = 0$, entonces los sistemas (2.16) y (2.17) son topológicamente equivalentes si y sólo si $n_+(A) = n_+(B)$ y, en consecuencia, $n_-(A) = n_-(B)$.

Este teorema nos entrega una manera de describir cualitativamente por completo cualquier sistema lineal hiperbólico, la cual depende solamente del número de valores propios con parte real negativa y positiva (contando multiplicidad). Una de las consecuencias de este teorema es que los retratos de fase de los casos 1 y 1a, así como 2 y 2a de la figura 2.5, son topológicamente equivalentes!

2.3. Estabilidad de puntos de equilibrio hiperbólicos (continuación)

Gracias al teorema de Hartman-Grobman y a la completa caracterización de sistemas lineales hiperbólicos, podemos establecer las siguientes propiedades de un equilibrio hiperbólico de un sistema no lineal.

Definición 12 *Un equilibrio x_0 hiperbólico del sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, se dice **atractor** si $n_- = n$; x_0 es un **repulsor** si $n_+ = n$; y x_0 es un **punto silla** si el producto $n_+ \cdot n_- \neq 0$.*

El siguiente teorema es consecuencia del anterior y del teorema de Hartman-Grobman:

Teorema 4 *Considere los dos sistemas no-lineales*

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.18)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad (2.19)$$

con equilibrios hiperbólicos x_0 de (2.18) e y_0 de (2.19). Entonces, los retratos de fase de (2.18) y (2.19) son localmente topológicamente equivalentes cerca de x_0 e y_0 , respectivamente, si y sólo si estos equilibrios tienen el mismo número n_- (y n_+) de valores propios con parte real negativa (y positiva).

Ejemplo 18 Consideremos un modelo de depredación entre dos especies dado por el sistema de dos EDOs no-lineales:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N \left[r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{kP}{N+D} \right], \\ \frac{dP}{dt} = P \left[s \left(1 - \frac{hP}{N} \right) \right], \end{cases} \quad (2.20)$$

donde r, K, k, D, s y h son constantes positivas. Aquí, la especie N es presa del depredador P . Los parámetros r y s son las tasas de crecimiento intrínseco de N y P , respectivamente. En ausencia de depredador, la especie N sigue un crecimiento logístico en donde, en el largo plazo, se alcanza una *capacidad de carga* K , que indica cuánto es el máximo de recursos que tiene el ambiente para albergar a la especie N . El término de depredación (también llamado la *respuesta funcional* del depredador) es $\frac{kNP}{N+D}$, el cual indica cómo cambia (disminuye) el crecimiento de N ante encuentros con el depredador P . En este caso, la respuesta funcional muestra un efecto de saturación de los depredadores. Por último, el crecimiento de los depredadores es también del tipo logístico, en donde la capacidad de soporte de P aquí es $\frac{N}{h}$, es decir, proporcional a la cantidad de presas disponibles.

Como un primer paso del análisis, expresemos el modelo en términos de nuevas variables y nuevos parámetros mediante la equivalencia topológica:

$$u(\tau) = \frac{N(t)}{K}, \quad v(\tau) = \frac{hP(t)}{K}, \quad \tau = rt,$$

y la reparametrización

$$a = \frac{k}{hr}, \quad b = \frac{s}{r}, \quad d = \frac{D}{K}.$$

De esta forma, el sistema (2.20) nos queda:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-u) - \frac{auv}{u+d} = f(u, v), \\ \frac{dv}{d\tau} = bv \left(1 - \frac{v}{u} \right) = g(u, v), \end{cases} \quad (2.21)$$

el cual sólo tiene 3 parámetros *adimensionales* a, b y d . El proceso de adimensionalización reduce el número de parámetros al agruparlos en una forma que tenga

sentido. Estos agrupamientos generalmente dan medidas relativas del efecto de los parámetros originales. Por ejemplo, b es la razón entre la tasa de crecimiento del depredador y la de la presa y así $b < 1$ y $b > 1$ tienen significados ecológicos definidos; con el primero las presas se reproducen más rápido que los depredadores.

Los puntos de equilibrio (u^*, v^*) de (2.21) satisfacen

$$u^*(1 - u^*) - \frac{au^*v^*}{u^* + d} = 0, \quad bv^* \left(1 - \frac{v^*}{u^*}\right) = 0. \quad (2.22)$$

Sólo nos interesan los equilibrios positivos, es decir, las soluciones positivas de

$$v^* = u^*, \quad (u^*)^2 + (a + d - 1)u^* - d = 0,$$

de las cuales la única positiva es

$$u^* = \frac{(1 - a - d) + \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2}}{2}, \quad v^* = u^*.$$

La matriz jacobiana A de (2.21) en (u^*, v^*) es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial f}{\partial v}(u^*, v^*) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial g}{\partial v}(u^*, v^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \left[\frac{au^*}{(u^* + d)^2 - 1} \right] & \frac{-au^*}{u^* + d} \\ b & -b \end{pmatrix}.$$

Para la coexistencia en el largo plazo de ambas especies, requerimos que el punto (u^*, v^*) sea atractor. Luego, las condiciones necesarias y suficientes para esto son

$$\text{Tr}(A) < 0 \quad \Longrightarrow \quad u^* \left[\frac{au^*}{(u^* + d)^2 - 1} \right] < b, \quad (2.23)$$

$$\det(A) > 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{a}{u^* + d} - \frac{au^*}{(u^* + d)^2} > 0. \quad (2.24)$$

Sustituyendo el valor de la coordenada u^* obtenemos las condiciones de estabilidad explícitas en términos de los parámetros a, b y d , y luego, en términos de los parámetros originales r, K, k, D, s y h en (2.20).

Notemos que, en general, esto determina un dominio abierto en el espacio de parámetros (a, b, d) tal que, si los parámetros yacen dentro de él, el equilibrio (u^*, v^*) es siempre un atractor, y si están fuera de él, el equilibrio es inestable. Este último caso requiere que al menos una de las ecuaciones (2.23) o (2.24) no se satisfaga. Por ejemplo, reemplazando el valor de u^* , usando la primera ecuación en (2.22) y $v^* = u^*$ se tiene

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left[1 + \frac{a}{u^* + d} - \frac{au^*}{(u^* + d)^2} \right] bu^* \\ &= \left[1 + \frac{ad}{(u^* + d)^2} \right] bu^* \\ &> 0 \end{aligned}$$

para todo $a > 0, b > 0, d > 0$ y luego (2.24) siempre se satisface. Entonces, el dominio de estabilidad queda enteramente determinado por (2.23), es decir, $\text{Tr}(A) < 0$, lo cual al reemplazar u^* y de nuevo usando (2.22) queda de la forma

$$b > \left[a - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2} \right] \frac{[1 + a + d - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2}]}{2a}.$$

Para cualquier valor de $(a, b, d) \in \mathbb{R}_+^3$ satisfaciendo esta desigualdad, se obtiene un retrato de fase topológicamente equivalente en donde (u^*, v^*) es un equilibrio atractor.

La frontera de este dominio de estabilidad queda definida por la ecuación

$$b = \left[a - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2} \right] \frac{[1 + a + d - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2}]}{2a}, \quad (2.25)$$

la cual representa una superficie en el primer octante del espacio (a, b, d) . En particular, para cada valor (a, b, d) en esta superficie, el equilibrio (u^*, v^*) es no-hiperbólico (*¿Por qué?*). Más aún, cada vez que un punto (a, b, d) cruza esta superficie pasando desde la región $\text{Tr}(A) < 0$ hacia $\text{Tr}(A) > 0$ o viceversa, el equilibrio (u^*, v^*) cambia su estabilidad. Es decir, a cada lado de esta superficie el sistema (2.21) tiene retratos de fase no equivalentes. Decimos que (2.25) define una superficie de bifurcación.

2.4. Variedades invariantes

Hasta el momento hemos visto principalmente métodos para determinar existencia y estabilidad local de puntos de equilibrio. Más aún, excepto bajo condiciones muy específicas, solamente podemos describir la dinámica en una vecindad de estos puntos. La linealización y la equivalencia topológica implicadas en el teorema de Hartman-Grobman son propiedades *locales*. En consecuencia, sabemos muy poco sobre propiedades más globales de un sistema dinámico y sobre cómo “pegar” distintas informaciones para obtener un retrato de fase completo.

Esto es de especial importancia si hay *más de un* conjunto atractor en el espacio de fase: ¿De qué manera debemos escoger una condición inicial para que su órbita finalmente converja a un punto atractor dado y no a otro? Por ejemplo, imaginemos una hoja que es llevada río abajo por la corriente. Si una roca se ubica en el centro del río, entonces, podemos esperar que la hoja pase o bien por la derecha de la roca o por el lado izquierdo. Solamente habrá un conjunto especial de órbitas posibles para las cuales la hoja llega justo a la roca. Estas órbitas especiales determinan la frontera entre pasar a uno u otro lado de la roca y seguir río abajo. Si imaginamos que la roca es una analogía para un punto de equilibrio de un sistema, entonces este equilibrio sería de tipo silla y aquellas *órbitas especiales* que convergen a este equilibrio forman un conjunto de órbitas llamado la *variedad estable*¹.

Definición 13 Sea x^* un punto de equilibrio hiperbólico del campo de vectores

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos las **variedades estable e inestable locales** de x^* como:

$$W_{\text{loc}}^s(x^*) = \{x \in U : \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \text{ y } \Phi^t(x) \in U, \forall t \geq 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x^*) = \{x \in U : \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty, \text{ y } \Phi^t(x) \in U, \forall t \leq 0\},$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad de x^* .

OBSERVACIÓN. Las variedades invariantes $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ y $W_{\text{loc}}^u(x^*)$ son análogos no-lineales de los subespacios E^u y E^s de un sistema lineal.

¹Esta analogía es crédito del Prof Bernd Krauskopf – <https://www.math.auckland.ac.nz/~berndk/>.

Teorema 5 (*Variedad estable*) Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r, r \geq 1, \quad (2.26)$$

posee un punto de equilibrio hiperbólico x^* . Entonces existen los conjuntos $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ y $W_{\text{loc}}^u(x^*)$. Estos conjuntos son variedades diferenciables de dimensiones $n_s = \dim E^s(x^*)$ y $n_u = \dim E^u(x^*)$, y con el mismo grado de diferenciabilidad r que f . Además $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ es invariante bajo el flujo Φ^t de (2.26) para $t > 0$ y tangente a $E^s(x^*)$ en x^* ; análogamente, $W_{\text{loc}}^u(x^*)$ es invariante bajo el flujo Φ^t de (2.26) para $t < 0$ y es tangente a $E^u(x^*)$ en x^* .

La figura 2.6 muestra bosquejos de las variedades invariantes $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ y $W_{\text{loc}}^u(x^*)$ en un sistema bidimensional.

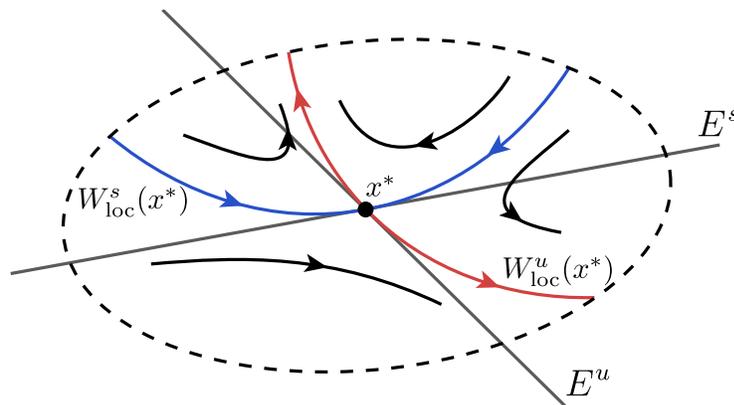


Figura 2.6: Bosquejo de las variedades estable e inestable locales $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ y $W_{\text{loc}}^u(x^*)$ de un punto silla en un sistema bidimensional continuo.

Las variedades invariantes locales poseen análogos *globales* obtenidos al permitir que los puntos en $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ fluyan hacia atrás en el tiempo y aquellos en $W_{\text{loc}}^u(x^*)$ fluyan hacia adelante:

$$\begin{aligned} W^s(x^*) &= \bigcup_{t \leq 0} \Phi^t(W_{\text{loc}}^s(x^*)) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}, \\ W^u(x^*) &= \bigcup_{t \geq 0} \Phi^t(W_{\text{loc}}^u(x^*)) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}. \end{aligned}$$

OBSERVACIONES.

1. La existencia y unicidad de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias implica que dos variedades estable (resp. inestable) de dos puntos de equilibrio distintos no se pueden intersectar. Por el mismo argumento, una variedad estable (resp. inestable) no se puede intersectar a sí misma.
2. La intersección de variedades estables con inestables sí puede ocurrir a lo largo de **órbitas homoclínicas** y **heteroclínicas**. En muchos casos, estas órbitas son la fuente de la mayoría de los comportamientos caóticos hallados en sistemas dinámicos.
3. En general, no es posible encontrar expresiones analíticas para variedades estable e inestable, y uno debe recurrir a herramientas numéricas y computacionales para encontrarlas.

Ejemplo 19 Este es un sistema lo suficientemente simple en el cual podemos hallar explícitamente las variedades invariantes globales (i.e., es un caso muy especial!). Consideremos el sistema planar

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= -y + x^2,\end{aligned}\tag{2.27}$$

el cual tiene un único equilibrio en el origen. Para el sistema linealizado tenemos los siguientes subespacios invariantes:

$$\begin{aligned}E^s &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}, \\E^u &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

En este caso podemos integrar el sistema no lineal (2.27) en forma exacta. En lugar de obtener una solución de la forma $(x(t), y(t))$, reescribimos (2.27) como una EDO lineal de primer orden al eliminar el tiempo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} + x.\tag{2.29}$$

Esta ecuación se puede integrar directamente y obtener la familia de curvas solución

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}, \quad (2.30)$$

donde c es una constante determinada por las condiciones iniciales. Ahora el teorema de la variedad estable junto con (2.28) implica que podemos representar $W^u(0, 0)$ como un gráfico $y = h(x)$ con $h(0) = h'(0) = 0$, pues W_{loc}^u es tangente a E^u en $(0, 0)$. Luego $c = 0$ en (2.30) y tenemos

$$W^u(0, 0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x^2}{3} \right\}. \quad (2.31)$$

Finalmente, notemos que si $x(0) = 0$, entonces $x' \equiv 0$ y luego $x(t) \equiv 0$; de aquí se concluye que $W^s(0, 0) = E^s$.

Ejemplo 20 Consideremos el oscilador de Duffing no-forzado y con amortiguación:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + x^3 - x = 0,$$

o como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y. \end{cases}$$

Esta ecuación modela las oscilaciones de una masa unida a un resorte con fuerza de restauración no-lineal dada por el término $x^3 - x$. La amortiguación viene dada por $0 \leq \delta$.

El sistema posee tres puntos de equilibrio en el plano de fase (x, y) : el origen $(0, 0)$ y los puntos $(\pm 1, 0)$. Cuando $\delta = 0$, el sistema es conservativo y la ecuación se puede multiplicar por \dot{x} e integrar con respecto al tiempo para llegar a

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right) = \text{cte.}$$

Luego, $\frac{dE}{dt} = 0$ y las soluciones de la ecuación de Duffing con $\delta = 0$ están contenidas en las curvas de nivel de E . De esta forma, podemos graficar inmediatamente el retrato de fase para $\delta = 0$ como en la figura 2.7(a). Por lo tanto, $(0, 0)$ es un

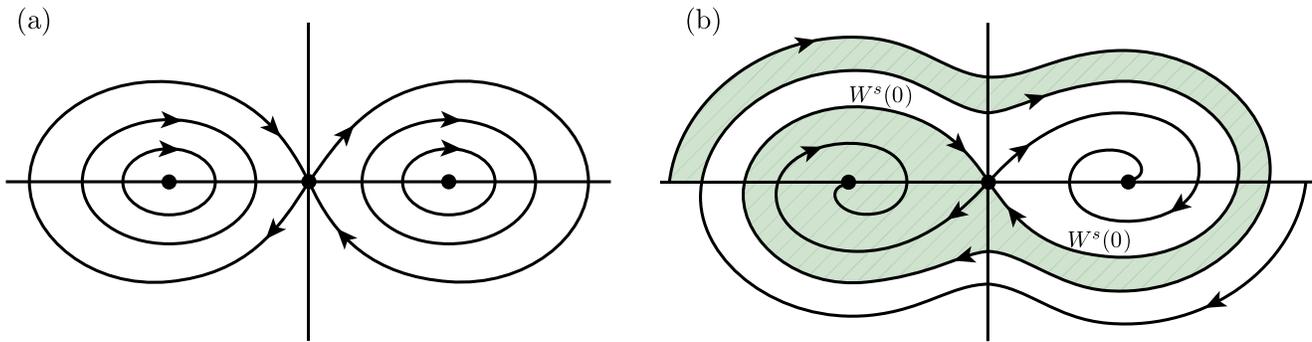


Figura 2.7: Retratos de fase de la ecuación de Duffing sin fuerza externa. Para $\delta = 0$ (panel (a)) se tienen dos centros rodeados por conexiones homoclínicas. Para $\delta > 0$ (panel (b)) la variedad estable $W^s(0, 0)$ forma la frontera entre los dominios de atracción de $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

punto silla, mientras que los puntos $(\pm 1, 0)$ son centros. Más aún, la variedades estable e inestable de $(0, 0)$ forman dos conexiones homoclínicas, cada una de las cuales encierra una familia de órbitas periódicas alrededor de los centros.

Al añadir el término $-\delta y$ a la segunda ecuación del sistema de ecuaciones se altera la dirección del campo de vectores en todas las curvas de nivel de E (excepto en $y = 0$). Esto provoca que las órbitas apunten “hacia adentro” de las curvas de nivel. Más aún, al aplicar el teorema de Hartman-Grobman, es fácil ver que $(0, 0)$ es un punto silla, mientras que los puntos $(\pm 1, 0)$ son ambos focos atractores. De esta forma obtenemos los comportamientos cualitativos de la figura 2.7(b). Notamos que las conexiones homoclínicas se han roto para $\delta > 0$. Cada rama de $W^u(0, 0)$ converge a uno de los focos atractores. En cambio, la variedad estable $W^s(0, 0)$ separa las cuencas de atracción (en verde y en blanco, respectivamente) de los dos atractores $(\pm 1, 0)$.

Tarea: Complete los detalles faltantes de este ejemplo.

2.5. Bifurcaciones

En la teoría de sistemas dinámicos, uno puede tomar en cuenta cualquier incerteza acerca del modelo mediante la variación de los parámetros del mismo. No sabemos exactamente el valor del coeficiente de fricción para el péndulo planar amortiguado, pero hay uno; no sabemos exactamente el efecto inhibitor de una

especie sobre otra, pero parece haber uno; etcetera. Por lo tanto, el modelo es típicamente de la forma general

$$\dot{x} = f(x; \lambda),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Puede que solo se sepa que el valor del parámetro λ se halla en un cierto intervalo o región. Sin conocer exactamente λ , ¿qué se puede decir sobre el sistema? Recordemos el ejemplo de las especies en competencia. La extinción de una especie depende en realidad de si α o β son menores que 1. Para cualquier valor de $\alpha, \beta < 1$ obtenemos un retrato de fase topológicamente equivalente, el cual *no es* topológicamente equivalente al retrato de fase para el caso $\beta < 1 < \alpha$.

Definición 14 *Considere el campo de vectores*

$$\dot{x} = f(x; \lambda),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que el retrato de fase del sistema para una elección particular de $\lambda = \lambda_1$ es topológicamente diferente al retrato de fase para otra elección $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1$. Si la diferencia entre λ_1 y λ_2 es suficientemente pequeña, entonces existe un único λ^* con $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$ tal que el retrato de fase para cualquier $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$ es topológicamente equivalente al de λ_1 , y el retrato de fase para cualquier $\lambda^* < \lambda < \lambda_2$ es topológicamente equivalente al de λ_2 . Decimos que λ^* es un **valor de bifurcación**; es el valor del parámetro en el cual el sistema sufre una bifurcación, es decir, un cambio cualitativo de la dinámica.

Existen distintos tipos de bifurcaciones. Comenzaremos con una clasificación de las diferentes bifurcaciones *locales*, esto es, aquellas que involucran puntos de equilibrio. Estas bifurcaciones se pueden clasificar en términos de los valores propios de la matriz Jacobiana asociada al equilibrio (parámetro-dependiente). Al momento de la bifurcación el número $n_0 \neq 0$ y el equilibrio es no-hiperbólico. Sin embargo, justo antes y justo después de la bifurcación los equilibrios son hiperbólicos (si es que existen).

Por lo tanto, podemos pensar en la bifurcación como un movimiento de valores propios a través del eje imaginario a medida que se mueve un parámetro. Para campos de vectores, hay dos casos genéricos: o bien un valor propio pasa por

el valor 0 (cambiando su signo de positivo a negativo o viceversa), o un par de valores propios complejos conjugados se mueve a través del eje imaginario.

A continuación expondremos las bifurcaciones más típicas de puntos de equilibrio de campos vectoriales en sistemas de la menor dimensión posible en la que estos eventos pueden ocurrir. Los detalles técnicos y demostraciones de estos resultados son el tema de la asignatura *Teoría de Bifurcaciones*. Algunos de estos detalles se pueden hallar en [7, 12, 13, 19].

2.5.1. Bifurcación Silla-Nodo

La bifurcación **silla-nodo** se caracteriza por el hecho de que a un lado de la bifurcación existen dos equilibrios, mientras que al otro lado estos dos equilibrios han desaparecido. Podemos pensar en el momento de la bifurcación como aquel momento donde los dos equilibrios colisionan. En sistemas bidimensionales justamente uno de los equilibrios que interviene es un nodo y el otro es una silla, lo cual le da el nombre a esta bifurcación (*silla-nodo*). La bifurcación silla-nodo puede aparecer en cualquier sistema y es, de hecho, una bifurcación muy típica que sucede al mover un parámetro. Quizás debido a que esta bifurcación es *tan* típica, posee muchos otros nombres. La bifurcación silla-nodo también se le conoce como bifurcación *fold*, bifurcación *tangente* o bifurcación *limit point*.

Ejemplo 21 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{x} = f(x, \lambda) = \lambda - x^2,$$

donde $x \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que pueden existir dos equilibrios $x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Estos equilibrios solo existen (en \mathbb{R}) si $\lambda > 0$. La matriz Jacobiana es $Df(x, \lambda) = -2x$. Luego, en $x_1 = \sqrt{\lambda}$ tenemos un valor propio $-2\sqrt{\lambda} < 0$, así x_1 es un atractor; y en $x_2 = -\sqrt{\lambda}$ tenemos un valor propio $2\sqrt{\lambda} > 0$, y x_2 es un repulsor.

Hay varias maneras de visualizar esta bifurcación. Por ejemplo, podemos dibujar todos los retratos de fase topológicamente diferentes como en la Figura 2.8:

1. Una línea de fase representativa para un valor $\lambda > 0$ arbitrario. La dinámica que se obtiene consiste lo siguiente: soluciones con $x_0 > x_1$ son decrecientes y

convergen al equilibrio estable x_1 para $t \rightarrow \infty$, órbitas con $x_2 < x_0 < x_1$ son crecientes y también convergen a x_1 , mientras que las soluciones con $x_0 < x_2$ son decrecientes y se alejan de x_2 .

2. Otra línea de fase para $\lambda = 0$ (un equilibrio semiestable en el origen, estable por la derecha e inestable por la izquierda);
3. Y finalmente una línea de fase representativa para un valor $\lambda < 0$ arbitrario (no hay equilibrios y flujo simplemente corre de derecha a izquierda).

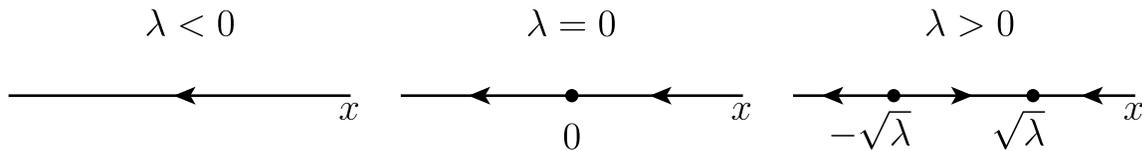


Figura 2.8: Retratos de fase no equivalentes del sistema $\dot{x} = \lambda - x^2$.

De hecho, muchas veces obviamos el caso $\lambda = 0$ pues es topológicamente diferente al retrato de fase de cualquier otro valor de λ y porque puede ser fácilmente deducido a partir del contexto, al menos por alguien familiarizado con la teoría de bifurcaciones. Las regiones donde los retratos de fase son topológicamente equivalentes son entonces indicadas en el espacio de parámetros. Toda la información queda contenida en la Figura 2.9 que consiste en lo siguiente:

- (a) El espacio de parámetros ($\lambda \in \mathbb{R}$) queda dividido en dos regiones (intervalos), llamémoslos 1 y 2, cuya frontera común es $\lambda = 0$.
- (b) Retratos de fase representativos para cada región del espacio de parámetros 1 y 2.

Esta colección presentada en la Figura 2.9 se llama **diagrama de bifurcación**, es decir, la división del espacio de parámetros en conjuntos de retratos de fase topológicamente diferentes, junto con representaciones de estos retratos de fase.

Para sistemas uno- o dos-dimensionales, como en este ejemplo, podemos combinar las imágenes del diagrama de bifurcación en una sola figura del espacio producto de parámetros \times espacio de fase. Aquí, uno grafica todos los retratos de fase, y no solo uno representativo. La Figura 2.10 posee toda la información relativa a este ejemplo en una sola imagen:

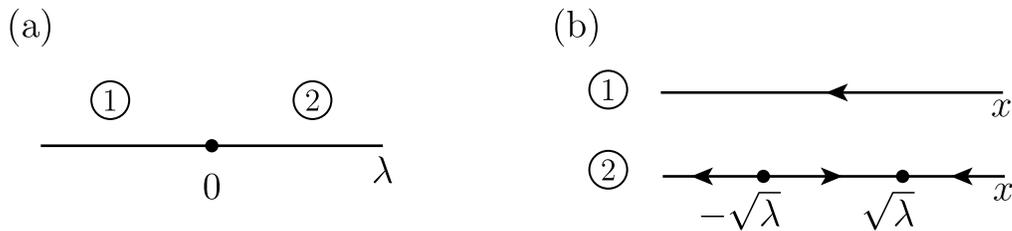


Figura 2.9: Espacio de parámetros (en panel (a)) y retratos de fase no equivalentes (en panel (b)) del sistema $\dot{x} = \lambda - x^2$.

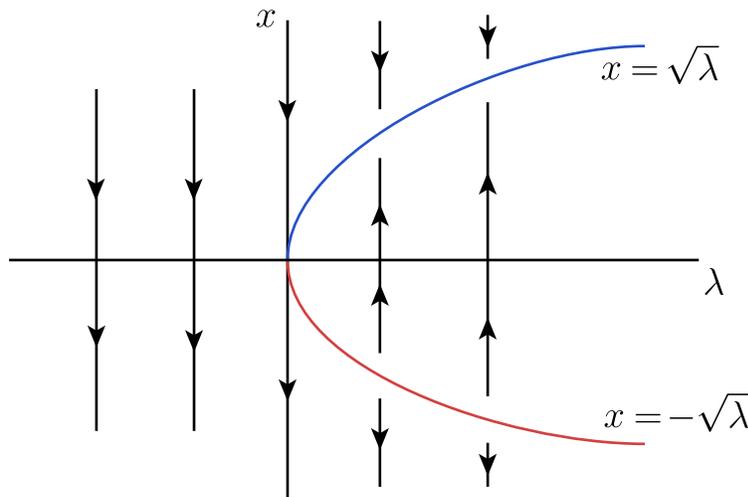


Figura 2.10: El diagrama de bifurcación en el espacio de parámetros \times espacio de fase para el sistema $\dot{x} = \lambda - x^2$ contiene toda la información relativa a posibles retratos de fase en una sola imagen.

1. En el eje horizontal corre el parámetro λ , mientras que el eje vertical corresponde a la variable de estado x .
2. Para cada $\lambda < 0$ arbitrario pero fijo, el gráfico se compone de una órbita vertical descendente (pues la variable $x(t)$ es decreciente).
3. Para $\lambda \geq 0$, los puntos de equilibrio se ubican sobre la parábola $\lambda - x^2 = 0$, la cual se abre hacia la derecha. La rama superior de la parábola corresponde a $x_1 = \sqrt{\lambda}$ y la rama inferior a $x_2 = -\sqrt{\lambda}$.
4. Para cada $\lambda > 0$ arbitrario pero fijo, el gráfico es cualitativamente como lo descrito más arriba: soluciones con $x_0 > x_1$ son órbitas verticales decrecientes

y convergen al equilibrio estable x_1 para $t \rightarrow \infty$; órbitas con $x_2 < x_0 < x_1$ son crecientes y también convergen a x_1 ; mientras que las soluciones con $x_0 < x_2$ son líneas decrecientes y se alejan de x_2 .

5. Por último, notemos que ambas ramas de la parábola de equilibrios $\lambda - x^2 = 0$ coinciden cuando $\lambda = 0$ marcando la colisión de x_1 y x_2 en un solo equilibrio en $x = 0$ al momento de la bifurcación.

Similarmente a los retratos de fase topológicamente equivalentes, nos gustaría identificar bifurcaciones similares.

Definición 15 *Decimos que un campo de vectores particular $y' = g(y, \mu)$ es una forma normal (topológica) del campo vectorial $x' = f(x, \lambda)$ si existe un punto (y_0, μ^*) tal que en la vecindad de algún punto (x_0, λ^*) y de (y_0, μ^*) , los diagramas de bifurcación son topológicamente los mismos. Esto significa que las regiones en el espacio de parámetros donde los respectivos retratos de fase son topológicamente equivalentes son las mismas, y que en cada región ambos campos vectoriales poseen retratos de fase topológicamente equivalentes.*

Esta definición nos permite identificar condiciones suficientes para decidir si un sistema dado exhibe o no una cierta bifurcación. El objetivo es encontrar una forma normal que venga dada de la manera más simple posible. En el caso de la bifurcación silla-nodo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6 *(Bifurcación Silla-nodo) Sea*

$$\dot{x} = f(x; \mu), \tag{2.32}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, y $\mu \in \mathbb{R}$. Si las siguientes condiciones se satisfacen

(B1) $f(x_0, \mu^*) = 0$, “Existe un equilibrio x_0 para $\mu = \mu^*$ ”;

(B2) $Df(x_0, \mu^*) = 0$, “Valor propio cero en x_0 para $\mu = \mu^*$ ”;

(G1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, “Término de 2do orden de f no se anula en (x_0, μ^*) ”;

(G2) $\frac{\partial}{\partial \mu} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, “Velocidad no-nula en μ ”,

entonces (2.32) posee la forma normal topológica

$$\dot{y} = \lambda \pm y^2$$

en una vecindad de (x_0, μ^*) .

Por conveniencia, uno suele trasladar el equilibrio (x_0, μ^*) al origen, esto es, a $(0, 0)$. (B1) y (B2) son llamadas *condiciones de bifurcación*; se deben satisfacer para encontrar la bifurcación. (G1) y (G2) son llamadas *condiciones de genericidad*; son propiedades que se satisfacen en forma “típica” (Por el contrario, si no se satisficieran, uno estaría frente a un caso “atípico”, poco usual o no-genérico).

Ejemplo 22 Considere el campo de vectores unidimensional

$$\dot{x} = \alpha - x - e^{-x},$$

con parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$. Al comparar las gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ hallamos las gráficas de la Figura 2.11.

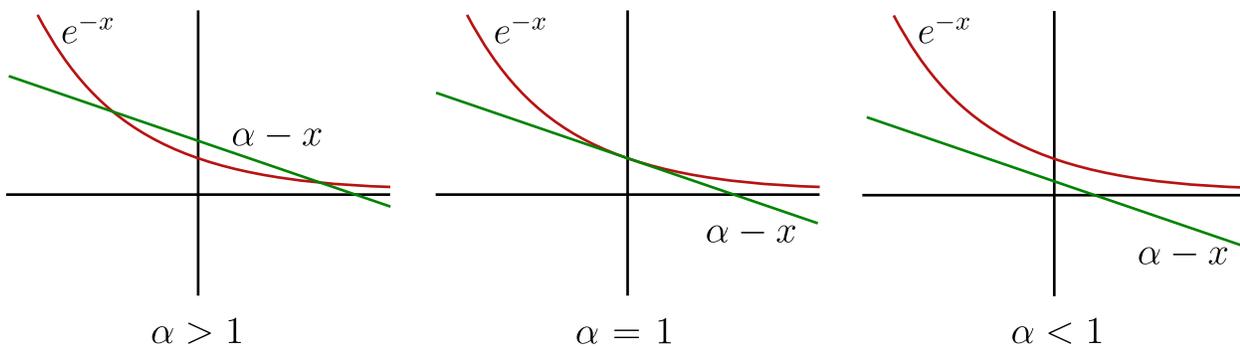


Figura 2.11: Posibles gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ para distintos valores del parámetro α .

Para hallar el punto de bifurcación α^* , necesitamos que las gráficas de e^{-x} y de $\alpha - x$ se intersecten *tangencialmente*. Luego, tanto las funciones como sus derivadas con respecto a x deben coincidir:

$$\begin{cases} e^{-x} = \alpha - x \\ \frac{d}{dx} e^{-x} = \frac{d}{dx} (\alpha - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x} = \alpha - x \\ -e^{-x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Luego, el punto de bifurcación es $\alpha^* = 1$, y la bifurcación ocurre en $x_0 = 0$. A continuación movemos el punto $(\alpha^*, x_0) = (1, 0)$ al origen por medio del cambio de coordenadas $\alpha = \lambda + 1$, $y = x$. El nuevo campo de vectores en términos de y y λ es

$$\dot{y} = \dot{x} = \alpha - x - e^{-x} = 1 + \lambda - y - e^{-y} =: f(y, \lambda).$$

Se verifica que (B1) $f(0, 0) = 0$, (B2) $f_y(0, 0) = -1 + e^{-y}|_{y=0} = 0$, (G1) $f_{yy}(0, 0) = -e^{-y}|_{y=0} = -1 \neq 0$, and (G2) $f_\lambda(0, 0) = 1 \neq 0$. Luego, efectivamente, se trata de una bifurcación silla-nodo.

Alternativamente, usando la expansión de Taylor para e^{-x} alrededor de $x = 0$ encontramos

$$\dot{x} = \alpha - x - e^{-x} = \alpha - x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = (\alpha - 1) - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Éste tiene la misma forma algebraica que $\dot{y} = \lambda - y^2$, y coincide exactamente mediante apropiados rescalamientos de x y α . En general, la teoría de bifurcaciones nos dice dónde podemos cortar la expansión en serie de Taylor sin alterar topológicamente *ningún* retrato de fase en una vecindad de (x_0, λ^*) .

La bifurcación silla-nodo está asociada con un valor propio “pasando por” cero. Hay otras dos bifurcaciones que tienen esta misma característica. Son la bifurcación transcítica y la pitchfork. Estas bifurcaciones solo pueden ocurrir bajo circunstancias especiales.

2.5.2. Bifurcación Transcítica

La bifurcación transcítica solo sucede cuando el sistema posee un equilibrio que existe para todos los valores del parámetro y nunca puede ser destruido. Cuando este equilibrio colisiona con otro, los dos equilibrios intercambian su estabilidad, pero siguen existiendo tanto antes como después de la bifurcación. Entonces, es como si los dos equilibrios “pasaran uno sobre otro”.

Ejemplo 23 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{y} = f(y, \lambda) = \lambda y - y^2 = y(\lambda - y),$$

donde $y \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que siempre existen dos equilibrios $y_1 = 0$ y $y_2 = \lambda$. Estos equilibrios existen para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. La matriz Jacobiana es $Df(y, \lambda) = \lambda - 2y$. Luego, en $y_1 = 0$ tenemos un valor propio λ ; así y_1 es un atractor si $\lambda < 0$ y es repulsor si $\lambda > 0$. Por otro lado, en $y_2 = \lambda$ tenemos el valor propio $-\lambda$; luego, y_2 es un repulsor si $\lambda < 0$ y es atractor si $\lambda > 0$.

La bifurcación transcítica es típica de sistemas donde un equilibrio está presente independiente de los valores del parámetro. La figura 2.12 muestra el diagrama de bifurcación del sistema $\dot{y} = \lambda y - y^2$. Notemos que, en el plano (λ, y) , los equilibrios se ubican sobre el conjunto de nivel cero de $f(y, \lambda) = \lambda y - y^2 = y(\lambda - y) = 0$.

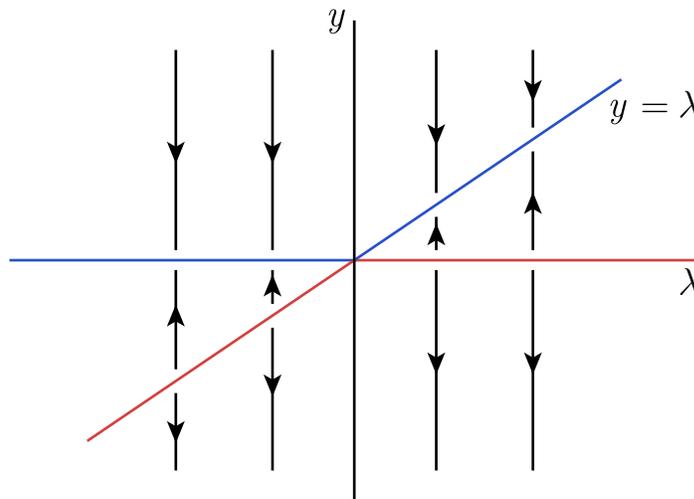


Figura 2.12: El diagrama de bifurcación para el sistema $\dot{y} = \lambda y - y^2$.

Teorema 7 (*Bifurcación Transcítica*) Sea

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \quad (2.33)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y f es de clase C^2 . Si las siguientes condiciones se satisfacen

1. $f(0, 0) = 0$;
2. $Df(0, 0) = f_x(0, 0) = 0$;

$$3. \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 0;$$

$$4. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0;$$

$$5. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0;$$

entonces (2.33) posee la forma normal topológica

$$\dot{y} = \lambda y \pm y^2$$

en una vecindad de $(x_0, \mu^*) = (0, 0)$.

Recordemos que en el sistema (2.2) de especies en competencia, los equilibrios $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ siempre están presentes sin importar los valores de α y β . De hecho, si α o β pasan por el valor 1, el equilibrio $(0, 1)$ o $(1, 0)$, respectivamente, pasa por una bifurcación transcítica. Este sistema posee dos rectas invariantes, a saber, tanto el eje x como el eje y son invariantes.

2.5.3. Bifurcación Pitchfork

La bifurcación pitchfork solo existe cuando hay una simetría de reflexión presente en el sistema. De hecho, en el mismo sentido que la bifurcación silla-nodo es típica para sistemas dinámicos arbitrarios, la bifurcación pitchfork es típica en sistemas dinámicos con simetría de reflexión. La forma normal es

$$\dot{y} = \lambda y \pm y^3.$$

Este sistema posee simetría de reflexión en $\{y = 0\}$. Es decir, si se define $\tilde{y} = -y$, obtenemos la misma ecuación para $\dot{\tilde{y}}$ que para \dot{y} .

Ejemplo 24 Consideremos el campo de vectores

$$\dot{y} = f(y, \lambda) = \lambda y - y^3 = y(\lambda - y^2),$$

donde $y \in \mathbb{R}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Este sistema posee simetría de reflexión en $\{y = 0\}$. Es decir, si se define $u = -y$, obtenemos la misma ecuación para \dot{u} que para

\dot{y} . Al igualar el lado derecho a cero, hallamos que siempre existe un equilibrio $y_1 = 0$ en el origen. Además, si $\lambda > 0$ tenemos otros dos equilibrios simétricos en $y_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}$. La matriz Jacobiana es $Df(y, \lambda) = \lambda - 3y^2$. Luego, en $y_1 = 0$ tenemos un valor propio λ ; así y_1 es un atractor si $\lambda < 0$ y es repulsor si $\lambda > 0$. Por otro lado, en $y_{2,3}$ tenemos el valor propio -2λ ; luego, $y_{2,3}$ son ambos atractores.

La figura 2.13 muestra el diagrama de bifurcación del sistema $\dot{y} = \lambda y - y^3$. Notemos que, en el plano (λ, y) , los equilibrios se ubican sobre el conjunto de nivel cero de $f(y, \lambda) = y(\lambda - y^2) = 0$. El cuadro que emerge en la figura 2.13 es como la de un tenedor o tridente (*pitchfork*, en inglés), lo cual le da el nombre a esta bifurcación.

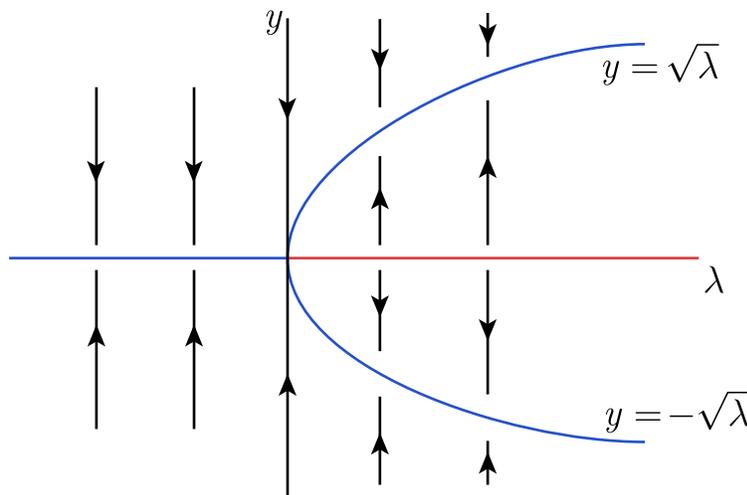


Figura 2.13: El diagrama de bifurcación para el sistema $\dot{y} = \lambda y - y^3$ (caso supercrítico).

Teorema 8 (*Bifurcación Pitchfork*) Sea

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \quad (2.34)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y f es de clase C^3 . Si las siguientes condiciones se satisfacen

1. $f(0, 0) = 0$;
2. $Df(0, 0) = f_x(0, 0) = 0$;
3. $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0$;

$$4. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0;$$

$$5. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0;$$

$$6. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0;$$

entonces (2.34) posee la forma normal topológica

$$\dot{y} = \lambda y \pm y^3$$

en una vecindad de $(x_0, \lambda^*) = (0, 0)$.

En el teorema anterior, el signo \pm del término cúbico queda determinado por el signo de $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \lambda^*)$. Cuando el término cúbico es $-y^3$, decimos que la bifurcación pitchfork es *supercrítica*; cuando el término cúbico es $+y^3$, decimos que la bifurcación pitchfork es *subcrítica*. Discutiremos esto en más detalle para la bifurcación de Hopf en la sección siguiente.

2.5.4. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

Cuando un par de valores propios complejos conjugados se mueve atravesando el eje imaginario, típicamente ocurre una bifurcación de Hopf. (Esta bifurcación está relacionada con la bifurcación pitchfork, como veremos más adelante.) Luego, para que esta bifurcación ocurra necesitamos que la dimensión del sistema sea al menos $n = 2$.

Consideremos el sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - \omega y + l_1 x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = \omega x + \lambda y + l_1 y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2.35)$$

o en su forma matricial equivalente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + l_1(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Consideremos el punto de equilibrio en $(0, 0)$. La matriz jacobiana asociada es:

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix},$$

con valores propios $\lambda \pm i\omega \in \mathbb{C}$. Claramente, si $\lambda < 0$ el origen es un foco estable hiperbólico, mientras que si $\lambda > 0$ el origen es un foco inestable hiperbólico. Sin embargo, para $\lambda = 0$, tenemos un equilibrio no-hiperbólico: a pesar que en la linealización, el origen sea un centro (con valores propios $\pm i\omega$), no podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman y concluir que también sea un centro en el sistema no lineal (2.35) o (2.36).

Por otro lado, sea $E(x, y) = x^2 + y^2$ y consideremos $\lambda > 0$. Notemos que

$$\langle X, \nabla E \rangle|_{\{x^2+y^2=\lambda\}} = 2x(\lambda x - \omega y + l_1 \lambda x) + 2y(\omega x + \lambda y + l_1 \lambda y) = 0.$$

Por lo tanto, el campo X es ortogonal al vector ∇E en cada punto de la circunferencia $\gamma = \{x^2 + y^2 = \lambda\}$. Es decir, el campo X es tangente al círculo γ , y luego, γ es un ciclo límite.

Además, reescribiendo (2.35) o (2.36) en coordenadas polares obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda + l_1 r^2), \\ \dot{\phi} = \omega. \end{cases} \quad (2.37)$$

Es más fácil analizar este sistema en la forma (2.37), pues las dos ecuaciones son desacopladas. Notemos que $r \geq 0$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$; al identificar $\phi = -\pi$ con $\phi = \pi$, obtenemos que las variables (r, ϕ) viven en un semicilindro. También, este sistema no posee equilibrios pues la variable ϕ varía continuamente con velocidad constante ω . Luego, todas las órbitas en el semicilindro fluyen monótonamente en la dirección de ϕ sin “detenerse”. En particular, para $\lambda > 0$, el ciclo límite γ corresponde a $r = \sqrt{\lambda}$.

Consideremos el caso $l_1 = -1$, $\omega > 0$ constante, y variemos λ . Podemos analizar la ecuación para r separadamente y luego combinar las dos. Esto lleva al diagrama de bifurcación de la figura 2.14. Si consideramos el sistema (2.37) en la forma (2.35) o (2.36), entonces el diagrama de bifurcación con retratos de fase en \mathbb{R}^2 es como en la figura 2.15.

Por lo tanto, la bifurcación de Hopf se caracteriza por la aparición de una órbita periódica. La amplitud de la órbita periódica es 0 al momento de la bifurcación

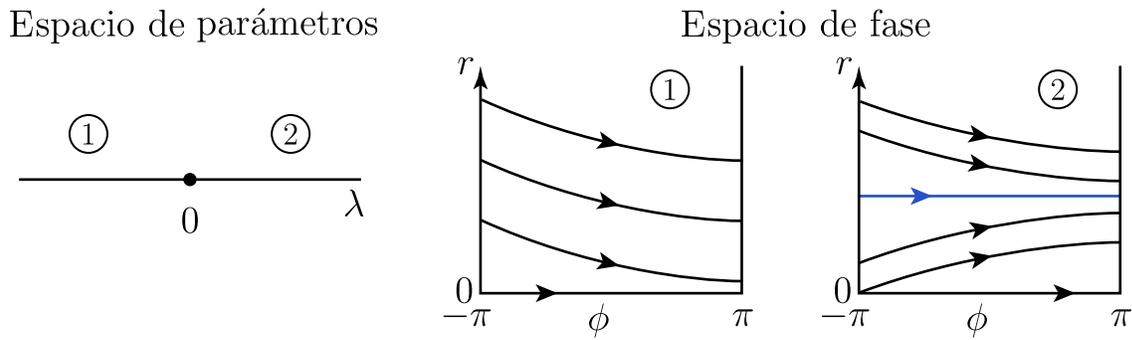


Figura 2.14: Diagrama de bifurcación de la ecuación (2.37) en el caso $l_1 = -1$, $\omega < 0$ constante.

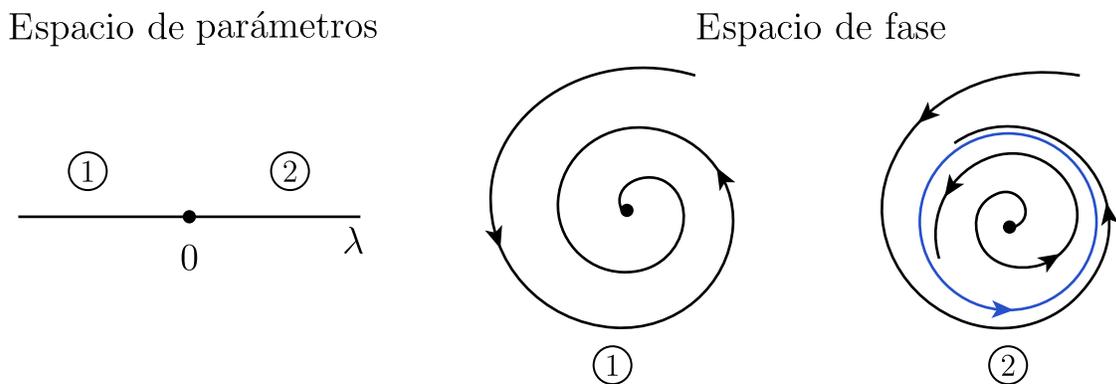


Figura 2.15: Diagrama de bifurcación de (2.36) en el caso $l_1 = -1$, $\omega < 0$ constante.

($\lambda = 0$) y crece como $\sqrt{\lambda}$ cuando $\lambda > 0$. La frecuencia de la órbita periódica, al comienzo de la bifurcación, es igual a ω , el valor absoluto de la parte imaginaria de los valores propios del punto de equilibrio. El equilibrio existe a ambos lados de la bifurcación, pero cambia de estabilidad cuando $\lambda = 0$. Para el sistema en la forma (2.37) podemos dibujar el diagrama de fase/parámetro en el plano (λ, r) e ignorar ϕ obteniendo la figura 2.16. Si el espacio de fase fuera $r \in \mathbb{R}$, en vez de $(r, \phi) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi)$, entonces tendría lugar una bifurcación pitchfork! (compare (2.37) con la forma normal de la bifurcación pitchfork).

El diagrama de bifurcación en el espacio de parámetros vs espacio de fase completo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ para el sistema en la forma (2.35) o (2.36) es un cuadro tridimensional como en la figura 2.17. De hecho, podemos ver la figura 2.16 en el plano (λ, r) como una sección transversal del cuadro tridimensional de la figu-

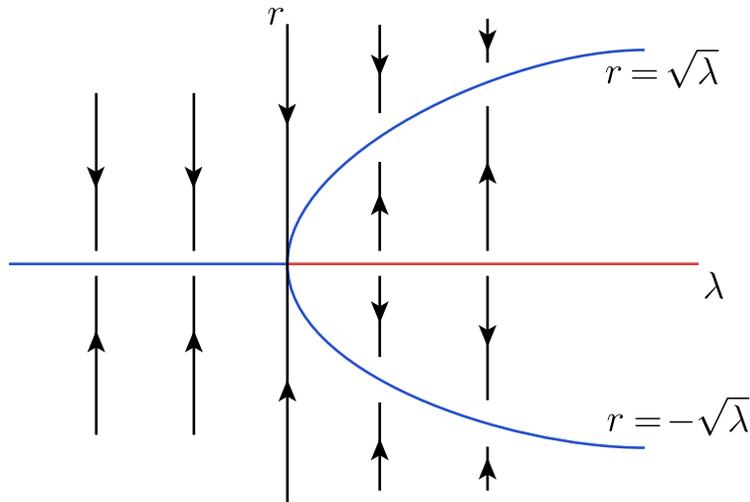


Figura 2.16: Diagrama de bifurcación de (2.37) en el espacio (λ, r) .

ra 2.17 en el espacio (λ, x, y) cortando el plano (λ, x) o bien el plano (λ, y) . Los retratos de fase **1** y **2** en la figura 2.15 son secciones transversales cortando a través de planos $\lambda = \text{constante}$ en la figura 2.17, dependiendo del signo de λ . La órbita periódica que aparece en la bifurcación de Hopf se ubica en el paraboloides $x^2 + y^2 = \lambda$.

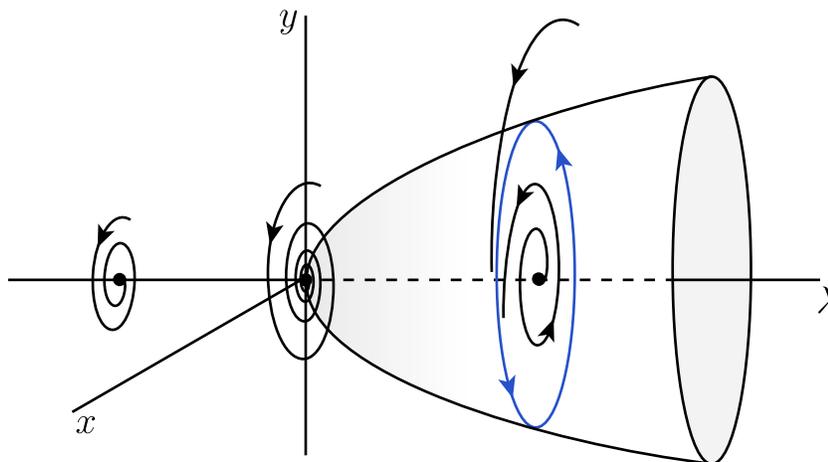


Figura 2.17: Retratos de fase de la forma normal de la bifurcación de Hopf si $l_1 < 0$.

Teorema 9 (*Bifurcación de Hopf*) *Considere el sistema bidimensional*

$$\dot{x} = f(x; \mu), \quad (2.38)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $y \mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que para valores de μ cerca de μ^* el sistema (2.38) posee un punto de equilibrio $x(\mu)$ cuya coordenada depende de μ ; en particular, sea $x_0 = x(\mu^*)$ y expresemos los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x(\mu), \mu)$ en la forma

$$\xi_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu).$$

Entonces (2.38) es topológicamente equivalente a la forma normal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + l_1(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

en una vecindad de (x_0, μ^*) , si las siguientes condiciones se satisfacen:

(B1) $f(x_0, \mu^*) = 0$;

(B2) $Df(x_0, \mu^*)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros $\pm i\omega$, $(\alpha(\mu^*) = 0, \beta(\mu^*) = \omega)$;

(G1) $l_1(x_0, \mu^*) \neq 0$ donde l_1 es especificado más abajo;

(G2) $\frac{\partial}{\partial \mu} \alpha(\mu^*) \neq 0$.

El coeficiente l_1 en el teorema anterior se conoce como **primera cantidad de Lyapunov**. Se puede computar explícitamente a partir de f en (2.38). Si para $\mu = \mu^*$ el sistema 2-dimensional toma la forma

$$\begin{cases} x' &= -\omega y + P(x, y), \\ y' &= \omega x + Q(x, y), \end{cases}$$

entonces la primera cantidad de Lyapunov $l_1(\mu^*)$ se puede calcular como:

$$16l_1(\mu^*) = P_{xxx} + P_{xyy} + Q_{xxy} + Q_{yyy} + \frac{1}{\omega} \left(P_{xy}(P_{xx} + P_{yy}) - Q_{xy}(Q_{xx} + Q_{yy}) - P_{xx}Q_{xx} + P_{yy}Q_{yy} \right), \quad (2.39)$$

donde todas las derivadas están evaluadas en $(0, 0)$.

El signo de la primera cantidad de Lyapunov determina las propiedades de estabilidad de la órbita periódica que aparece en la bifurcación obteniendo la visión general de la figura 2.18. En el caso de una bifurcación de Hopf supercrítica ($l_1 < 0$) siempre tenemos un atractor: a medida que el punto de equilibrio pierde su estabilidad en $\lambda = 0$, aparecen pequeñas oscilaciones estables. Sin embargo, para una bifurcación de Hopf subcrítica ($l_1 > 0$) no tenemos un atractor para $\lambda > 0$, mientras que el equilibrio solo atrae puntos localmente en una vecindad cuando $\lambda < 0$. Por lo tanto, en la práctica, es importante calcular el signo de $l_1(x_0, \mu^*)$!

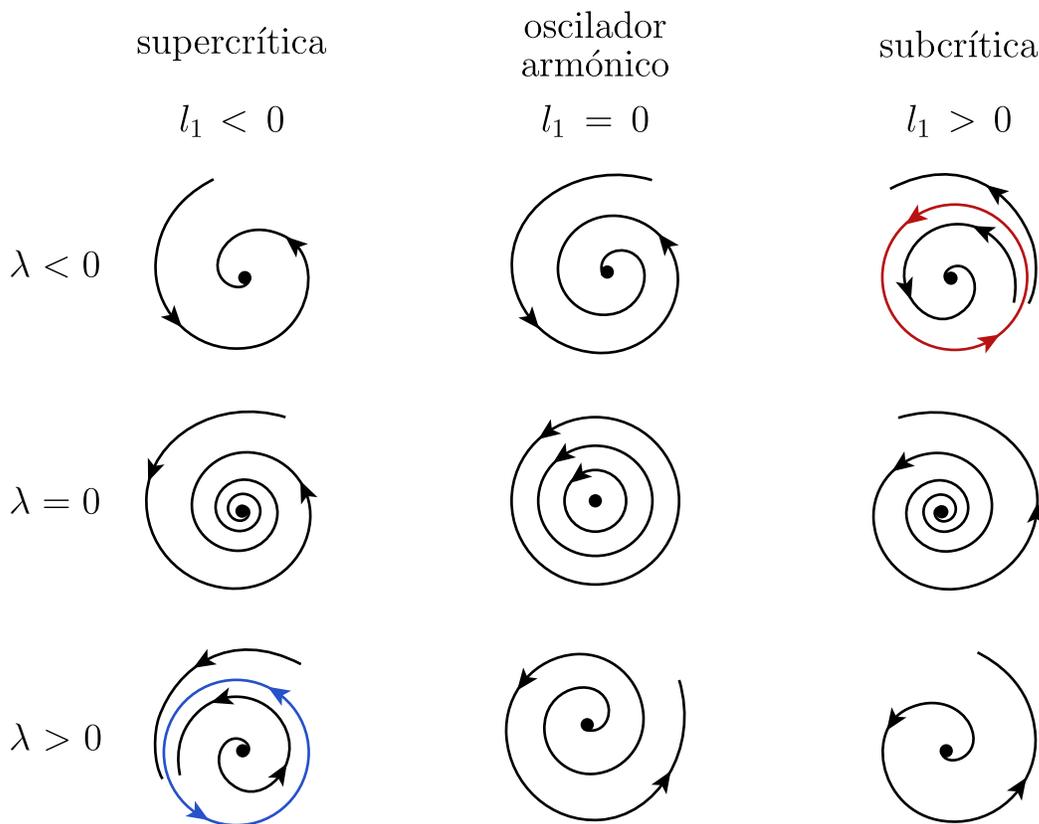


Figura 2.18: El signo de l_1 determina las propiedades de estabilidad del ciclo que aparece en la bifurcación de Hopf.

Notemos que para $l_1 = 0$ el sistema (2.35) o (2.36) (i.e., la forma normal de la bifurcación de Hopf) se vuelve la ecuación lineal del oscilador armónico, en

donde el origen es un centro rodeado de una cantidad infinita (no-numerable) de órbitas periódicas si $\lambda = 0$; mientras que el origen es un foco atractor si $\lambda < 0$ y un repulsor si $\lambda > 0$. Sin embargo, no existen órbitas periódicas para $\lambda \neq 0$. No obstante, a partir del teorema anterior, ¡No es posible decir que el sistema genérico (2.38) es equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf si $l_1 = 0$!

2.5.5. Bifurcaciones en sistemas n -dimensionales

A medida que nos movemos desde sistemas uno-dimensionales a dos-dimensionales, todavía podemos hallar puntos de equilibrio creándose o destruyéndose o cambiando su estabilidad a medida que variamos un parámetro. Las bifurcaciones discutidas en este capítulo tienen análogos bidimensionales (de hecho, en todas las dimensiones!). Sin embargo, genéricamente, nada nuevo sucede al añadir más dimensiones: todos los “eventos” asociados a la bifurcación están confinados a un subespacio de baja dimensión, mientras que en las dimensiones extra el flujo es, o bien, una simple atracción o repulsión hacia/desde ese subespacio.

El ejemplo prototípico de bifurcación silla-nodo en dos dimensiones es el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (2.40)$$

En la dirección de x tenemos la forma normal topológica de la bifurcación silla-nodo discutida en la sección 2.5.1, mientras que en la dirección de y el movimiento es amortiguado exponencialmente.

Consideremos el retrato de fase a medida que μ varía. Para $\mu > 0$, la figura 2.19 muestra que hay dos equilibrios, un nodo estable en $(\sqrt{\mu}, 0)$ y un punto silla en $(-\sqrt{\mu}, 0)$. A medida que μ decrece, la silla y el nodo se acercan entre sí, luego colisionan cuando $\mu = 0$, y finalmente desaparecen cuando $\mu < 0$. Esto explica también el nombre más común dado a esta bifurcación: silla-nodo!. Incluso cuando los equilibrios se han aniquilado, siguen influenciando el flujo pues dejan un *fantasma*, un “cuello de botella” en donde las órbitas se demoran un tiempo muy grande en pasar hacia el otro lado.

La figura 2.19 es representativa de una situación más general. Consideremos

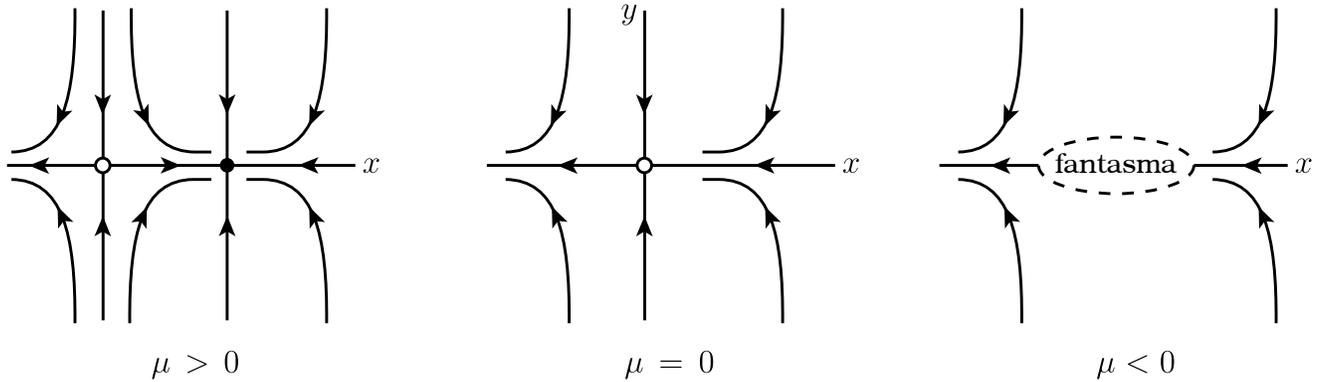


Figura 2.19: Retratos de fase de (2.40) para los distintos valores de μ .

un sistema bidimensional de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y; \mu), \\ \dot{y} = g(x, y; \mu), \end{cases} \quad (2.41)$$

que depende del parámetro μ . Suponga que para algún valor de μ las nulclinas se intersectan transversalmente en dos puntos como en la figura 2.20. Cada punto de intersección corresponde a un equilibrio pues $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ simultáneamente. Luego, para ver cómo los equilibrios se mueven a medida que μ cambia, solo tenemos que examinar las intersecciones. Ahora, suponga que las nulclinas se alejan la una de la otra a medida que μ varía, volviéndose *tangentes* en $\mu = \mu^*$. En tal caso, los equilibrios se acercan entre sí y colisionan cuando $\mu = \mu^*$; después que las nulclinas se separan, no hay intersecciones y los equilibrios desaparecen. El punto es que todas las bifurcaciones silla-nodo poseen esta propiedad localmente.

Ejemplo 25 Considere el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y, \\ \dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - by, \end{cases}$$

donde $a, b > 0$ son parámetros. Las nulclinas vienen dadas por la recta $y = ax$ y la curva sigmoideal

$$y = \frac{x^2}{b(1+x^2)},$$

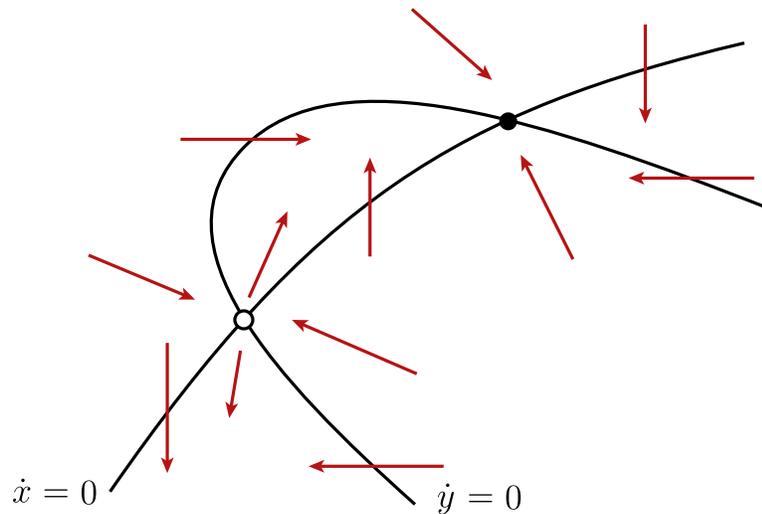


Figura 2.20: Nulclinas de (2.41).

como se muestra en la figura 2.21. Supongamos que variamos a y dejamos fijo el valor de b . Para a pequeño existen tres intersecciones como en la figura 2.21. A medida que a crece, las dos intersecciones superiores se acercan entre sí y colisionan cuando la recta intersecta la curva tangencialmente. Para valores más grandes de a , esos equilibrios desaparecen, dejando al origen como el único punto de equilibrio.

Las nulclinas se intersectan cuando

$$ax = \frac{x^2}{b(1+x^2)}.$$

Una solución es $x^* = 0$, en cuyo caso $y^* = 0$. Las otras intersecciones satisfacen la ecuación cuadrática

$$ab(1+x^2) = x,$$

la cual tiene dos soluciones

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2b^2}}{2ab}$$

si $1 - 4a^2b^2 > 0$, i.e., $2ab < 1$. Estas soluciones colapsan cuando $2ab = 1$. Luego, el valor de bifurcación es

$$a^* = \frac{1}{2b}.$$

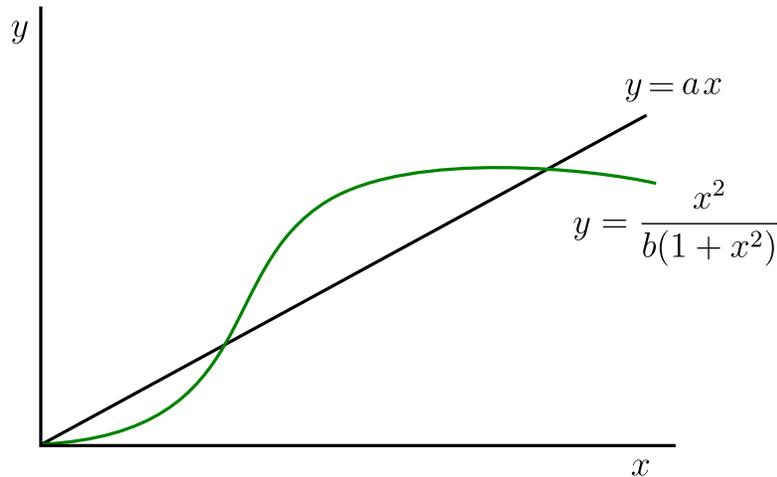


Figura 2.21: Nulclinas del sistema.

Además $x^* = 1$ en la bifurcación.

La matriz jacobiana en (x, y) es

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene traza $\tau = -(a + b) < 0$, así que todos los equilibrios son atractores o sillas, dependiendo del valor del determinante Δ . En $(0, 0)$, $\Delta = ab > 0$, luego el origen es siempre un equilibrio asintóticamente estable. De hecho, es un nodo estable, pues $\tau^2 - 4\Delta = (a - b)^2 > 0$ (excepto en el caso degenerado $a = b$ el cual dejamos de lado). En los otros dos puntos de equilibrio, Δ toma la forma (después de un poco de álgebra):

$$\Delta = ab - \frac{2x^*}{(1+(x^*)^2)^2} = ab \left(1 - \frac{2}{1+(x^*)^2} \right) = ab \left(\frac{(x^*)^2 - 1}{1+(x^*)^2} \right).$$

Luego, $\Delta < 0$ para el equilibrio del medio, el cual tiene $0 < x^* < 1$; este es un punto silla. El equilibrio con $x^* > 1$ es siempre un nodo estable, pues $\Delta < ab$ y por tanto $\tau^2 - 4\Delta > (a - b)^2 > 0$.

El retrato de fase aparece graficado en la figura 2.22. Aquí vemos que la variedad estable del punto silla separa el plano en dos regiones, cada una de las cuales

es la cuenca de un atractor. Notemos que el flujo es cualitativamente similar a la figura idealizada 2.19. Todas las órbitas se acercan rápidamente a la variedad inestable del punto silla, la cual juega un rol completamente análogo al eje x en la figura 2.19. Luego, en muchos sentidos, la bifurcación es fundamentalmente un evento unidimensional, con los dos equilibrios acercándose entre sí a lo largo de la variedad inestable como las cuentas de un collar. Por eso es que es relevante estudiar primero bifurcaciones en la menor dimensión posible—son el esqueleto de bifurcaciones análogas en mayores dimensiones. El rol fundamental de sistemas unidimensionales (para las bifurcaciones silla-nodo, transcítica, pitchfork) y bidimensionales (para la bifurcación de Hopf) se puede justificar rigurosamente mediante la “teoría de la variedad central”, la cual se estudia en el curso *Teoría de Bifurcaciones*.

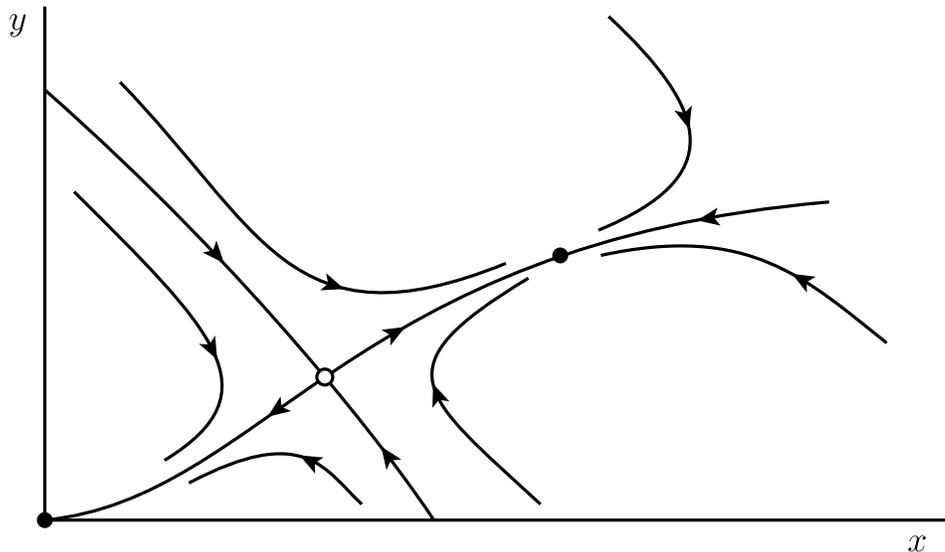


Figura 2.22: Retrato de fase.

2.6. Ejercicios

1. Encuentre y clasifique los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas linealizando alrededor de estos puntos. Comience reescribiendo las ecuaciones de segundo orden como sistemas de primer orden:

- a) $\ddot{x} + \epsilon \dot{x} - x + x^3 = 0$;
 b) $\ddot{x} + \sin x = 0$;
 c) $\ddot{x} + \epsilon \dot{x}^2 + \sin x = 0$;
 d) $\dot{x} = -x + x^2$, $\dot{y} = x + y$;
 e) $\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$;

Donde aparezca ϵ considere los casos $\epsilon < 0$, $\epsilon = 0$, $\epsilon > 0$.

2. Si v^j es un vector propio asociado a un valor propio real λ_j de la matriz A , demuestre que v^j es también un vector propio asociado al valor propio e^{λ_j} de e^A .
3. Considere el subespacio generado por $\text{Re}(v^j)$ y $\text{Im}(v^j)$ asociados al par de valores propios complejos conjugados $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$. Demuestre que este subespacio también es un espacio propio asociado a los valores propios e^{λ_j} y $e^{\bar{\lambda}_j}$ de e^A .
4. Sea la transformación continua $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $h(\mathbf{x}) = h(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + \frac{x_1^2}{3}\right)$.
- a) Demuestre que h es una conjugación entre el sistema $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$ y el sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, donde

$$X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix},$$

y $A = DX(\mathbf{0})$ es la matriz jacobiana del campo X en el origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.
Sugerencia: Considere el teorema de la función inversa, o equivalentemente, el teorema de cambio de coordenadas en \mathbb{R}^n . Con esto pruebe la existencia y diferenciabilidad de h^{-1} . Luego, si $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$, pruebe que $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.

- b) Determine la estabilidad local de los puntos de equilibrio de $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$.

5. Considere dos sistemas no-lineales de clase C^k , $k \geq 1$,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.42)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.43)$$

con equilibrios hiperbólicos x_0 de (2.42) e y_0 de (2.43). Demuestre que los retratos de fase de (2.42) y (2.43) son localmente topológicamente equivalentes cerca de x_0 e y_0 , respectivamente, si y sólo si ambos equilibrios tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa.

6. Suponga un campo de vectores bidimensional con dos puntos de equilibrio: uno tiene un valor propio positivo y uno negativo, y el otro tiene dos valores propios complejos conjugados con parte real negativa. Si este campo de vectores no tiene más puntos de equilibrio, dé al menos dos ejemplos topológicamente no-equivalentes de un posible retrato de fase.

7. Demuestre que bajo el cambio a coordenadas polares, el sistema $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ en \mathbb{R}^2 se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + g(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{r} (g(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta). \end{aligned}$$

a) Demuestre que ambos sistemas

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2)$$

y

$$\dot{x} = -y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x - y(x^2 + y^2)$$

poseen el mismo sistema linealizado en el origen.

b) Bosqueje los retratos de fase de los sistemas en (a). Explique por qué la diferencia en su comportamiento cualitativo no contradice el Teorema de Hartman-Grobman.

Sugerencia: Considere coordenadas polares.

8. (Péndulo amortiguado I) Bosqueje el retrato de fase del péndulo amortiguado

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \sin\theta = 0,$$

para $\alpha = 0$ (sin amortiguamiento) y $\alpha > 0$ (con amortiguamiento).

Sugerencia: Considere la energía del sistema dada por

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + (1 - \cos\theta).$$

9. (Péndulo amortiguado II) Un péndulo planar amortiguado posee la ecuación de movimiento

$$Ml\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + Mg\sin\theta = 0,$$

donde θ es un ángulo, M es la masa, l es la longitud del péndulo, g es la constante gravitacional, y $c \geq 0$ es el coeficiente de amortiguación, el cual se asume “pequeño.”

a) Identifique el espacio de fase del sistema.

b) Reescalando el tiempo $t \mapsto \sqrt{\frac{l}{g}}t$, definiendo $x = \theta$, $y = \sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\theta}$, y $D = \frac{c}{M\sqrt{gl}}$ demuestre que la ecuación del péndulo se reduce al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -Dy - \sin x. \end{cases}$$

¿Por qué es más conveniente estudiar este sistema de dos EDOs de primer orden en lugar de la EDO original de 2do. orden?

c) Encuentre los puntos de equilibrio, determine su estabilidad y bosqueje los retratos de fase **locales**.

d) Bosqueje los retratos de fase **globales** en los casos $D = 0$ y $D > 0$, describa las variedades estable e inestable globales, y los conjuntos atractores para condiciones iniciales arbitrarias. Además, dé una interpretación física del movimiento del péndulo basada en sus resultados.

10. Considere una ecuación de primer orden

$$x' = f(x, a),$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable de estado y $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro constante. Suponga que existen x_0, a^* tales que $f(x_0, a^*) = 0$ y $\partial f / \partial x|_{(x_0, a^*)} \neq 0$. Demuestre que la ecuación diferencial

$$x' = f(x, a^* + \epsilon)$$

tiene un equilibrio $x_0(\epsilon)$ donde $\epsilon \mapsto x_0(\epsilon)$ es una función suave que satisface $x_0(0) = x_0$ para ϵ suficientemente pequeño.

11. Suponga un campo de vectores bidimensional con dos puntos de equilibrio: uno tiene un valor propio positivo y uno negativo, y el otro tiene dos valores propios complejos conjugados con parte real negativa. Si este campo de vectores no tiene más puntos de equilibrio, dé al menos dos ejemplos topológicamente no-equivalentes de un posible retrato de fase.

12. Considere el campo de vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = 2y - 5x^3. \end{cases}$$

a) Pruebe que $y = x^3$ es una variedad invariante.

b) Determine las variedades estable e inestable globales del origen.

13. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1, \\ x_2' &= -x_2 + x_1^2, \\ x_3' &= x_3 + x_2^2, \end{aligned}$$

y muestre que las variedades estable e inestable globales son:

$$W^s(0) : x_3 = -\frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{6}x_1^2x_2 - \frac{1}{30}x_1^4,$$

y $W^u(0) = \{x_1 = x_2 = 0\}$.

14. Sea A un conjunto atractor de un sistema dinámico a tiempo continuo, y suponga que $x^* \in A$ es un equilibrio hiperbólico de tipo silla. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
 (a) $W^s(x^*) \subset A$; (b) $W^u(x^*) \subset A$. Incluya un posible retrato de fase que ilustre su razonamiento en cada caso (a) y (b).
15. Sean φ y ψ dos flujos en \mathbb{R}^2 que poseen exactamente dos puntos de equilibrio cada uno y ambos son sillas. Suponga que para el flujo φ la variedad inestable de una de las sillas corresponde a la variedad estable de la otra, pero esta propiedad no es verdad para ψ . Demuestre que φ y ψ no son topológicamente equivalentes.
Ayuda: Asuma que las variedades estable e inestable locales se pueden extender en forma global al resto del espacio de fase \mathbb{R}^2 al hacer que puntos en W_{loc}^s (resp. W_{loc}^u) evolucionen mediante el flujo para todo $t < 0$ (resp. $t > 0$).
16. Encuentre el diagrama de bifurcación en el plano (λ, y) de la forma normal $\dot{y} = \lambda + y^2$ de la bifurcación silla-nodo, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara con la forma normal $\dot{y} = \lambda - y^2$?
17. Encuentre el diagrama de bifurcación en el plano (λ, y) de la forma normal $\dot{y} = \lambda y + y^2$ de la bifurcación transcritical, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara con la forma normal $\dot{y} = \lambda y - y^2$?
18. Encuentre el diagrama de bifurcación en el plano (λ, y) de la forma normal $\dot{y} = \lambda y + y^3$ de la bifurcación pitchfork subcrítica, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara con la forma normal $\dot{y} = \lambda y - y^3$ del caso supercrítico?
19. Encuentre el diagrama de bifurcación tridimensional de la forma normal $\dot{z} = (\lambda + i\omega)z + z|z|^2$ de la bifurcación de Hopf subcrítica, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara con la forma normal $\dot{z} = (\lambda + i\omega)z - z|z|^2$ del caso supercrítico?
20. Demuestre que el campo de vectores en \mathbb{R} con un parámetro real λ , dado por $\dot{x} = \lambda e^x - x$, posee una **bifurcación silla-nodo** genérica para un $\lambda = \lambda^*$ apropiado. Encuentre λ^* y el equilibrio x_0 en el cual ocurre la bifurcación

silla-nodo. Verifique las condiciones de bifurcación y genericidad en (λ^*, x_0) , determine la estabilidad de los equilibrios y bosqueje el diagrama de bifurcación en el plano (λ, x) .

Sugerencia: Para hallar el par (λ^*, x_0) estudie las gráficas de $f(x) = \lambda e^x$ y $g(x) = x$.

21. Para el campo de vectores $\dot{x} = x - rx(1 - x)$, demuestre que ocurre una **bifurcación transcítica** genérica en algún valor $r = r^*$ por determinar. Bosqueje el diagrama de bifurcación en el plano (r, x) .

22. Considere el campo de vectores $\dot{x} = \lambda x - \sin x$, con $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que este campo de vectores pasa por una **bifurcación pitchfork** en algún valor $\lambda = \lambda^*$ por determinar.

b) Determine si la bifurcación pitchfork es super- o subcrítica.

Sugerencia: Encuentre el término relevante de la forma normal.

c) Dé un argumento de por qué ocurren infinitas **bifurcaciones silla-nodo** al variar λ .

23. En ocasiones, cuando una especie se halla con bajas densidades de población, enfrenta dificultades para crecer en número y evitar la extinción. Este fenómeno, llamado *efecto Allee*, se caracteriza por una tendencia a que la tasa de crecimiento decrezca por debajo de un nivel crítico mínimo. En ocasiones, el efecto Allee provoca que la tasa de crecimiento se vuelva negativa, lo que induce un umbral de extinción, comúnmente llamado el *umbral Allee*, que la población debe superar para sobrevivir en el largo plazo.

Considere el siguiente modelo reescalado de crecimiento de una población con efecto Allee y con depredación proporcional al número de individuos:

$$\dot{x} = x(1 - x)(x - m) - px,$$

con $x(t) \geq 0$, $0 < m < 1$, $p \geq 0$.

a) En el caso en que se ignora el efecto de la depredación, es decir, $p = 0$, encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio x^* del sistema. Determine el umbral Allee.

- b) Determine todas las bifurcaciones que ocurren en el sistema a medida que el parámetro $p > 0$ se hace aumentar desde cero.
- c) Haga un bosquejo del diagrama de estabilidad de puntos de equilibrio x^* en función del parámetro p en el plano (p, x) .
- d) Haga un bosquejo cualitativo del diagrama de bifurcación en el plano (m, p) . Interprete sus resultados.

24. Un modelo de pesquería viene dado por la ecuación

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - C \frac{N}{N + A},$$

donde $C > 0$ y $A > 0$. Aquí, en ausencia de pesca, la población crece en forma logística. Los efectos de la pesca están modelados por el término $-C \frac{N}{N+A}$ que dice que los peces son capturados a una tasa que decrece con N .

- a) ¿Cuál es la interpretación del parámetro A ?
- b) Muestre que el sistema puede ser reescrito en forma adimensional como

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - c \frac{x}{a + x},$$

para cantidades apropiadas x , τ , a y c .

- c) Muestre que el sistema puede tener uno, dos o tres puntos de equilibrio, dependiendo de los valores de a y c . Clasifique la estabilidad de los puntos de equilibrio en cada caso.
- d) Analice la dinámica cerca de $x = 0$ y muestre que ocurre una bifurcación cuando $c = a$. ¿Qué tipo de bifurcación es?
- e) Muestre que otra bifurcación ocurre cuando $c = \frac{1}{4}(a + 1)^2$, para $a < a^*$, donde a^* es un valor por determinar. Clasifique esta bifurcación.

25. Las rayas de las cebras y los patrones en las alas de las mariposas son dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Como un ingrediente en un modelo de formación de patrones, Lewis et al. (1977) consideraron un ejemplo simple de un *interruptor químico*, en el cual un

gen G es activado por una sustancia S mediante una señal bioquímica. Por ejemplo, el gen normalmente estaría inactivo, pero podría “encenderse” para producir un pigmento u otro producto cuando la concentración S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del gen, y asuma que la concentración s_0 de S está fija. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4 + g^2},$$

donde las constantes k_i son positivas. La producción de g es estimulada por s_0 a una tasa k_1 , y por un proceso de retroalimentación positivo o *autocatalítico* (el término no-lineal). También hay una degradación lineal de g a una tasa k_2 .

a) Demuestre que el sistema se puede llevar a la forma adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - r x + \frac{x^2}{1 + x^2},$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son nuevos parámetros.

- b) Demuestre que si $s = 0$, existen dos puntos de equilibrio positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c es un valor a determinar.
- c) Asuma que inicialmente no hay producción del gen, es decir, $g(0) = 0$, y suponga que s crece lentamente desde cero (se enciende la señal activadora). ¿Qué le sucede a $g(t)$? ¿Qué sucede si s entonces vuelve a cero? ¿El gen se vuelve a apagar?
- d) Encuentre las ecuaciones para las curvas de bifurcación en el plano (r, s) , y clasifique las bifurcaciones que ocurren.
- e) Mediante un computador, grafique el diagrama de bifurcación en el plano (r, s) .

26. En el estudio de reacciones autocatalíticas isotérmicas, Gray y Scott (1985) consideraron una reacción hipotética cuya cinética está dada en forma adimensional por

$$\begin{cases} \dot{u} = a(1 - u) - uv^2, \\ \dot{v} = uv^2 - (a + k)v, \end{cases}$$

donde $a, k > 0$ son parámetros. Demuestre que ocurre una bifurcación cuando $k = -a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a}$. ¿Qué tipo de bifurcación es la hallada? Justifique su respuesta.

27. Considere el sistema depredador-presa $\dot{x} = x(x(1-x) - y), \dot{y} = y(x - a)$, donde $x, y \geq 0$ son poblaciones adimensionalizadas de presas y depredadores, respectivamente, y $a > 0$ es un parámetro.

- Bosqueje las nulclinas en el primer cuadrante (Puede usar un computador si lo desea).
- Verifique que los equilibrios son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(a, a - a^2)$, y clasifique su estabilidad.
- Bosqueje el retrato de fase para $a > 1$ y muestre que los depredadores se extinguen.
- Muestre que ocurre una **bifurcación de Hopf** en $a^* = \frac{1}{2}$. Sin calcular la 1ra cantidad de Lyapunov, dé un argumento para decidir si la bifurcación de Hopf es subcrítica o supercrítica.
- Bosqueje todos los retratos de fase topológicamente diferentes para $0 < a < 1$.

28. Considere el campo de vectores en \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = (\mu - 2)x + (\mu - 1)y - x^3 - x^2y. \end{cases} \quad (2.44)$$

donde μ es un parámetro real.

- Determine la estabilidad del punto de equilibrio en el origen de (2.44) para todo $|\mu| \neq 0$ suficientemente pequeño.
- Fije el valor de $\mu = 0$ y encuentre una matriz P de tamaño 2×2 y entradas reales tal que el cambio de coordenadas $(x, y)^t = P(u, v)^t$ transforma el sistema (2.44) en el siguiente campo de vectores:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

donde f, g son funciones suaves por determinar tales que $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ y $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$ (i.e., f, g contienen los términos de orden mayor a 1 del sistema en las coordenadas (u, v)). ¿Cuál es el valor de ω en este caso?

Ayuda: Observe la forma particular que tiene la parte lineal de (2.45).

- c) Demuestre que el sistema (2.44) pasa por una bifurcación de Hopf genérica en el origen cuando $\mu = 0$. ¿Es supercrítica o subcrítica? Justifique sus argumentos!

Ayuda: Ocupe la fórmula (2.39).

- d) Dibuje bosquejos de los retratos de fase de (2.44) cerca del origen para $|\mu|$ suficientemente pequeño con $\mu < 0$ y $\mu > 0$.

29. Considere el campo de vectores en \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = \mu x + y - x^2, \\ y' = 2x^2 - x + \mu y, \end{cases}$$

donde μ es un parámetro real.

- a) Determine la estabilidad del punto de equilibrio en el origen para todo $|\mu| \neq 0$.
- b) Demuestre que el sistema pasa por una bifurcación de Hopf genérica en el origen cuando $\mu = 0$. ¿Es supercrítica o subcrítica? Justifique sus argumentos!

Ayuda: Ocupe la fórmula (2.39).

- c) Dibuje o describa los retratos de fase del sistema cerca del origen para $|\mu|$ suficientemente pequeño con $\mu < 0$ y $\mu > 0$.

30. Demuestre que el modelo del oscilador de Van der Pol:

$$\ddot{y} - \alpha(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$$

tiene un equilibrio que exhibe una bifurcación de Hopf en algún valor de $\alpha = \alpha^*$ (por determinar), y encuentre la estabilidad del ciclo límite bifurcado.

Capítulo 3

Sistemas dinámicos a tiempo discreto

En este capítulo estudiaremos las propiedades elementales de sistemas dinámicos definidos mediante la composición o iteración de mapeos

$$x \mapsto g(x),$$

o, equivalentemente, como ecuaciones en recurrencia de la forma

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

Ejemplo 26 Considere la aplicación lineal unidimensional $x \mapsto \mu x$, $x \in \mathbb{R}$, donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Claramente $x = 0$ es el único punto fijo y su estabilidad depende de μ . Se tienen los siguientes casos:

1. $\mu > 1$: Dado que $x_{n+1} = \mu x_n$, se tiene que la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \mu \tag{3.1}$$

es mayor que 1. Luego, si $x_0 \neq 0$, la sucesión $\{x_n\}$ posee magnitud monótonamente creciente como en la figura 3.1(a). Luego, el origen es un repulsor.

2. $0 < \mu < 1$: De (3.1) se tiene que el origen es un atractor. Si $x_0 \neq 0$, la órbita $\{x_n\}$ converge monótonamente al origen como en la figura 3.1(b).
3. $-1 < \mu < 0$: De la igualdad (3.1) se desprende que, si $x_0 \neq 0$, la órbita $\{x_n\}$ también converge al origen pero alternando entre valores positivos y negativos como en la figura 3.1(c). Luego, el origen es un atractor, pero el mapeo *invierte* la orientación de movimiento.

4. $\mu < -1$: El origen es un repulsor que invierte la orientación como en la figura 3.1(d).

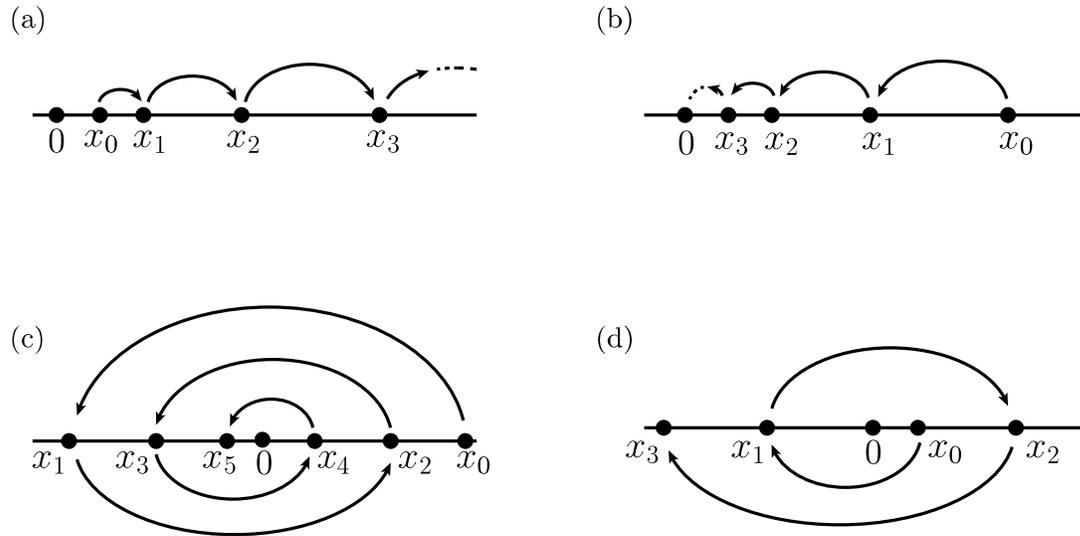


Figura 3.1: Retratos de fase del sistema $x \mapsto \mu x$ para los distintos valores de μ .

Ejemplo 27 Notemos que el ejemplo anterior se cumple $\mu = \frac{d}{dx}(\mu x)$. Inspirados en esto, supongamos un mapeo general $x \mapsto g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que $g'(x) = \mu$, y teniendo un punto fijo en $x^* = 0$.

Podemos analizar las órbitas de este mapeo mediante los *diagramas de telaraña*, los cuales consisten en estudiar la gráfica de la aplicación $y = g(x)$ en una vecindad de x^* . El primer paso es graficar $y = g(x)$ junto con la recta $y = x$ (identidad). (Notemos que, en general, cada intersección de estas dos gráficas corresponde a un punto fijo.) Para una condición inicial $x_0 \neq x^*$ localizamos su imagen $g(x_0)$. Proyectando $g(x_0)$ sobre la gráfica de la identidad $y = x$ obtenemos la posición de $x_1 = g(x_0)$. Luego repetimos el proceso al iterar g sobre x_1 obteniendo $x_2 = g^2(x_0)$, y así sucesivamente. Por ejemplo, para el caso $0 < \mu < 1$ en la figura 3.2(a), el punto fijo es atractor y la convergencia es monótona. En cambio, para el caso $-1 < \mu < 0$ en la figura 3.2(b), se alternan los lados al converger a x^* .

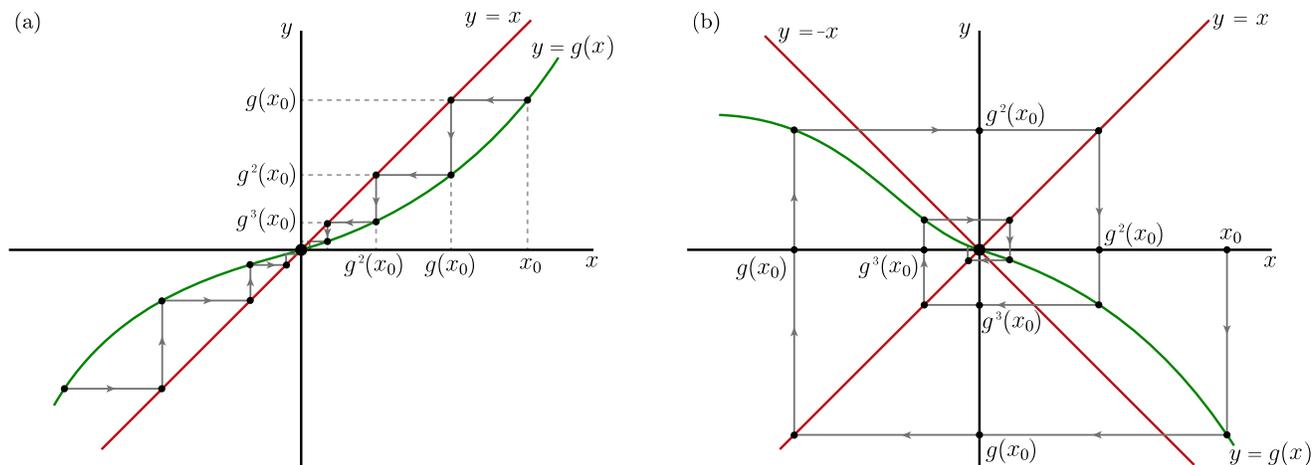


Figura 3.2: Diagramas de telaraña de $x \mapsto g(x)$ para los casos $0 < \mu < 1$ (panel (a)) y $-1 < \mu < 0$ (panel (b)).

El siguiente resultado (estudiado usualmente en un curso de análisis matemático) nos da condiciones para la existencia y unicidad del punto fijo x^* además de la estabilidad global del mismo, es decir, cualquier órbita converge a x^* . Adicionalmente, en este caso no hay restricciones en la dimensión del espacio de fase X .

Teorema 10 (*Principio de Contracción*) *Sea X un espacio métrico completo con distancia ρ . Supongamos que existe una aplicación $g : X \rightarrow X$ continua tal que*

$$\rho(g(x), g(y)) \leq \lambda \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

para alguna constante $0 < \lambda < 1$. Entonces el sistema dinámico discreto dado por $x \mapsto g(x)$ tiene un único punto fijo atractor $x^* \in X$. Más aún, $g^k(x) \rightarrow x^*$ cuando $k \rightarrow \infty$, para cualquier punto $x \in X$.

3.1. Estabilidad de puntos fijos hiperbólicos

En general, si x^* es un punto fijo de un sistema dinámico discreto, suave, finito-dimensional, entonces podemos formular condiciones suficientes para su estabilidad en términos de la matriz Jacobiana evaluada en x^* . Consideremos un sistema dinámico discreto $x \mapsto g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde g es suficientemente diferenciable junto con su inversa g^{-1} (es decir, g es un C^k -difeomorfismo, para algún

$k \geq 1$ suficientemente grande). Sin pérdida de generalidad, asumamos que $x^* = 0$ es un punto fijo del sistema, es decir, $g(0) = 0$, y sea $A = Dg(x^*)$ la matriz jacobiana de g evaluada en x^* con valores propios

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n.$$

Notemos que, si la matriz A es invertible, entonces ninguno de estos valores propios es cero.

Definamos las siguientes cantidades:

- n_s : Número de valores propios de x^* con norma menor a 1.
- n_u : Número de valores propios de x^* con norma mayor a 1.
- n_c : Número de valores propios de x^* con norma igual a 1.

En otras palabras, n_s, n_u y n_c son el número de valores propios de A dentro, fuera y sobre el círculo unitario $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$, respectivamente.

Definición 16 *Un punto fijo se dice **hiperbólico** si $n_c = 0$.*

Teorema 11 (*Hartman-Grobman*) *Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 -difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico en $x^* = 0$. Entonces existe un homeomorfismo h definido en alguna vecindad U de x^* tal que*

$$h(g(x)) = Dg(x^*)h(x), \quad \forall x \in U.$$

Análogamente al caso continuo, el teorema de Hartman-Grobman nos dice que si x^* es un punto fijo hiperbólico (sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x^* = 0$), el mapeo g es localmente topológicamente conjugado al mapeo lineal $\boxed{u \mapsto Dg(x^*)u}$ en una vecindad del origen. La demostración de este resultado puede hallarse en [17].

OBSERVACIONES.

1. Los valores propios de un punto fijo son comúnmente llamados **multiplicadores** por razones que quedarán más claras más adelante.

2. En el caso lineal ($g(x) = Ax$), el teorema es inmediato al escribir A en su forma estándar diagonal o de Jordan.

Definición 17 Sea A un difeomorfismo lineal hiperbólico en \mathbb{R}^n , es decir, $x \mapsto Ax$, donde A es una matriz $n \times n$ invertible con ningún valor propio sobre el círculo unitario. Definimos el **espacio estable de A** —denotado por E^s — como el subespacio generado por los vectores propios (generalizados) de A correspondientes a los valores propios con módulo menor a 1. Similarmente, el **espacio inestable de A** —denotado por E^u — es el subespacio generado por los vectores propios (generalizados) de A correspondientes a los valores propios con módulo mayor a 1.

De esta definición se desprende inmediatamente que $\dim E^s = n_s$ y $\dim E^u = n_u$. Análogamente al caso continuo, las órbitas en E^s y E^u están caracterizadas por contracción y expansión, respectivamente. Si todos los valores propios de A son simples, entonces la contracción y expansión están acotadas por series geométricas. Es decir, existen constantes $c > 0$ $\alpha < 1$ tales que para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq c\alpha^n |x_0|, & x_0 \in E^s, \\ |x_{-n}| &\leq c\alpha^n |x_0|, & x_0 \in E^u. \end{aligned} \tag{3.2}$$

(Si hay valores propios múltiples, la tasa de expansión (contracción) puede que no sea exponencial.)

Definición 18 Sea A un difeomorfismo lineal hiperbólico en \mathbb{R}^n . Definimos las restricciones de A a sus subespacios estable e inestable por $A_s = A|_{E^s}$ y $A_u = A|_{E^u}$, respectivamente. En particular, A_s (resp. A_u) es un difeomorfismo lineal hiperbólico atractor (resp. repulsor) en \mathbb{R}^{n_s} (resp. \mathbb{R}^{n_u}).

Teorema 12 Considere un sistema dinámico discreto

$$x \mapsto g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde g es una función suave. Suponga que g tiene un punto fijo x^* hiperbólico, es decir, $g(x^*) = x^*$, y denotemos

$$A = Dg(x^*),$$

la matriz jacobiana de g evaluada en x^* . Entonces, x^* es atractor si $n_s = n$, es decir, todos los valores propios $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ de A satisfacen

$$|\mu_i| < 1.$$

En caso contrario, si $n_u = n$, i.e., $|\mu_i| > 1$, para todo $i = 1, \dots, n$, entonces x^* es repulsor. Por otro lado, si el producto $n_s n_u \neq 0$, x^* es un punto silla.

Ejemplo 28 Considere la aplicación $x \mapsto g(x) = 2x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Los puntos fijos son $x_+^* = 1$ y $x_-^* = -\frac{1}{2}$. Los respectivos multiplicadores son $Dg(x_+^*) = 4$ y $Dg(x_-^*) = -2$. Por lo tanto, ambos puntos fijos son hiperbólicos y el mapeo $x \mapsto g(x)$ es localmente topológicamente conjugado a

$$\begin{cases} u \mapsto 4u, & x \approx 1; \\ u \mapsto -2u, & x \approx -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

En particular, ambos puntos fijos son repulsores, es decir, $E^u = \mathbb{R}$, $E^s = \{0\}$. (Si no hay más puntos fijos, ¿hacia dónde convergen entonces las órbitas?) Sin embargo, de acuerdo a lo visto en el ejemplo 26, la forma en que las órbitas se alejan de cada uno de estos puntos fijos es intrínsecamente diferente: Las órbitas se alejan de x_+^* en forma monótona; en cambio, se mueven de x_-^* alternando el lado desde el cual se alejan.

Definición 19 Se dice que una matriz A de tamaño $n \times n$ **preserva orientación** si $\det(A) > 0$. En cambio, decimos que A **invierte orientación** si $\det(A) < 0$.

Ejemplo 29 Considere las transformaciones en el plano dadas por la familia de difeomorfismos $(x_1, x_2) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, en los casos:

- (a) $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$;
- (b) $\lambda_1 > 1$, $-1 < \lambda_2 < 0$;
- (c) $\lambda_1 < -1$, $0 < \lambda_2 < 1$;
- (d) $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$.

En todos los casos el origen es un punto silla, esto es, $\dim E^s = \dim E^u = 1$, con $E^s = \{(x_1, x_2) | x_1 = 0\}$, y $E^u = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0\}$; ver figura 3.3. Sin embargo, en (a) y (d) se preserva la orientación, mientras que en (b) y (c) se invierte.

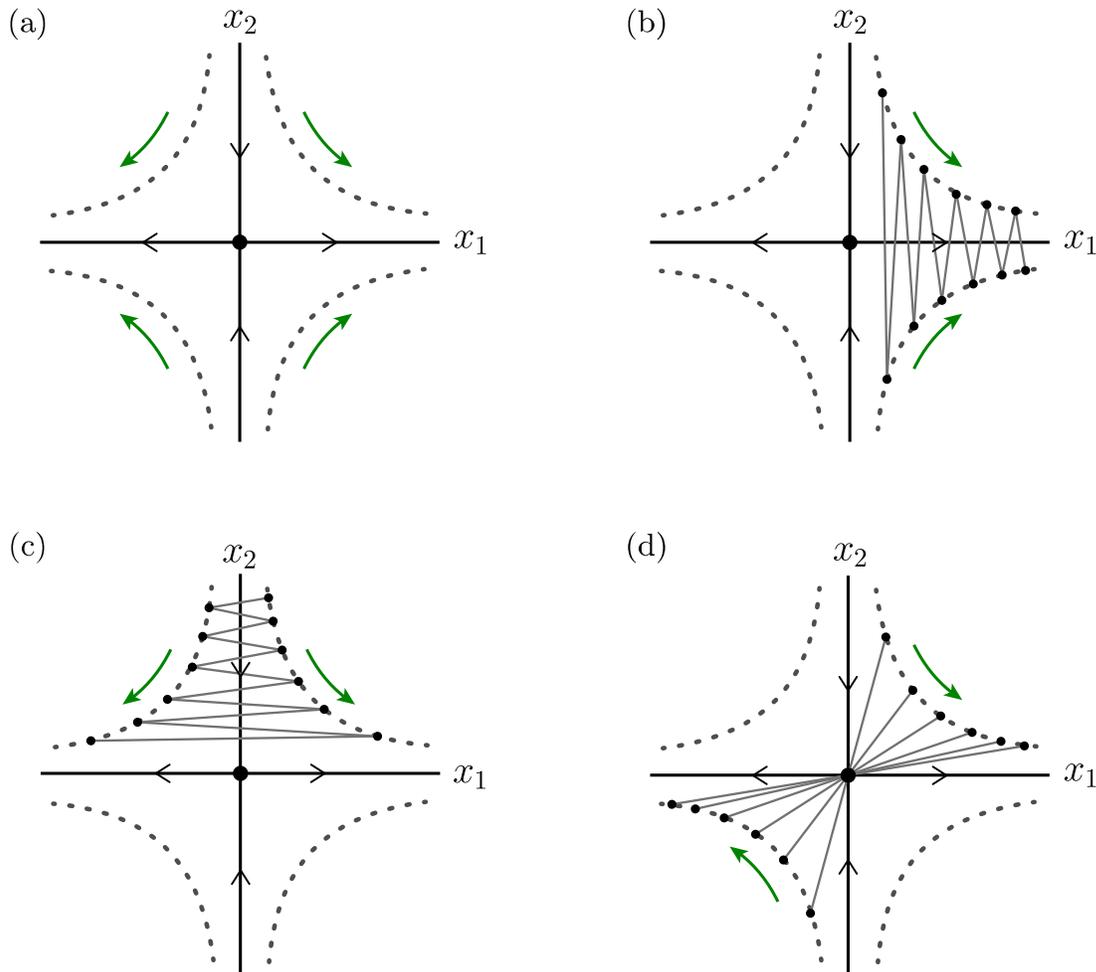


Figura 3.3: Ejemplos de difeomorfismos lineales de tipo silla que preservan orientación (a) y (d), y que la invierten (b) y (c).

Teorema 13 *Dos difeomorfismos lineales hiperbólicos A y B son topológicamente conjugados si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\dim E_A^s = \dim E_B^s$ (y, en consecuencia, $\dim E_A^u = \dim E_B^u$);
2. *Ambas restricciones A_s y B_s , o bien, preservan orientación o invierten la orientación. Además, una condición análoga se debe cumplir para las restricciones A_u y B_u . Es decir, $\text{sign}[\det(A_s)] = \text{sign}[\det(B_s)]$ y $\text{sign}[\det(A_u)] = \text{sign}[\det(B_u)]$.*

COMENTARIO. La segunda condición en el teorema anterior resalta una importante diferencia entre el comportamiento cualitativo de flujos y difeomorfismos. El flujo (lineal) dado por $\exp(At)x$ del sistema lineal hiperbólico $\dot{x} = Ax$ también define un difeomorfismo lineal hiperbólico $x \mapsto \exp(At)x$ para todo $t \neq 0$, el que siempre preserva orientación. La razón es que si A tiene valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, todos con parte real no-nula, entonces

$$\det(\exp(At)) = \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_j t) > 0$$

y luego $\exp(At)$ preserva orientación para todo t .

Teorema 14 *Considere los mapeos $x \mapsto f(x), y \mapsto g(y), x, y \in \mathbb{R}^n$, suficientemente suaves, con puntos fijos hiperbólicos x^* e y^* , respectivamente. Entonces, los retratos de fase de ambos mapeos son localmente topológicamente conjugados cerca de x^* e y^* si y sólo si estos puntos fijos tienen el mismo número n_- y n_+ de multiplicadores con $|\mu| < 1$ y $|\mu| > 1$, respectivamente, y los signos de los productos de todos los multiplicadores con $|\mu| < 1$ y con $|\mu| > 1$ son los mismos para ambos puntos fijos.*

COMENTARIOS.

1. Al igual que en el caso continuo, la demostración de este teorema se basa en el hecho de que cerca de un punto fijo hiperbólico el sistema es localmente topológicamente conjugado a su linealización $x \mapsto Ax$.
2. Dos difeomorfismos topológicamente conjugados f, g en \mathbb{R}^n deben tener las mismas propiedades de orientación. Los productos de multiplicadores mencionados en el teorema anterior son justamente los determinantes de las matrices jacobianas (es decir, las linealizaciones) de los mapeos evaluadas en los puntos fijos.

Notemos que, en la práctica, uno sólo debe tener en cuenta los multiplicadores reales para calcular estos signos, pues el producto de un par complejo-conjugado de multiplicadores es siempre positivo.

3.2. Estabilidad de órbitas periódicas

Podemos usar los resultados de esta sección para estudiar la estabilidad de una órbita periódica

$$\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

de período k del mapeo g , también llamado un k -ciclo. Concretamente, cada uno de los puntos $x_i \in \gamma$ es un punto fijo de g^k , la k -ésima iteración de g . Por lo tanto, el k -ciclo γ del mapeo $x \mapsto g(x)$ es estable si y sólo si cada punto $x_i \in \gamma$ es un punto fijo estable de $x \mapsto g^k(x)$. En general, la estabilidad de cualquier punto $x_i \in \gamma$ como punto fijo de g^k es la misma estabilidad del ciclo γ completo con respecto a g .

Veamos el caso particular de $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g \in C^1$. Para un 2-ciclo $\{x_1, x_2\}$ con $x_2 = g(x_1)$ y $x_1 = g(x_2)$, tenemos:

$$(g \circ g)'(x_1) = g'(g(x_1))g'(x_1) = g'(x_2)g'(x_1).$$

Luego x_1 es un punto fijo estable de g^2 si y solo si $|g'(x_2)g'(x_1)| < 1$; y en consecuencia, el 2-ciclo $\{x_1, x_2\}$ es estable si y solo si $|g'(x_2)g'(x_1)| < 1$.

Para un 3-ciclo $\{x_1, x_2, x_3\}$ tenemos

$$(g \circ g \circ g)'(x_1) = g'(g(g(x_1)))(g(g(x_1)))' = g'(x_3)g'(x_2)g'(x_1),$$

de donde podemos concluir sobre la estabilidad de manera análoga. Inductivamente, en el caso general para un k -ciclo obtenemos:

$$(g^k)'(x_1) = g'(x_1)g'(x_2) \cdots g'(x_{k-1})g'(x_k).$$

Luego, se desprende el siguiente resultado.

Proposición 2 *Considere una órbita periódica*

$$\gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

de período k del mapeo $x \mapsto g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $g \in C^1$. Si

$$|g'(x_1)g'(x_2) \cdots g'(x_{k-1})g'(x_k)| < 1,$$

entonces el k -ciclo es estable; en cambio, si

$$|g'(x_1)g'(x_2)\cdots g'(x_{k-1})g'(x_k)| > 1,$$

el k -ciclo es inestable.

Ejemplo 30 Encontramos todas las órbitas 2-periódicas de $g(x) = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$ y determinemos su estabilidad.

En primer lugar, busquemos los puntos fijos de $x \mapsto 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$. Resolviendo para $x^2 + x - 1 = 0$ se obtienen los puntos fijos $x_1^* = -1/2 - \sqrt{5}/2$, $x_2^* = -1/2 + \sqrt{5}/2$. Notemos que $x_1^* \notin [-1, 1]$ y $x_2^* \in [-1, 1]$. Además, $g'(x) = -2x$; luego, $g'(x_2^*) \approx -1,23607$. Por lo tanto x_2^* es inestable.

Para hallar los 2-ciclos consideremos

$$f^2(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4.$$

Pero notemos que x_1^*, x_2^* también son puntos fijos de f^2 . Luego,

$$f^2(x) = x \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0.$$

Es decir, $f^2(x) - x$ es factorizable por $x^2 + x - 1 = (x - x_1^*)(x - x_2^*)$. Por lo tanto, el 2-ciclo corresponde a la órbita $\{0, 1\}$, con estabilidad dada por $|f'(0)f'(1)| = 0 < 1$. Luego, el 2-ciclo es estable.

3.3. Variedades invariantes de puntos fijos

En el caso discreto se tienen resultados análogos a los vistos para sistemas dinámicos continuos. En particular tenemos...

Teorema 15 (*Variedad estable para mapeos*) Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^r , $r \geq 1$, con un punto fijo hiperbólico x^* . Sea $x \mapsto Bx$, con $B = Dg(x^*)$, la linealización de g en x^* . Entonces existen variedades estable e inestable locales $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ y $W_{\text{loc}}^u(x^*)$, tangentes a los subespacios lineales $E^s(x^*)$ y $E^u(x^*)$ y de dimensiones $n_s = \dim E^s(x^*)$ y $n_u = \dim E^u(x^*)$, respectivamente. Además, $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ y $W_{\text{loc}}^u(x^*)$ poseen la misma diferenciabilidad de clase C^r que g .

En este caso las variedades estable e inestable se definen de forma similar como para flujos. Tenemos:

$$W_{\text{loc}}^s(x^*) = \{x \in U : g^n(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \text{ y } g(x) \in U, \forall n \geq 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x^*) = \{x \in U : g^{-n}(x) \rightarrow x^*, \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \text{ y } g^{-n}(x) \in U, \forall n \geq 0\},$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad de x^* . Análogamente, definimos las variedades estable e inestable globales, al tomar uniones de iteraciones en reversa y hacia adelante, respectivamente, de las variedades locales:

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(W_{\text{loc}}^s(x^*))$$

$$W^u(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} g^n(W_{\text{loc}}^u(x^*)).$$

Notemos que, a diferencia del caso continuo, las variedades invariantes de mapeos son uniones de órbitas discretas. Esto se ilustra en la figura 3.4.

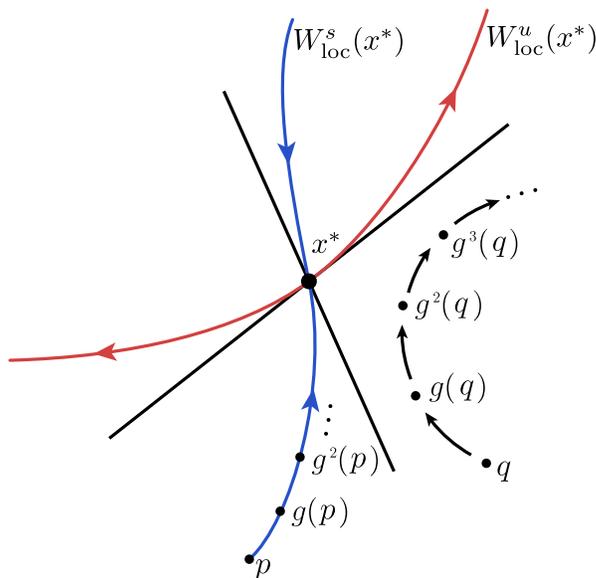


Figura 3.4: Bosquejo de las variedades estable e inestable locales $W_{\text{loc}}^s(x^*)$ y $W_{\text{loc}}^u(x^*)$ de un punto fijo silla en un sistema bidimensional discreto.

3.4. Bifurcaciones

Consideremos un sistema dinámico discreto que depende de un parámetro

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es suave con respecto a x y α . Sea x_0 un punto fijo hiperbólico del sistema para $\alpha = \alpha_0$. Queremos monitorear este punto fijo y sus multiplicadores a medida que α varía. Al igual que en el caso continuo, las bifurcaciones más comunes ocurren cuando x_0 pierde hiperbolicidad. Genéricamente, hay tres formas en que esto ocurra a medida que un multiplicador se acerca al círculo unitario (ver figura 3.5):

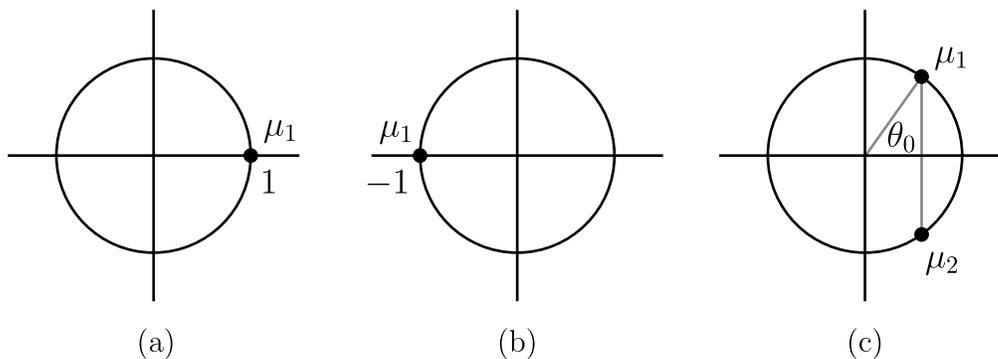


Figura 3.5: Posibles ubicaciones de los multiplicadores en el círculo unitario que dan paso a puntos fijos no hiperbólicos.

- (a) Existe un multiplicador $\mu_1 = 1$. Este escenario puede ocurrir en sistemas de dimensión $n \geq 1$.
- (b) Existe un multiplicador $\mu_1 = -1$. Este escenario puede ocurrir en sistemas de dimensión $n \geq 1$.
- (c) Existe un par de multiplicadores complejos conjugados $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\theta_0)$, con $0 < \theta_0 < \pi$, con magnitud 1. Este escenario puede ocurrir en sistemas de dimensión $n \geq 2$.

A continuación pasamos a revisar las bifurcaciones que dan lugar los anteriores eventos.

3.4.1. Bifurcación silla-nodo

Como el nombre lo sugiere, esta bifurcación se caracteriza por un fenómeno análogo al de una bifurcación silla-nodo en el caso continuo. Consideremos el siguiente sistema dinámico:

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

La función f es invertible para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad de $x = 0$. Para $\alpha = 0$, el origen es un punto fijo no-hiperbólico con multiplicador $\mu = f_x(0, 0) = 1$. El comportamiento de las órbitas para $|\alpha|$ pequeño es como en la figura 3.6. Para $\alpha < 0$, hay dos puntos fijos en $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$; x_1 es inestable y x_2 es estable. Para $\alpha = 0$, el origen es el único punto fijo y es semiestable: atrae por la izquierda y repele por la derecha. Mientras que para $\alpha > 0$ no hay puntos fijos.

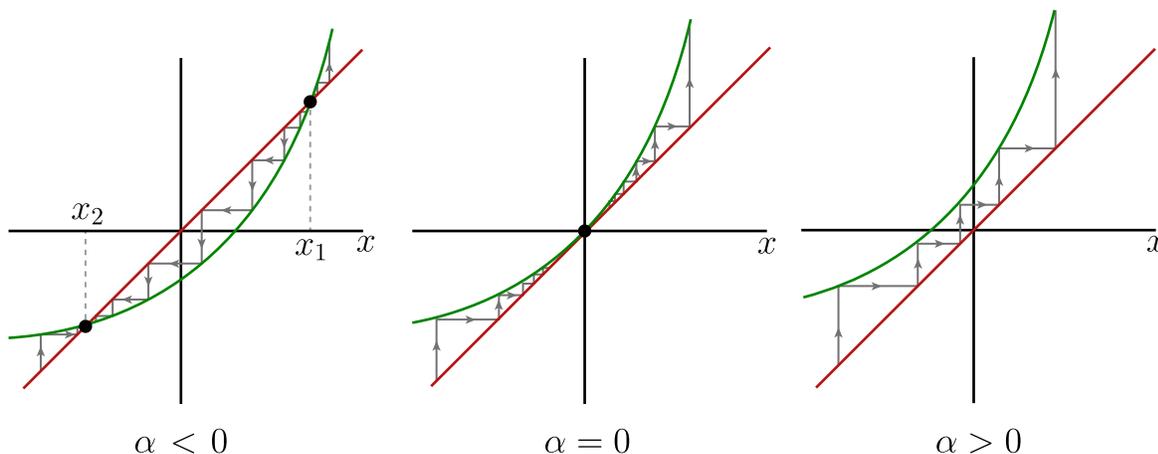


Figura 3.6: Diagramas de telaraña del mapeo $x \mapsto \alpha + x + x^2$ cerca de la bifurcación silla-nodo.

Como es de esperar, graficando esta misma información en un solo gráfico en el espacio de estados \times espacio de parámetros obtenemos un diagrama análogo de bifurcación de una bifurcación silla-nodo del caso continuo en la figura 3.7: En el plano (α, x) los puntos fijos se ubican sobre la parábola $-\alpha = x^2$ abierta hacia la izquierda; la rama superior corresponde al punto inestable, mientras que la rama inferior corresponde al punto fijo estable.

El mapeo anterior es, de hecho, una forma normal para la bifurcación silla-nodo discreta (El caso $x \mapsto \alpha + x - x^2$ es similar al anterior. La única diferencia es que el

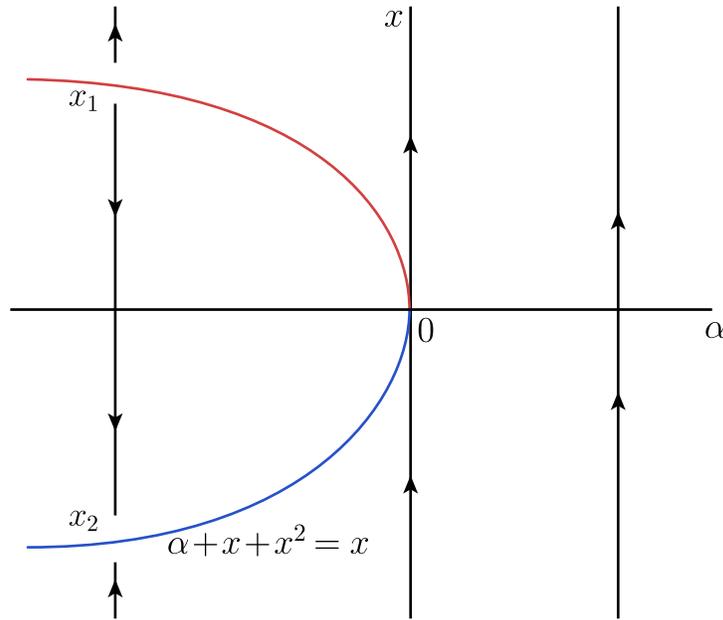


Figura 3.7: Diagrama de bifurcación del mapeo $x \mapsto \alpha + x + x^2$.

par de puntos fijos existe para $\alpha > 0$). Al igual que en el caso continuo, podemos listar las condiciones de genericidad que un sistema arbitrario debe satisfacer para que exhiba una bifurcación de este tipo.

Teorema 16 (*Bifurcación Silla-Nodo*) Consideremos el sistema dinámico unidimensional

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

con f suave. Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $f(x_0, \mu^*) = x_0$, “Existe un punto fijo x_0 para $\mu = \mu^*$ ”;

(B2) $Df(x_0, \mu^*) = f_x(x_0, \mu^*) = 1$, “Valor propio uno en x_0 para $\mu = \mu^*$ ”;

(G1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, “Término de 2do orden de f no se anula en (x_0, μ^*) ”;

(G2) $\frac{\partial}{\partial \mu} f(x_0, \mu^*) \neq 0$, “Velocidad no-nula en μ ”.

Entonces, el sistema posee la forma normal topológica

$$y \mapsto \alpha + y \pm y^2$$

en una vecindad de (x_0, μ^*) .

3.4.2. Bifurcación flip

La bifurcación flip es también conocida como bifurcación de “duplicación de período” (period-doubling bifurcation). La razón se debe al hecho de que, al pasar por la bifurcación, un punto fijo cambia su estabilidad y aparece una órbita periódica estable del *doble de período* que el punto fijo original, la cual sustituye al punto fijo (ahora inestable) como el objeto atractor del espacio de fase. De esta forma, el objeto atractor original (el punto fijo) “duplica” su período al aparecer el 2-ciclo estable.

Consideremos el siguiente sistema dinámico:

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La función f es invertible para $|\alpha|$ pequeño en una vecindad de $x = 0$. Notemos que $x_0 = 0$ siempre es un punto fijo con multiplicador $\mu = -(1 + \alpha)$. Luego, para $\alpha < 0$ pequeño, x_0 es estable; si $\alpha = 0$, x_0 es no-hiperbólico con $\mu = -1$; finalmente, si $\alpha > 0$ pequeño, x_0 es inestable. Notemos también que el origen no es el único punto fijo cerca de $x_0 = 0$ para $|\alpha|$ pequeño.

Consideremos ahora $f^2(x, \alpha)$, la segunda iteración de f . Si llamamos $y = f(x, \alpha)$, entonces:

$$\begin{aligned} f^2(x, \alpha) = f(y, \alpha) &= -(1 + \alpha)y + y^3 \\ &= -(1 + \alpha) [-(1 + \alpha)x + x^3] + [-(1 + \alpha)x + x^3]^3 \\ &= (1 + \alpha)^2 x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)] x^3 + O(x^5). \end{aligned}$$

Claramente, x_0 también es un punto fijo de f^2 . Pero también hay otros dos puntos fijos no-triviales para $\alpha > 0$ pequeño cerca del origen:

$$x_{1,2} = f^2(x_{1,2}, \alpha),$$

donde $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$. Esto puede verificarse al observar las gráficas de f y truncar la expresión para $f^2(x, \alpha)$ hasta términos de orden 3 como en la figura 3.8.

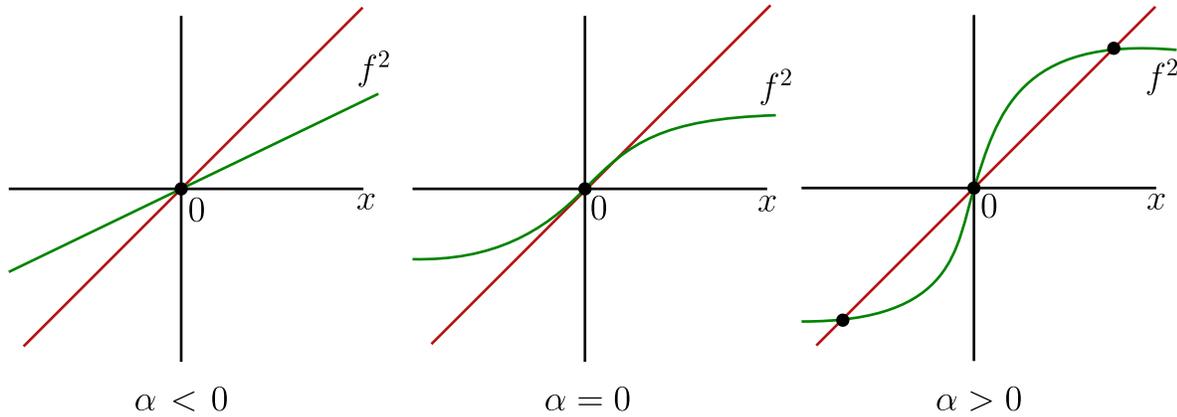


Figura 3.8: Forma cualitativa de f^2 en cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Los puntos fijos $x_{1,2}$ son estables y forman un ciclo de período 2 de $f(x, \alpha)$, es decir,

$$x_2 = f(x_1, \alpha), \quad x_1 = f(x_2, \alpha), \quad x_1 \neq x_2.$$

Así, se obtiene el diagrama de bifurcación de la figura 3.9 para $f^2(x, \alpha)$, la segunda iteración de f , en el cual el eje horizontal representa el punto fijo en $x_0 = 0$. La parábola corresponde al ciclo estable de período 2 para $\alpha > 0$. El diagrama de bifurcación que emerge es análogo al de una bifurcación pitchfork supercrítica para $f^2(x, \alpha)$. Continuando con la analogía, dado que el 2-ciclo es estable, uno habla de una *bifurcación flip supercrítica*.

El caso $x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3 \equiv f(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se puede tratar de la misma manera. Uno obtiene un siguiente diagrama en que los puntos de período 2 son inestables y existen para $\alpha < 0$. En tal caso, uno habla de una *bifurcación flip subcrítica*.

Teorema 17 (*Bifurcación Flip*) *Consideremos el sistema dinámico unidimensional*

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in I \subset \mathbb{R},$$

con f suave, donde I es un intervalo abierto que contiene al valor μ^* . Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $f(x_0, \mu) = x_0$, para todo $\mu \in I$;

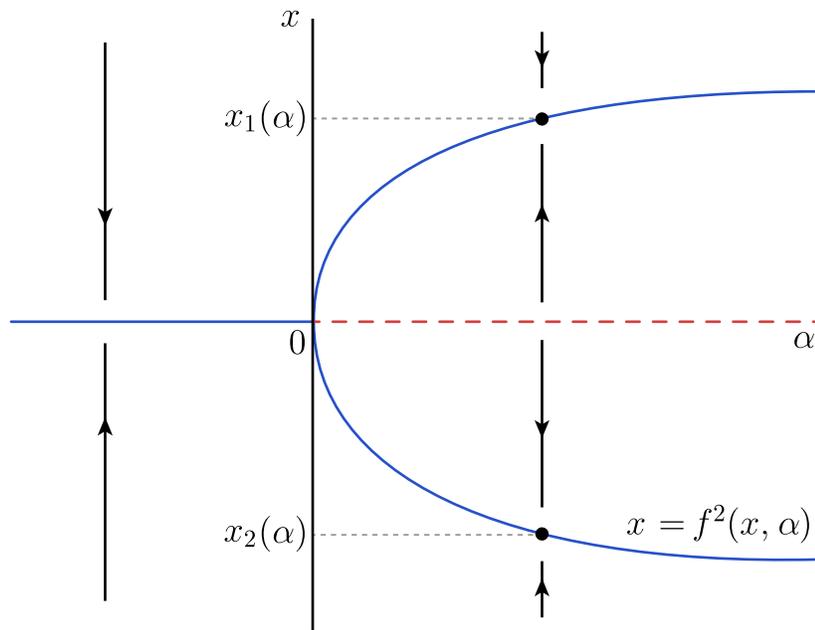


Figura 3.9: Diagrama de bifurcación $x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3$ cerca de $(x, \alpha) = (0, 0)$.

$$(B2) \quad Df(x_0, \mu^*) = f_x(x_0, \mu^*) = -1;$$

$$(G1) \quad a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, \mu^*) \right)^2 + \frac{1}{3} f_{xxx}(x_0, \mu^*) \neq 0;$$

$$(G2) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} f_x(x_0, \mu^*) \neq 0.$$

Entonces, el sistema posee la forma normal topológica

$$y \mapsto -(1 + \alpha)y \pm y^3$$

en una vecindad de (x_0, μ^*) .

El signo \pm en la forma normal coincide con el signo del coeficiente a de la condición (G1). Además, el signo de a determina la estabilidad del punto fijo x_0 para $\mu = \mu^*$ y la estabilidad y ubicación de la órbita 2-periódica en el diagrama de bifurcación. Si $a > 0$, la bifurcación es supercrítica: la órbita periódica es estable y existe para $\alpha > 0$. Por otro lado, si $a < 0$, tenemos el caso subcrítico: la órbita periódica es inestable y existe para $\alpha < 0$.

3.4.3. Bifurcación Neimarck-Sacker

Esta bifurcación se caracteriza por la aparición de un círculo invariante rodeando un punto fijo, el cual cambia su estabilidad al momento de la bifurcación. Por este motivo, también se le conoce como bifurcación de Hopf discreta.

Considere el siguiente sistema dinámico discreto bidimensional

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1+\alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el parámetro; $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ y $d = d(\alpha)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$, $d(0) \neq 0$. El sistema (3.3) tiene un punto fijo $(x_1, x_2) = (0, 0)$ para todo α , con matriz Jacobiana

$$A = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y valores propios $\mu_{1,2} = (1 + \alpha) \exp(\pm i\theta)$. Luego, el mapeo (3.3) es invertible cerca del origen para todo $|\alpha|$ pequeño. Más aún, cuando $\alpha = 0$, se tiene $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\theta)$, con $|\mu_{1,2}| = 1$; luego, el origen es un punto fijo no-hiperbólico.

Introduciendo una variable compleja $z = x_1 + ix_2$, y reescribiendo (3.3) en notación polar $z = \rho \exp(i\varphi)$, luego de un poco de operatoria obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho(1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2) + R_\alpha(\rho), \\ \varphi \mapsto \varphi + \theta(\alpha) + Q_\alpha(\rho), \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $R_\alpha(\rho) = O(\rho^4)$ y $Q_\alpha(\rho) = O(\rho^2)$ son funciones suaves de (ρ, α) . Notemos que el mapeo para ρ es independiente de ϕ y define un sistema dinámico con un punto fijo en $\rho = 0$ para todo α . Este punto fijo es estable si $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. En la transición, cuando $\alpha = 0$, la estabilidad del origen depende del signo del coeficiente $d(0)$. En lo que sigue, supongamos que $d(0) < 0$; en tal caso, el origen es un punto fijo estable no-hiperbólico si $\alpha = 0$. Además, si $\alpha > 0$, en una vecindad del origen, el mapeo para ρ posee otro punto fijo dado por

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} + O(\alpha). \quad (3.5)$$

Por continuidad, tenemos que $d(\alpha) < 0$ y ρ_0 es estable para todo $|\alpha|$ pequeño.

Por otro lado, el mapeo para φ describe una rotación por un ángulo que depende de φ y θ ; y es aproximadamente igual a $\theta(\alpha)$. Luego, al superponer los dos mapeos en ρ y φ , obtenemos el diagrama de bifurcación de la figura 3.10 para (3.3): Para $\alpha < 0$, el origen es un punto fijo atractor; las órbitas espiralean hacia $(0, 0)$. Para $\alpha > 0$ aparece un círculo invariante aislado de radio $\rho(\alpha)$ dado en (3.5). Esta curva invariante es única y atrayente. Decimos que el sistema pasa por una bifurcación Neimarck-Sacker supercrítica.

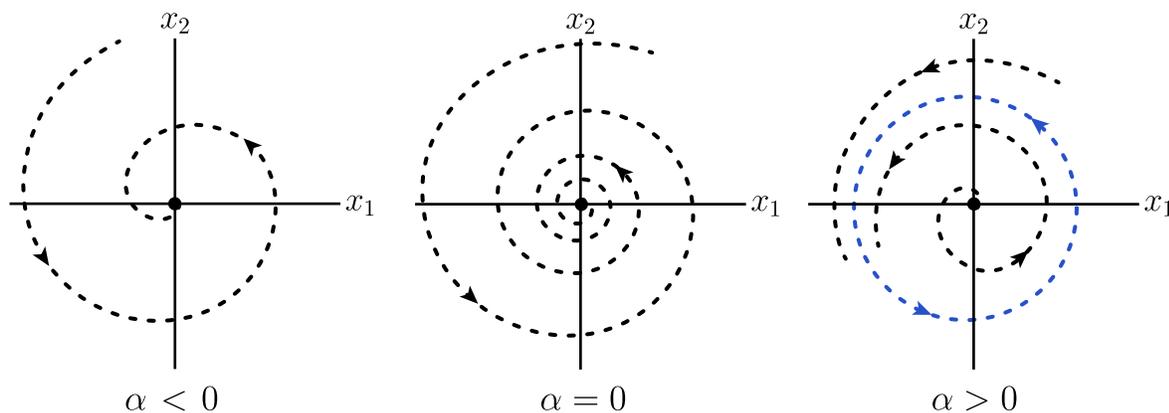


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación Neimarck-Sacker supercrítica ($d(0) < 0$).

El caso $d(0) > 0$ se puede analizar de la misma forma: Existe una curva invariante cerrada inestable que desaparece cuando α cruza el cero desde los valores negativos a los positivos como en la figura 3.11. En tal caso, uno habla de una bifurcación Neimarck-Sacker subcrítica.

Podemos pensar que (3.3) es una versión truncada de un mapeo que contiene términos de orden superior ($\|x\|^4$), los cuales dependen suavemente de α . En tal caso, sobre la curva invariante que se bifurca podrían haber puntos fijos y puntos periódicos. La existencia y estabilidad de estos puntos (i.e., el retrato de fase concreto del sistema restringido a la curva invariante) depende de estos términos de orden superior que no están presentes en (3.3). Por lo tanto, dos sistemas distintos exhibiendo una misma bifurcación Neimarck-Sacker podrían no ser topológicamente equivalentes. Este hecho impide obtener una forma normal para esta bifurcación. Sin embargo, de todas maneras podemos enunciar el siguiente teorema que nos asegura que estos términos ($\|x\|^4$) no afectan la bifurcación de la

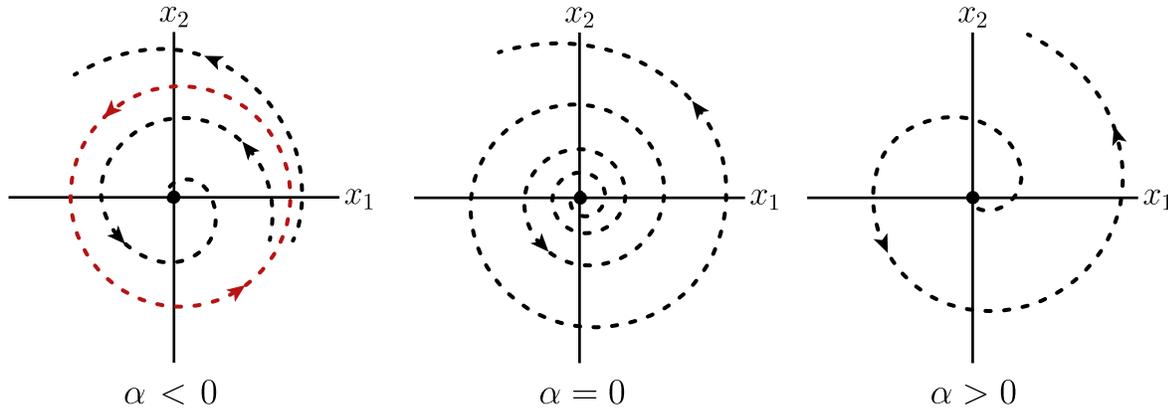


Figura 3.11: Diagrama de bifurcación Neimark-Sacker subcrítica ($d(0) > 0$).

curva cerrada invariante en (3.3). Es decir, una curva invariante localmente única siempre se bifurca del origen en la misma dirección y con la misma estabilidad que en (3.3).

Teorema 18 (*Bifurcación Neimark-Sacker*) *Consideremos un sistema dinámico bidimensional*

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

con f suave. Supongamos que para valores de μ cerca de μ^* el sistema posee un punto fijo $x(\mu)$ cuya coordenada depende de μ ; en particular, sea $x_0 = x(\mu^*)$ y expresemos los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x(\mu), \mu)$ en la forma

$$\mu_{1,2}(\mu) = r(\mu) \exp(\pm i\varphi(\mu)).$$

Además, suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $f(x_0, \mu^*) = x_0$;

(B2) $Df(x_0, \mu^*)$ tiene un par de multiplicadores complejos conjugados sobre el círculo unitario $\mu_{1,2}(\mu^*) = \exp(\pm i\theta_0)$, ($r(\mu^*) = 1, \varphi(\mu^*) = \theta_0$);

(G1) $\frac{d}{d\mu}r(\mu^*) \neq 0$;

(G2) $\exp(ik\theta_0) \neq 1$, para $k = 1, 2, 3, 4$.

Entonces, existe un cambio de coordenadas suave e invertible (difeomorfismo) y un cambio de parámetros suave e invertible que transforman el sistema, en una vecindad de (x_0, μ^*) , en

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (1+\alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4),$$

donde $\theta = \theta(\mu)$, $b = b(\mu)$ y $d = d(\mu)$ son funciones suaves; y $0 < \theta < \pi$. Más aún, $\theta(\mu^*) = \theta_0$ y $d(\mu^*) = \operatorname{Re}(\exp(-i\theta_0)c_1(\mu^*))$ (donde $c_1(\mu^*)$ posee una fórmula que puede buscarse en textos sobre bifurcaciones!)

Si además, $d(\mu^*) \neq 0$ (i.e., $c_1(\mu^*) \neq 0$), entonces, existe una vecindad de x_0 en la cual se bifurca una única curva cerrada invariante desde x_0 a medida que μ pasa por μ^* .

Ejemplo 31 El mapeo de Hénon se define como el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \alpha - \beta x - y^2 \end{pmatrix}.$$

Busquemos valores de parámetros (α, β) tales que ocurra alguna de las bifurcaciones estudiadas en esta sección (Omitiremos por ahora la verificación de las condiciones de genericidad, pero se sugiere su completación como tarea).

Los puntos fijos satisfacen $x = y$, $y = \alpha - \beta x - y^2$. Luego, todos los puntos fijos están sobre la recta $y = x$. Además, la coordenada y de un punto fijo satisface $y^2 + (1 + \beta)y - \alpha = 0$. Por lo tanto, el sistema posee a lo más dos puntos fijos.

La matriz Jacobiana del sistema viene dada por

$$A(x, y; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -2y \end{pmatrix}.$$

Para que ocurra una bifurcación silla-nodo se debe satisfacer $\det(A - I) = 0$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 . Así, A tendrá un valor propio 1. Esto nos lleva a la ecuación $1 + \beta + 2y = 0$. Luego, el sistema algebraico

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0, \\ 1 + \beta + 2y &= 0, \end{aligned}$$

en las incógnitas (α, β) nos da el conjunto de valores de (α, β) para los cuales hay una bifurcación silla-nodo. Al resolver obtenemos

$$T = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = -\frac{(1 + \beta)^2}{4} \right\},$$

la cual representa una curva en el plano (β, α) a lo largo de la cual existe un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = 1$.

Similarmente, la condición para la bifurcación flip se puede escribir como $\det(A + I) = 0$, la cual lleva a $1 + \beta - 2y = 0$. Luego, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y^2 + (1 + \beta)y - \alpha &= 0, \\ 1 + \beta - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando y , obtenemos que el mapeo tiene un punto fijo con multiplicador $\mu_1 = -1$ cuando los parámetros están en la curva

$$f = \left\{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{3(1 + \beta)^2}{4} \right\}.$$

Finalmente, para analizar la ocurrencia de una bifurcación Neimarck-Sacker, notemos que el producto de los multiplicadores de la forma $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm i\theta_0)$ es $\mu_1\mu_2 = 1 = \det(A)$, que es equivalente a la ecuación $1 - \beta = 0$. El diagrama de bifurcación resultante en el plano (β, α) muestra las tres curvas de bifurcación obtenidas.

Sin embargo, notemos que la curva de bifurcación Neimarck-Sacker está acotada por las curvas f y T , esto es,

$$NS = \{ (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = 1, -1 < \alpha < 3 \}.$$

La razón es que una bifurcación Neimarck-Sacker solo puede considerarse cuando *exista* un punto fijo. Luego, esto ocurre para valores de (β, α) arriba de la curva T , i.e., para $\alpha > -1$ si $\beta = 1$. Además, notemos que la condición $\mu_1\mu_2 = 1$ también es válida para multiplicadores reales de la forma $\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = \frac{1}{\nu}$, $|\nu| > 1$, $\nu \in \mathbb{R}$. En ese caso, el punto fijo sería de tipo silla y no podría pasar por una bifurcación Neimarck-Sacker. Esto impone la condición extra $\alpha < 3$ si $\beta = 1$.

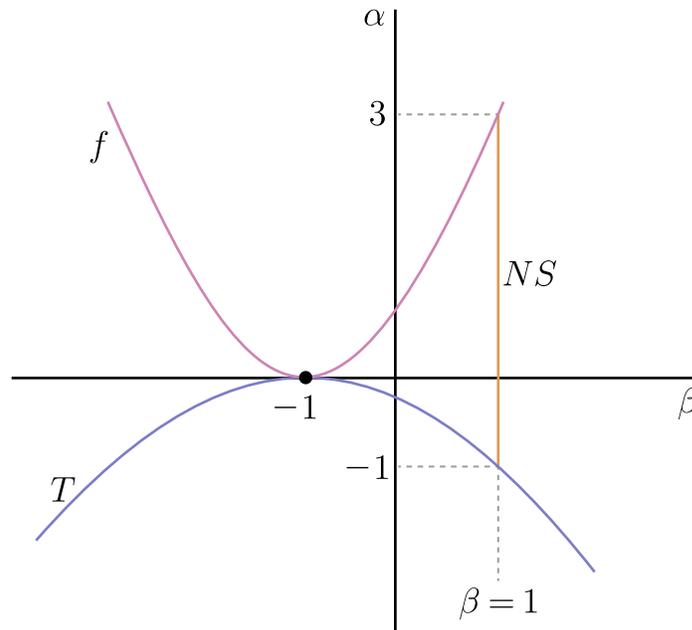


Figura 3.12: Diagrama de bifurcación del mapeo de Hénon.

3.5. Ejercicios

1. Considere la familia de mapeos cuadráticos $Q_c(x) = x^2 + c$, donde c es un parámetro.
 - a) Dibuje el diagrama de telaraña para $c > \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$, y $c < \frac{1}{4}$.
 - b) Determine la estabilidad de los puntos fijos para los valores de c en la parte (a).
2. Considere el mapeo *tent* (en inglés, “carpa” o “tienda”):

$$x \mapsto T(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Para las siguientes preguntas considere $\mu = 2$:

- a) Haga bosquejos de la gráfica de $T(x)$ y de la segunda iteración $T^2(x)$. Incluya la diagonal en sus bosquejos.

- b) Encuentre los puntos fijos y los puntos de período 2 y determine su estabilidad.
- c) Dibuje el diagrama de “telaraña” para la condición inicial $x_0 = \frac{1}{20}$ para ambos mapeos $T(x)$ y $T^2(x)$.
- d) Escriba las órbitas para las condiciones iniciales $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{7}$, $x_0 = \frac{1}{9}$, $x_0 = \frac{1}{11}$. En cada caso, determine si ha encontrado o no un punto periódico, y si es así, cuál es su período.
3. Calcule órbitas para $x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y bosquejelas en el plano. Muestre que $(0, 0)$ es asintóticamente estable en el primer caso, mientras que es inestable en el segundo caso.

4. El sistema dinámico definido por

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{3}$$

tiene tres puntos fijos denotados a, b, c , donde

$$-2 < a < -1, \quad 0 < b < 1, \quad 1 < c < 2.$$

- a) Pruebe que $x_n \rightarrow -\infty$ para $n \rightarrow \infty$, para todo $x_0 < a$.
- b) Pruebe que $x_n \rightarrow b$ para $n \rightarrow \infty$, para todo $x_0 \in]a, c[$.
- c) Pruebe que $x_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$, para todo $x_0 > c$.
5. a) Sea p un punto fijo hiperbólico de un mapeo de clase C^1 dado por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ con $|f'(p)| < 1$. Sin recurrir el teorema de Hartman-Grobman, demuestre que existe un intervalo abierto U alrededor de p tal que si $x \in U$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

- b) Escriba un enunciado análogo a la propiedad demostrada en el item (a) para puntos periódicos hiperbólicos de f de período n . ¿Qué hipótesis deben modificarse?

6. Desarrolle una clasificación similar al ejemplo 29 para el mapeo bidimensional hiperbólico $x \mapsto Bx$ con

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Trabaje en términos de los valores propios de B .

7. Considere los siguientes sistemas dinámicos discretos **bidimensionales**:

a) $f : (x, y) \mapsto (x^2, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $g : (\theta_1, \theta_2) \mapsto (\sin \theta_1, \theta_1), (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

c) $h : (x, y) \mapsto \left(\frac{x + y}{2}, \sqrt{xy} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Encuentre todos los puntos fijos y discuta su estabilidad.

8. Encuentre condiciones sobre α tales que el origen sea un atractor, repulsor o punto silla del mapeo

$$(x, y) \mapsto \left(y, \frac{\alpha x}{1 + \beta y^2} \right), \quad \beta > 0.$$

9. Considere el espacio $\text{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r , invertibles, y con f^{-1} de clase C^r (es decir, f es un C^r -difeomorfismo), con $r \geq 1$. Sea el sistema dinámico discreto

$$x \mapsto f(x)$$

definido por $f \in \text{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ con un punto fijo x^* .

Suponga que para toda vecindad $V \subset \text{Dif}^r(\mathbb{R}^n)$ de f suficientemente pequeña se cumple que el sistema dinámico

$$y \mapsto g(y)$$

generado por **cualquier** $g \in V$ es **localmente topológicamente conjugado** a f . Es decir, el retrato de fase de f cerca de x^* es cualitativamente equivalente al retrato de fase de g cerca de su punto fijo y^* , **para todo** $g \in V$.

Demuestre que x^* es un punto fijo hiperbólico.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo de clase C^2 , con $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, y tal que se cumplen las siguientes propiedades: (a) $f_1(0, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$; (b) $f_2(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; (c) $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) > 0$; (d) Si $\alpha(x) := f_1(x, 0)$, entonces $\alpha'(0) = \frac{2}{5}$ y $\alpha''(0) \neq 0$. Demuestre que f es **localmente conjugado** al difeomorfismo

$$g : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{3} + x^2, 2y \right).$$

11. Considere el sistema dinámico discreto $x \mapsto f(x)$, donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Sea $x^* \in \mathbb{R}$ un punto k -periódico con órbita $\mathcal{O}(x^*) = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{k-1}(x^*)\}$.

a) Demuestre que $\mathcal{O}(x^*)$ es asintóticamente estable si

$$|f'(x^*)f'(f(x^*)) \cdots f'(f^{k-1}(x^*))| < 1.$$

b) Demuestre que $\mathcal{O}(x^*)$ es inestable si

$$|f'(x^*)f'(f(x^*)) \cdots f'(f^{k-1}(x^*))| > 1.$$

c) Considere el mapeo $x \mapsto 1 - x^2$ definido en $x \in [-1, 1]$. Encuentre todos los 2-ciclos y determine su estabilidad.

12. Construya explícitamente un sistema dinámico discreto en \mathbb{R} para cada uno de los siguientes casos:

a) Con cuatro puntos fijos, todos ellos inestables.

b) Sin ningún punto fijo.

c) Con un punto fijo estable y otro inestable.

d) Con dos puntos fijos inestables y una órbita 2-periódica estable.

13. Investigue la dinámica del mapeo $x \mapsto x + c$, con $x \in \mathbb{S}^1$ y para distintos valores de $c \in \mathbb{R}$. Considere los casos en que c es un número racional o irracional.

14. Sea x^* un punto periódico hiperbólico del difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x)$, con órbita periódica (discreta) $\gamma = \{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{q-1}(x^*)\}$ de período q . La variedad estable $W^s(\gamma)$ de γ se define como

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{i=0}^{q-1} W^s(f^i(x^*)),$$

donde $W^s(f^i(x^*))$ es la variedad estable del punto fijo $f^i(x^*)$ de f^q .

- a) Demuestre que si $y \in W^s(\gamma)$, entonces

$$\gamma \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z} \text{ con } n_k \rightarrow \infty, \text{ tal que } f^{n_k}(y) \rightarrow x\}.$$

(Este conjunto se conoce como $\omega(y)$, el ω -límite de y .)

- b) Escriba un enunciado análogo al ítem (a) considerando variedades inestables en lugar de estables.

15. Encuentre el diagrama de bifurcación en el plano (λ, y) de la forma normal $y \mapsto \lambda + y - y^2$ de la bifurcación silla-nodo, determinando todos los retratos de fase no equivalentes. ¿Cómo se compara con la forma normal $y \mapsto \lambda + y + y^2$?
16. Considere la aplicación unidimensional

$$x \mapsto F_c(x) = x(1 - x) + c,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

- a) Encuentre los puntos fijos de $F_c(x)$ y demuestre que $F_c(x)$ sólo posee un punto fijo atractor para $c \in (0, 1)$.
- b) Encuentre un polinomio de la forma $P_c(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (con coeficientes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ por determinar) tal que

$$P_c(x)(F_c(x) - x) = F_c(F_c(x)) - x,$$

para todo x .

- c) Encuentre una órbita $\{p_1, p_2\}$ de período 2 y demuestre que es atractora para $c \in (1, \frac{3}{2})$.

d) Bosqueje el diagrama de bifurcación en el plano (c, x) en un rango que incluya **una vecindad del intervalo** $c \in [0, \frac{3}{2}]$. Identifique claramente los **puntos de bifurcación**.

17. ¿Cuántos puntos fijos y puntos periódicos puedes encontrar para los siguientes mapeos 1D y 2D? Discuta su estabilidad. Haga variar el parámetro μ sobre los rangos indicados. ¿Puedes hallar valores de “bifurcación” de μ en los cuales aparezcan nuevos puntos periódicos?

a) $x \mapsto \mu x(1 - x)$; $\mu \in [0, 4]$.

b) $(x, y) \mapsto (y, -\frac{1}{2}x + \mu y - y^3)$; $\mu \in [2, 4]$.

18. Estudie el sistema dinámico a tiempo discreto en el eje real \mathbb{R}

$$x \mapsto f(x) := -(1 + \lambda)x - (3 + \lambda)x^2,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro con $|\lambda| \approx 0$.

- (a) Ocupando el teorema de Hartman-Grobman (cuando sea posible), determine la estabilidad del punto fijo en $x_0 = 0$ en función de λ .
- (b) Encuentre un punto fijo no trivial de f .
- (c) Muestre que el valor de la constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f^2(x) = x + x \left(x - \frac{-(\lambda + 2)}{\lambda + 3} \right) \left(-(\lambda + 3)^2 x^2 - \lambda(\lambda + 3)^2 x + c \right)$$

debe ser $c = \lambda(\lambda + 3)$.

- (d) Verifique que f exhibe una bifurcación flip en $x_0 = 0$ para un valor λ^* por determinar. ¿Para qué valores de λ existen las órbitas de período 2 y cuál es su estabilidad?

19. Muestre que el mapeo $x \mapsto \mu - x^2$ pasa por una bifurcación silla-nodo genérica en $(x, \mu) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$. ¿A qué lado del valor de bifurcación $\mu = -\frac{1}{4}$ existen los puntos fijos?

20. Verifique que el mapeo $x \mapsto -(1 + \mu)x + x^2 + \beta x^3$ puede pasar por bifurcaciones flip tanto sub- como supercrítica, dependiendo del valor de β .

21. Encuentre condiciones para que el mapeo $(x, y) \mapsto (y, \mu y(1 - x))$ pase por una bifurcación Neimarck-Sacker en algún punto (μ^*, x_0, y_0) por determinar.

22. Encuentre una bifurcación silla-nodo y una bifurcación flip para el sistema a tiempo discreto

$$x \mapsto f_a(x) = a \sin(x),$$

donde $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ y $a \in \mathbb{R}$. Verifique las condiciones de genericidad en cada caso.

23. Estudie el sistema dinámico a tiempo discreto en el eje real \mathbb{R}

$$x \mapsto f(x, \lambda) := -\frac{\lambda}{2} \arctan(x),$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro real.

a) Muestre mediante algún método gráfico que el sistema posee un único punto fijo $x = x_0$ y que debe pasar por una bifurcación para algún $\lambda^* \in [1, 3]$. ¿De qué bifurcación se trata?

b) Encuentre los valores (x_0, λ^*) del candidato para la bifurcación en (a).

c) Verifique las condiciones de genericidad en (x_0, λ^*) para esta bifurcación.

d) Mediante algún método o argumento analítico, determine la estabilidad de los conjuntos invariantes que se bifurcan en $\lambda = \lambda^*$ (es decir, aquellos objetos que aparecen/desaparecen en la bifurcación).

e) Bosqueje el diagrama de bifurcación en el plano (λ, x) en una vecindad de (λ^*, x_0) .

24. Considere el **modelo logístico con retardo** dado por la aplicación

$$F_\alpha : (x, y) \mapsto (\alpha x(1 - y), x),$$

con $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Demuestre que en una vecindad de un punto fijo (x^*, y^*) **no trivial**, y para valores del parámetro α suficientemente cercanos a $\alpha^* = 2$, existe un cambio de coordenadas y de parámetros $(x, y, \alpha) \mapsto (u, v, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, suave e invertible, que transforma el sistema F_α en otro equivalente, el cual, en notación compleja $z = u + iv \in \mathbb{C}$, posee la forma $z \mapsto \mu(\alpha)z + c(\alpha)z|z|^2$, donde $\mu(\alpha) = (\alpha - 1)e^{i\theta(\alpha)}$ y $c(\alpha) = D(\alpha)e^{i\theta(\alpha)}$, con $D(\alpha) \in \mathbb{C}$.

Capítulo 4

Del campo de vectores a la aplicación de Poincaré

Consideremos un sistema dinámico continuo definido por

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

con $f \in C^k$, $k \geq 1$. Supongamos que (4.1) posee una órbita periódica L_0 . Para analizar qué está ocurriendo en una vecindad de L_0 (¿el ciclo es atractor, repulsor, o ninguna de las anteriores? ¿Qué bifurcaciones puede sufrir L_0 al variar un parámetro del sistema?), *reducimos la dimensión* del problema. Sea $x_0 \in L_0$ y definamos una sección transversal Σ al ciclo en el punto x_0 como en la figura 4.1. El conjunto Σ es una hipersuperficie suave de dimensión $n - 1$ intersectando L_0 en un ángulo no-nulo. Decimos que Σ posee *codimensión 1*, y escribimos $\text{codim}(\Sigma) = 1$. Por ejemplo, supongamos que Σ está definida cerca de x_0 como conjunto de nivel cero de una función escalar suave $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_0) = 0$, es decir,

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = g^{-1}(0).$$

Dado que $f(x_0)$ es un vector tangente a L_0 en x_0 , el ángulo de intersección no-nulo de Σ con L_0 implica que

$$\langle \nabla g(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto euclidiano en \mathbb{R}^n . Es decir, la función g posee una tasa de cambio no-nula en la dirección del campo f en x_0 . Notemos que, en caso contrario, L_0 y Σ serían tangentes en x_0 .

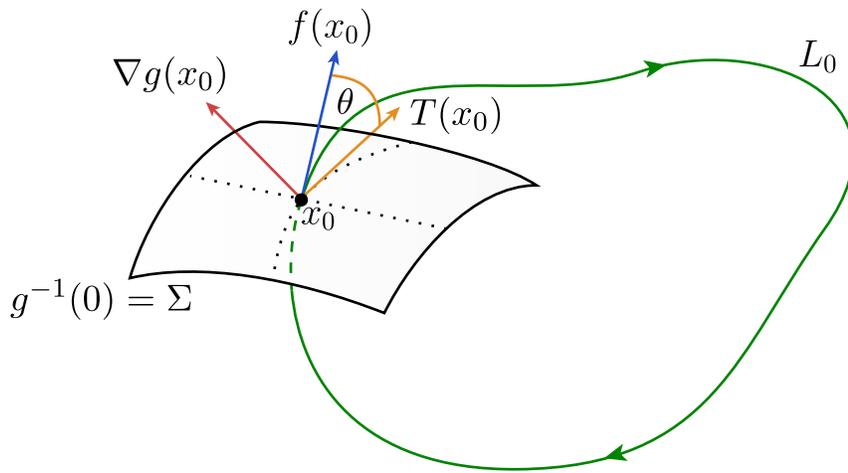


Figura 4.1: Sección transversal Σ a la órbita periódica L_0 en el punto x_0 .

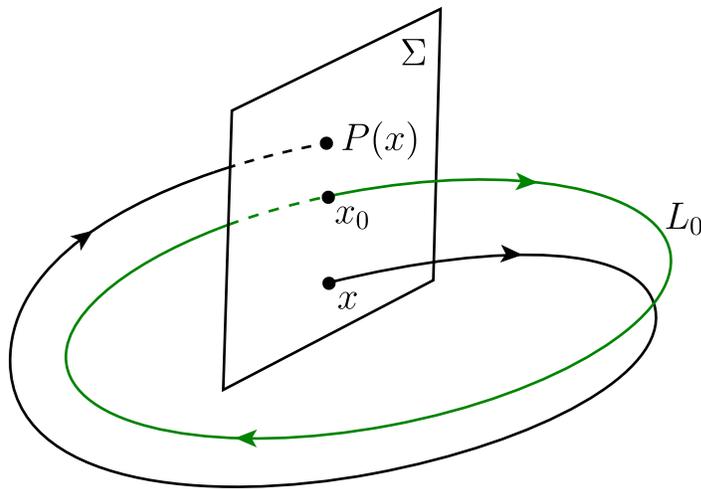


Figura 4.2: Aplicación de retorno de Poincaré.

La elección más simple de Σ satisfaciendo estas condiciones es un hiperplano ortogonal al ciclo L_0 en x_0 . Tal elección viene dada por el conjunto de nivel cero de la función lineal

$$g(x) = \langle f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

Por la dependencia suave de las órbitas con respecto a sus condiciones iniciales,

una órbita que empieza en un punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_0 también regresa por primera vez a Σ en algún punto $\tilde{x} \in \Sigma$ cerca de x_0 . Más aún, órbitas cercanas también intersectan Σ transversalmente como en la figura 4.2. De esta manera, construimos el mapeo

$$\begin{aligned} P : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto P(x) = \tilde{x}, \end{aligned}$$

donde $P(x) = \tilde{x}$ es el primer retorno de la órbita que pasa por x a la sección Σ . De esta manera, obtenemos una correspondencia exacta entre la dinámica n -dimensional de (4.1) en una vecindad de L_0 y la aplicación $(n - 1)$ -dimensional P definida en la sección de Poincaré. Luego, en vez de considerar las órbitas del campo de vectores, podemos estudiar las órbitas de puntos en Σ bajo iteración de P . ¡Ésta es una de las técnicas más importantes en la teoría de sistemas dinámicos!

Definición 20 *El mapeo P se llama la **aplicación de retorno de Poincaré** asociada al ciclo L_0 .*

Proposición 3 *El mapeo P es un C^k -difeomorfismo local cerca de x_0 .*

RAZÓN. $P(x)$ es la imagen del punto x bajo el flujo $\Phi^t(\cdot)$ del campo f después de un *tiempo de vuelo* $\tau(x) > 0$, luego tiene el mismo grado de diferenciabilidad que f . La existencia y diferenciabilidad de P^{-1} se obtiene de la invertibilidad del flujo Φ^t . Achicando la sección Σ de ser necesario, el mapeo $P^{-1} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ se puede construir al extender las órbitas que cruzan Σ para $t < 0$ hasta alcanzar su intersección previa con Σ . ■

Proposición 4 *El mapeo P tiene un punto fijo en $x_0 \in L_0$, es decir, $P(x_0) = x_0$.*

4.1. Estabilidad de órbitas periódicas

A continuación estudiaremos cómo la estabilidad del punto fijo x_0 del sistema discreto P determina la estabilidad del ciclo L_0 del sistema continuo (4.1).

Sean $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ coordenadas locales en $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\xi = 0$ corresponde a $x_0 \in L_0$. Entonces, el mapeo de Poincaré P queda caracterizado por un mapeo local $(n-1)$ -dimensional

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \\ \xi &\mapsto P(\xi), \end{aligned}$$

que transforma el punto ξ (correspondiente a $x \in \Sigma$) en el punto $P(\xi) = \tilde{\xi}$ (correspondiente a \tilde{x}). De esta forma, el punto $\xi^* = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ es un punto fijo de P . Sea v_0 una perturbación infinitesimal tal que $\xi^* + v_0 \in \Sigma$. Luego, después del primer retorno a Σ se tiene

$$\begin{aligned} \xi^* + v_1 &= P(\xi^* + v_0) \\ &= P(\xi^*) + DP(\xi^*)v_0 + O(\|v_0\|^2), \end{aligned}$$

donde $DP(\xi^*)$ es la matriz jacobiana de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ de P en ξ^* . Dado que $\xi^* = P(\xi^*)$, obtenemos

$$v_1 = DP(\xi^*)v_0$$

al descartar los términos pequeños $O(\|v_0\|^2)$.

Ahora considere el caso genérico donde no hay valores propios repetidos. Entonces existe una base de vectores propios (generalizados) $\{e_j\}$ y podemos escribir $v_0 = \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j$ para ciertos escalares a_j . Luego,

$$v_1 = DP(\xi^*) \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \mu_j e_j,$$

donde

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$$

son los valores propios de la matriz jacobiana $DP(\xi^*)$. Iterando k veces el mapeo linealizado $x \mapsto DP(\xi^*)x$ nos da

$$v_k = \sum_{j=1}^{n-1} a_j (\mu_j)^k e_j.$$

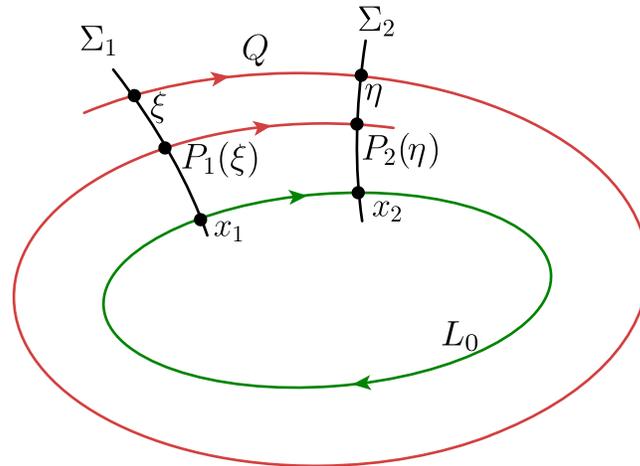


Figura 4.3: La estabilidad del ciclo L_0 es independiente de la elección de la sección transversal.

Luego, si todos los valores propios $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ se ubican dentro del círculo unitario, entonces $\|v_k\| \rightarrow 0$ a una tasa geométrica. Luego, el punto ξ^* es estable y la órbita periódica L_0 es atractora. En cambio, si $|\mu_j| > 1$ para algún j , entonces las perturbaciones en la dirección del vector e_j crecen y el ciclo L_0 es inestable.

De esta manera, el mapeo de Poincaré transforma problemas sobre órbitas cerradas en problemas sobre puntos fijos de un mapeo.

Lema 1 *Los multiplicadores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ de la matriz $DP(\xi^*)$ del mapeo de Poincaré P asociado al ciclo L_0 son independientes de la elección del punto x_0 en L_0 , de la sección transversal Σ , y de las coordenadas locales en Σ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean Σ_1, Σ_2 dos secciones transversales al mismo ciclo L_0 en los puntos $x_1, x_2 \in L_0$, respectivamente. En caso de que $x_1 = x_2$, podemos suponer que las secciones $\Sigma_{1,2}$ representan superficies idénticas en \mathbb{R}^n que sólo difieren en su parametrización.

Sean $P_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ y $P_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ los correspondientes mapeos de Poincaré. Escojamos $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ coordenadas locales en Σ_1 , y sean $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ coordenadas locales en Σ_2 tales que $\xi = 0$ corresponde a x_1 y $\eta = 0$ corresponde a x_2 como en la figura 4.3. Finalmente denotemos por $A_1 = DP_1(0)$ y $A_2 = DP_2(0)$ a las respectivas matrices jacobianas.

Entonces existe un mapeo $Q : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, definido localmente, suave e invertible, a lo largo de órbitas del campo vectorial f de manera que $\eta = Q(\xi)$. Claramente

se tiene $P_2 \circ Q = Q \circ P_1$, o en coordenadas locales, $P_2(Q(\xi)) = Q(P_1(\xi))$, para todo ξ con $\|\xi\|$ suficientemente pequeño. Como Q es invertible, obtenemos la siguiente relación entre P_1 y P_2 :

$$P_1 = Q^{-1} \circ P_2 \circ Q.$$

Diferenciando esta igualdad con respecto a ξ y usando la regla de la cadena:

$$\frac{dP_1}{d\xi} = \frac{dQ^{-1}}{d\eta} \frac{dP_2}{d\eta} \frac{dQ}{d\xi},$$

donde esta notación de *derivadas* en rigor representa matrices jacobianas de los tamaños correspondientes. Evaluando en $\xi = 0$ nos da la ecuación matricial:

$$A_1 = B^{-1} A_2 B,$$

donde $B = \left. \frac{dQ}{d\xi} \right|_{\xi=0}$ es una matriz no-singular.

Luego las ecuaciones características de A_1 y A_2 coinciden, al igual que sus valores propios. En efecto:

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \mu I_n) &= \det(B^{-1} A_2 B - \mu B^{-1} I_n B) \\ &= \det(B^{-1} (A_2 - \mu I_n) B) \\ &= \det(B^{-1}) \det(A_2 - \mu I_n) \det(B) \\ &= \det(A_2 - \mu I_n). \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

Ejemplo 32 Considere el campo de vectores en \mathbb{R}^2 dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

y la sección transversal

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}.$$

Transformando el sistema a coordenadas polares obtenemos

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde la sección

$$\Sigma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : r > 0, \theta = 0\}.$$

queda parametrizada por $r > 0$. (En otras palabras, la variable r define un sistema de coordenadas locales en Σ).

Resolviendo (4.2) obtenemos el flujo global

$$\Phi^t(r, \theta) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-\frac{1}{2}}, t + \theta \right).$$

Sea $(r, 0) \in \Sigma$ una condición inicial. Sea τ el *tiempo de vuelo* que le toma a la órbita que parte en $(r, 0)$ en volver por primera vez a Σ . Luego, τ satisface

$$\Phi^\tau(r, 0) = (P(r), 0),$$

donde $P(r)$ es la componente radial del flujo después de τ unidades de tiempo. Dado que $\dot{\theta} = 1$, el primer retorno a Σ ocurre después de $\tau = 2\pi$. Luego, el mapeo de Poincaré viene dado por la componente radial del flujo $\Phi^{2\pi}(r, 0)$ dado por:

$$P(r) = \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Alternativamente, podemos hallar $r_1 = P(r_0)$ al resolver

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Claramente P tiene un punto fijo en $r = 1$, la cual corresponde a una órbita cerrada circular

$$L_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

en coordenadas cartesianas. La linealización de P en $r = 1$ viene dada por

$$\begin{aligned} DP(1) &= \left. \frac{dP}{dr} \right|_{r=1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2e^{-4\pi}}{r^3} \right) \Big|_{r=1} \\ &= e^{-4\pi} < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $r = 1$ es un punto fijo hiperbólico atractor de P y la órbita periódica L_0 es atractora.

Otra opción alternativa para determinar la estabilidad de L_0 es considerar el *flujo linealizado* cerca de la órbita cerrada $r = 1$. En efecto, dado que $\frac{d}{dr}(\dot{r}) = \frac{d}{dr}(r - r^3) = 1 - 3r^2$, al evaluar en $r = 1$ obtenemos $\frac{d}{dr}(\dot{r})|_{r=1} = -2$. Así tenemos el sistema lineal:

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= -2\xi, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

cuyo flujo corresponde a $D\Phi^t(\xi, \theta) = (e^{-2t}\xi, t + \theta)$. El mapeo de Poincaré en Σ asociado a este flujo linealizado es $P_L(\xi) = e^{-4\pi}\xi$. De esta manera, $DP_L(0) = e^{-4\pi}$.

4.2. Teoría de Floquet

En general, existe una relación entre mapeos de Poincaré y flujos linealizados, o equivalentemente, entre los multiplicadores de un ciclo y la EDO a la que está asociada.

Sea $x^0(t)$ una solución periódica de (4.1), con $x^0(t+T) = x^0(t)$, correspondiente a un ciclo L_0 de período T . Sea $x(t) = x^0(t) + u(t)$ otra solución de (4.1), donde $u(t)$ es una desviación o perturbación de la solución periódica. Luego:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}^0(t) \\ &= f(x^0(t) + u(t)) - f(x^0(t)) \\ &= A(t)u(t) + O(\|u(t)\|^2), \end{aligned}$$

donde $A(t) = Df(x^0(t))$ es la matriz jacobiana de f evaluada a lo largo de la solución $x^0(t)$.

Truncando los términos cuadráticos y de orden superior obtenemos el sistema lineal T -periódico:

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (4.3)$$

donde $A(t+T) = A(t)$.

Definición 21 *El sistema (4.3) se llama la **ecuación variacional** de (4.1) alrededor del ciclo L_0 .*

La ecuación variacional es la parte principal (lineal) del sistema gobernando la evolución de perturbaciones cerca del ciclo L_0 . La estabilidad del ciclo depende de las propiedades de la ecuación variacional.

Se puede demostrar que cualquier solución fundamental de este sistema T -periódico puede escribirse de la forma

$$X(t) = Z(t)e^{tR},$$

donde X , Z y R son matrices $n \times n$, y $Z(t) = Z(t+T)$. En particular, escogemos $X(0) = Z(0) = Id$, de modo que

$$X(T) = Z(T)e^{TR} = Z(0)e^{TR} = e^{TR}.$$

Por lo tanto, el comportamiento de soluciones en la vecindad de L_0 queda determinado por los valores propios de la matriz constante e^{TR} . Estos valores propios μ_1, \dots, μ_n se llaman **multiplicadores de Floquet**. En particular, uno de estos multiplicadores, digamos μ_n , está asociado con perturbaciones *a lo largo de* L_0 y, por ende, siempre es $\mu_n = 1$.

Supongamos que escogemos una base de \mathbb{R}^n tal que la última columna de la matriz e^{TR} es $(0, \dots, 0, 1)^t$. Luego, se puede probar que la matriz DP de la linealización del mapeo de Poincaré es simplemente aquella matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar la fila n -ésima y la columna n -ésima de e^{TR} , esto es:

$$e^{TR} = \begin{pmatrix} & 0 \\ DP & \vdots \\ & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los primeros $n-1$ multiplicadores de Floquet son los valores propios (o multiplicadores) del mapeo de Poincaré (!).

COMENTARIOS.

1. Aunque la matriz R no está únicamente determinada por las soluciones de (4.3), los valores propios de e^{TR} quedan únicamente determinados. De hecho, la matriz e^{TR} puede reemplazarse por cualquier matriz similar de la forma $C^{-1}e^{TR}C$.

2. Para calcular estos valores propios aún necesitamos *alguna* representación de e^{TR} . Esto sólo se puede obtener al generar un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (4.3) para formar la matriz fundamental $X(t)$.
3. Las aplicaciones de retorno de Poincaré también son usadas para estudiar las propiedades de otros objetos invariantes como, por ejemplo, conjuntos caóticos y atractores extraños.

4.3. Variedades invariantes de órbitas periódicas

Consideremos ahora una órbita periódica γ del sistema continuo (4.1) y sea U una vecindad tubular de γ . Entonces definimos las variedades invariantes de γ en forma análoga como

$$W_{\text{loc}}^s(\gamma) = \{x \in U : |\Phi^t(x) - \gamma| \longrightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \text{ y } \Phi^t(x) \in U, \forall t \geq 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(\gamma) = \{x \in U : |\Phi^t(x) - \gamma| \longrightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty, \text{ y } \Phi^t(x) \in U, \forall t \leq 0\}.$$

Sea $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ la aplicación de retorno de Poincaré para γ , definida localmente sobre alguna sección transversal $(n - 1)$ -dimensional Σ , con $\gamma \cap \Sigma = \{p\}$. Sabemos que la estabilidad del punto fijo p refleja aquella del ciclo γ . Supongamos que p es un punto fijo hiperbólico de P y que la matriz jacobiana $DP(p)$ posee $n_s > 0$ valores propios con módulo menor que 1 y $n_u > 0$ valores propios con módulo mayor que 1, de manera que $n_s + n_u = n - 1$. Entonces, en términos del mapeo discreto P , el punto fijo p posee variedades invariantes $W^s(p)$ y $W^u(p)$ con $\dim W^s(p) = n_s$ y $\dim W^u(p) = n_u$.

Notemos que las órbitas de P que están en $W^s(p)$ están formadas por intersecciones de órbitas del flujo Φ^t con la sección Σ como se muestra en la figura 4.4. Luego, estas órbitas que intersectan Σ en puntos de $W^s(p)$ corresponden a órbitas que convergen al ciclo γ . Por lo tanto, estas órbitas que contienen puntos en $W^s(p)$ están en la variedad estable $W^s(\gamma)$ de γ correspondiente al campo de vectores f . En consecuencia, se tiene

$$W^s(\gamma) \cap \Sigma = W^s(p)$$

y por lo tanto

$$\dim W^s(\gamma) = n_s + 1.$$

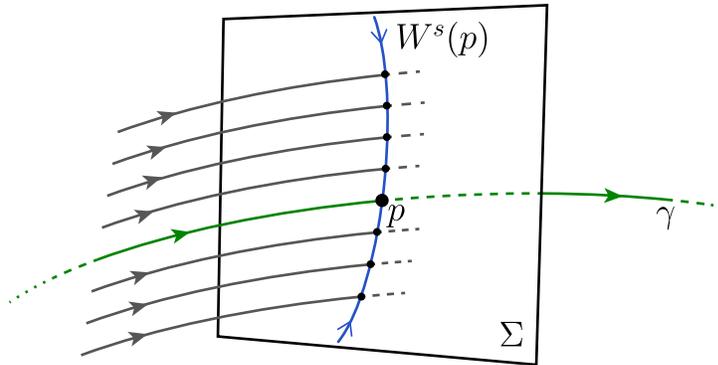


Figura 4.4: Las órbitas del flujo Φ^t que intersectan Σ en puntos de $W^s(p)$ corresponden a órbitas que convergen al ciclo γ .

Por un razonamiento análogo, se tiene:

$$W^u(\gamma) \cap \Sigma = W^u(p),$$

con

$$\dim W^u(\gamma) = n_u + 1;$$

ver figura 4.5.

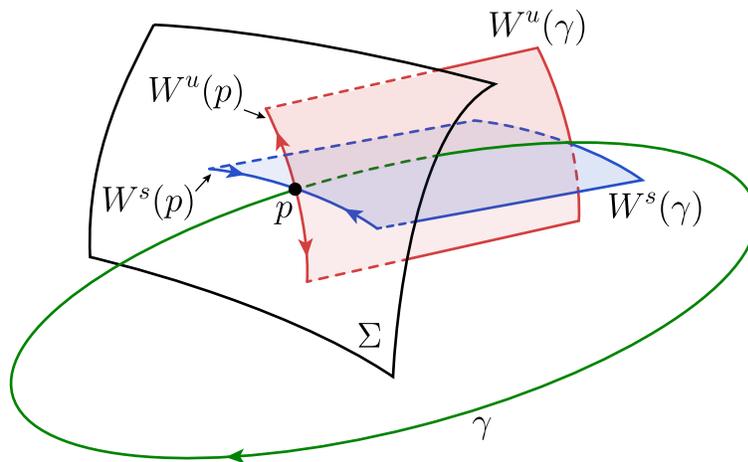


Figura 4.5: Las variedades invariantes del punto fijo p en la aplicación de retorno de Poincaré corresponden a la intersección de las respectivas variedades invariantes del ciclo γ y la sección Σ .

4.4. Bifurcaciones de órbitas periódicas

Las órbitas periódicas también pueden pasar por bifurcaciones. En este caso, podemos aplicar los resultados conocidos de bifurcaciones de puntos fijos de sistemas discretos al mapeo de Poincaré asociado. Sea L_0 una órbita periódica aislada del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

para $\alpha = 0$. Sea P_α la aplicación de retorno de Poincaré para $|\alpha|$ pequeño:

$$P_\alpha : \Sigma \longrightarrow \Sigma,$$

donde Σ es una sección transversal local a L_0 . Recordemos que el mapeo P_α es suave y localmente invertible para $|\alpha|$ pequeño. Por simplicidad, fijemos $n = 3$ y consideremos las principales bifurcaciones del ciclo L_0 : Estas bifurcaciones vendrán dadas por bifurcaciones de puntos fijos de P_α .

4.4.1. Bifurcación silla-nodo de ciclos

Dos ciclos, uno estable y otro inestable, colisionan y desaparecen. Supongamos que para $\alpha = 0$, L_0 tiene un multiplicador simple $\mu_1 = 1$. Por simplicidad, asumamos que $0 < \mu_2 < 1$. Entonces, P_α sufre una bifurcación Silla-Nodo en el punto fijo asociado a L_0 en $\alpha = 0$. Esto implica la “colisión” y “desaparición” de dos puntos fijos de P_α a medida que α pasa por cero. Pero cada punto fijo representa una órbita periódica del campo vectorial.

De esta forma, se tiene el siguiente diagrama de bifurcación de la figura 4.6. Si $\alpha < 0$, hay 1 ciclo hiperbólico estable L_1 y un ciclo hiperbólico silla L_2 . Cuando $\alpha = 0$, solamente hay 1 ciclo no-hiperbólico L_0 . Y para $\alpha > 0$: No hay órbitas periódicas.

4.4.2. Bifurcación period-doubling de órbitas periódicas

Un ciclo estable se vuelve inestable y queda rodeado por un ciclo del doble de período. Supongamos que para $\alpha = 0$, L_0 tiene un multiplicador simple $\mu_1 = -1$. Por simplicidad, asumamos que $-1 < \mu_2 < 0$. Entonces, P_α sufre una bifurcación

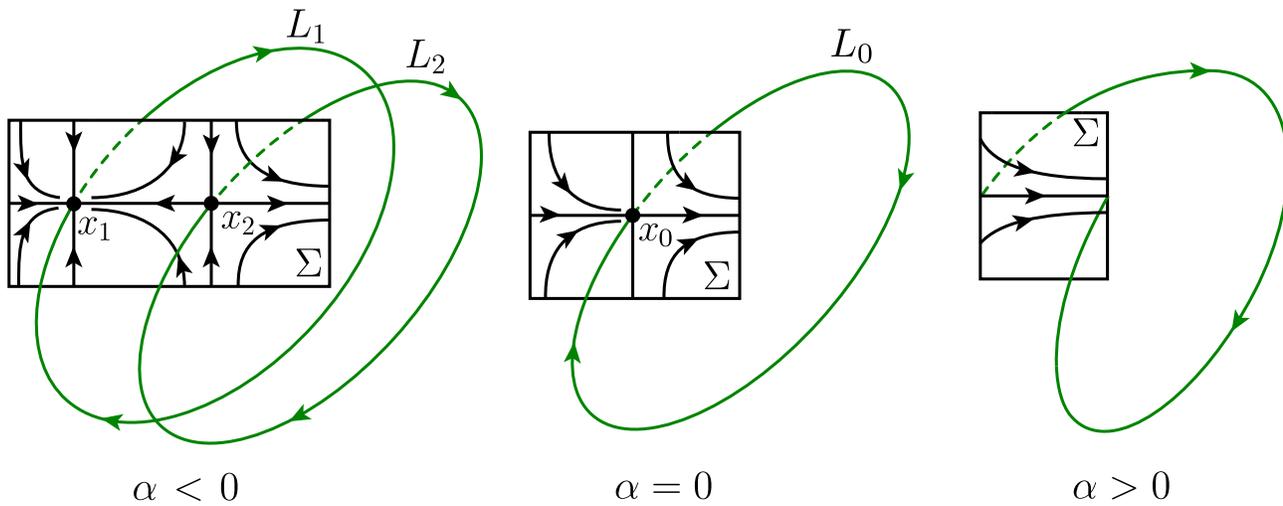


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación silla-nodo de ciclos.

flip en el punto fijo asociado a L_0 en $\alpha = 0$. Luego, un ciclo de período 2 aparece en P_α , y el punto fijo cambia su estabilidad a medida que α pasa por cero. El diagrama de bifurcación que emerge es el de la figura 4.7.

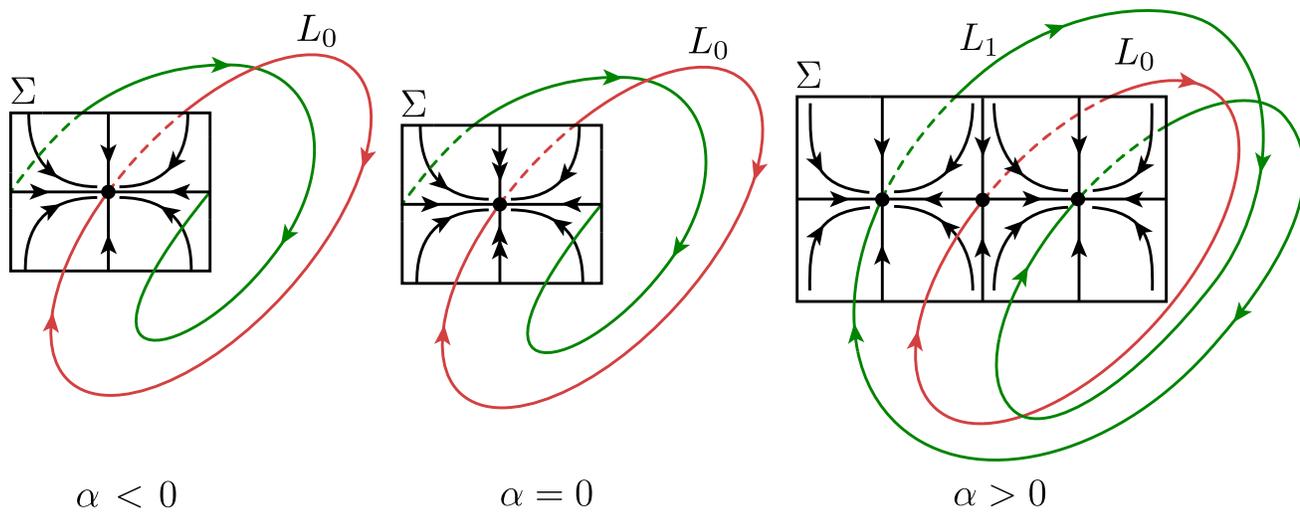


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación period-doubling de ciclos.

Esta bifurcación flip del mapeo de Poincaré se manifiesta en el campo de vectores de la siguiente manera. Para $\alpha < 0$ hay 1 ciclo hiperbólico estable L_0 de período T . Cuando $\alpha = 0$ este ciclo se vuelve no-hiperbólico. Y cuando $\alpha > 0$

hay 2 ciclos hiperbólicos: L_0 es un ciclo silla de período T ; y L_1 es estable con un período $\approx 2T$. El escenario de bifurcación exacto (i.e. súper, o subcrítica) queda determinado por los coeficientes de la forma normal de la bifurcación flip de P_α en $\alpha = 0$.

4.4.3. Bifurcación de toro de órbitas periódicas

El fenómeno que ocurre al pasar por la bifurcación es el siguiente: Un ciclo estable se vuelve inestable y queda rodeado por un toro invariante. Supongamos que para $\alpha = 0$, los dos multiplicadores de L_0 son complejos conjugados (y simples) y están sobre el círculo unitario: $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta}$. Entonces, P_α sufre una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo asociado a L_0 en $\alpha = 0$. Así, una curva invariante cerrada se bifurca desde el punto fijo de P_α , y el punto fijo cambia su estabilidad a medida que α pasa por cero. De esta forma, se tiene el siguiente diagrama de bifurcación...

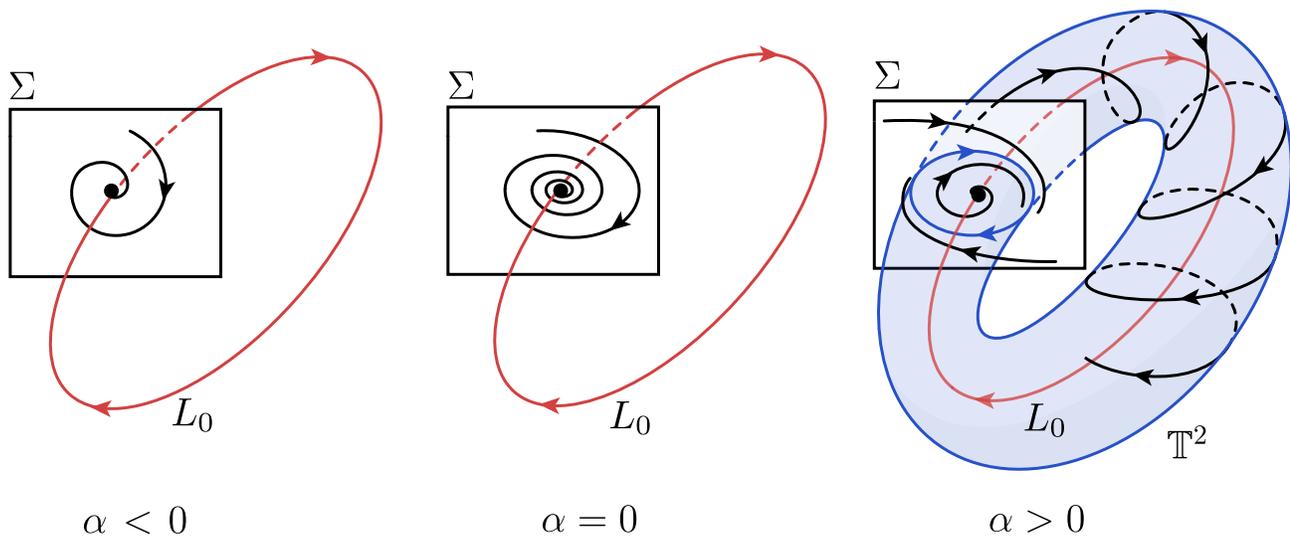


Figura 4.8: Diagrama de bifurcación de toro de ciclos. En esta ilustración el punto fijo asociado a la aplicación de Poincaré pasa por una bifurcación Neimark-Sacker supercrítica.

Si $\alpha < 0$ tenemos 1 ciclo hiperbólico estable L_0 . Cuando $\alpha = 0$, este ciclo se vuelve no-hiperbólico. Para $\alpha > 0$, el ciclo L_0 se vuelve inestable y aparece un toro invariante \mathbb{T}^2 atrayente. El escenario de bifurcación exacto (i.e. súper, o

subcrítica) queda determinado por los coeficientes de la forma normal de P_α en $\alpha = 0$. La estructura de órbitas en \mathbb{T}^2 está determinada por la restricción de P_α a la curva cerrada invariante en Σ . Genéricamente, existen ciclos de períodos largos y de diferentes tipos de estabilidad contenidos en \mathbb{T}^2 . Más adelante, en la sección 8.2, veremos algunos ejemplos de posibles dinámicas en donde el espacio de fase es justamente un toro.

4.4.4. Bifurcación homoclínica

En este evento, un ciclo colisiona con un punto silla y desaparece. También se caracteriza porque, al momento de la bifurcación, las variedades estable e inestable del punto de equilibrio silla se intersectan a lo largo de una **órbita homoclínica**. Aún cuando esta bifurcación se puede analizar con la ayuda de una aplicación de Poincaré, no está asociada a ninguna bifurcación local del punto fijo en la sección de Poincaré. Se trata más bien de una bifurcación global, pues el retrato de fase cambia en una región “grande” del espacio de fase y no es *detectable* tan solo con monitorear los valores propios de una matriz Jacobiana.

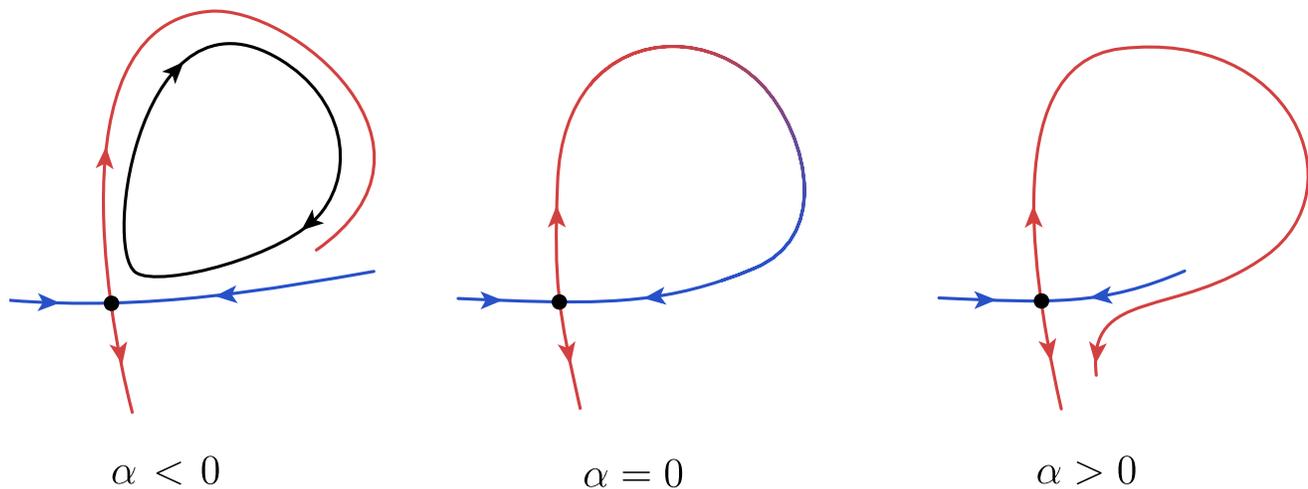


Figura 4.9: Diagrama esquemático de una bifurcación homoclínica en el plano. A medida que $\alpha < 0$ se acerca a 0 la órbita periódica se aproxima al punto silla; simultáneamente, las variedades estable e inestable del punto silla se acercan entre sí. En el límite, cuando $\alpha = 0$, el ciclo se transforma en una órbita homoclínica. Para $\alpha > 0$ no existen órbitas periódicas y las variedades estable e inestable de la silla han “intercambiado” de lugar.

4.5. Caos en el sistema de Rössler

El sistema de Rössler se define como el campo de vectores tridimensional

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c). \end{cases}$$

Este sistema es conocido como uno de los campos vectoriales más sencillos que pueden exhibir caos. Es incluso más sencillo que el sistema de Lorenz. Se sabe que este campo pasa por una secuencia de bifurcaciones de duplicación de período, a medida que el parámetro c aumenta. Este fenómeno (conocido como *cascada de duplicación de período*) culmina con la creación de un atractor caótico, el cual existe para $a = b = 0,2$, $c = 5,7$; ver figuras 4.10-4.11.

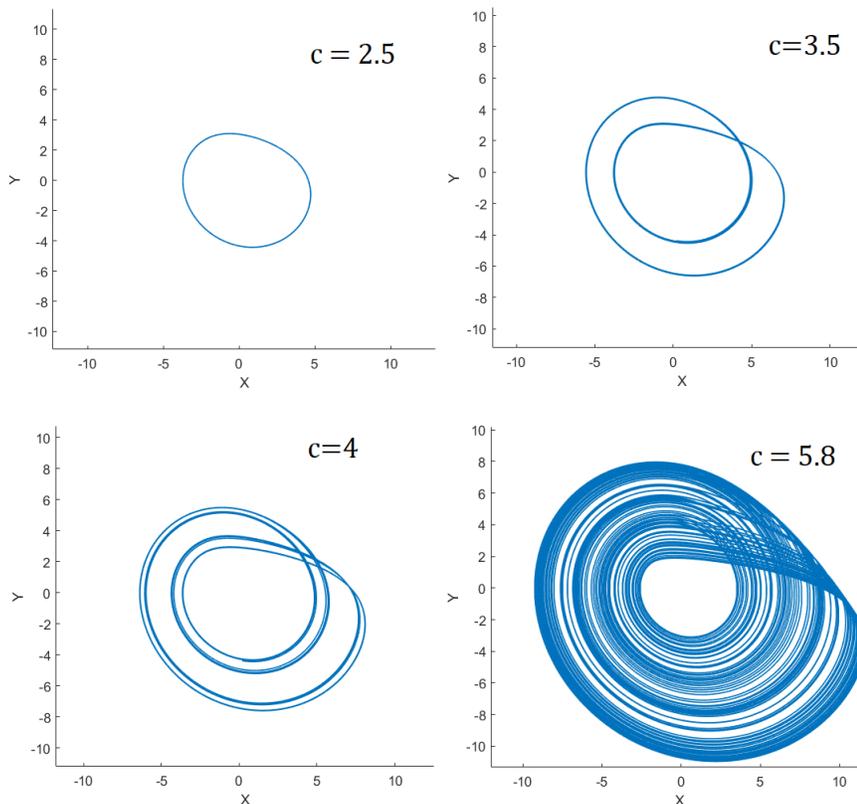


Figura 4.10: Ruta al caos por duplicación de período en el modelo de Rössler.

Para c relativamente pequeño existe una órbita periódica atractora que se vuelve inestable en una *bifurcación de duplicación de período*. El atractor (el ciclo original) es remplazado por otra órbita periódica del doble de período que da vueltas alrededor dos veces antes de cerrarse. Este atractor es luego remplazado por una órbita periódica que da 4 vueltas alrededor antes de cerrarse, y así sucesivamente, a medida que c aumenta.

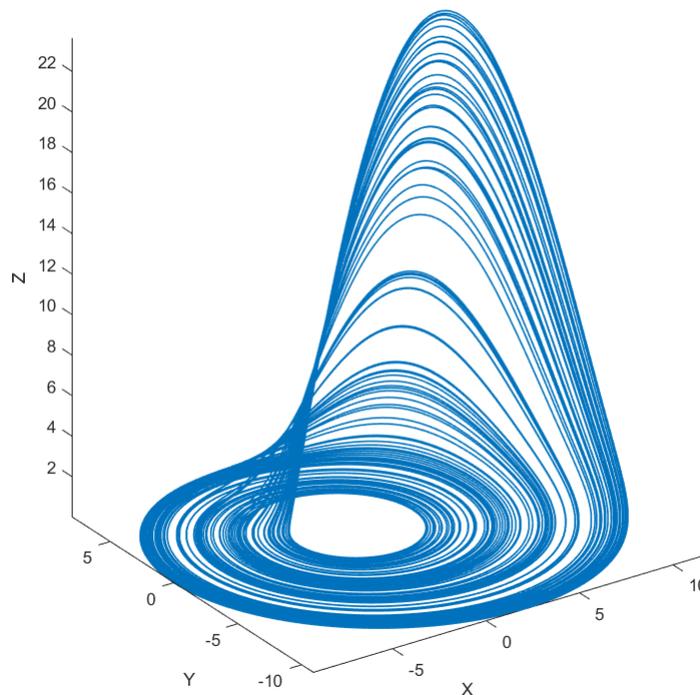


Figura 4.11: El atractor caótico de Rössler.

4.5.1. Estirar y doblar: la receta para crear caos

La duplicación de período en el sistema de Rössler se debe a un mecanismo de “estirar y doblar”. La figura 4.12(a) muestra el flujo cerca de una órbita típica. En una dirección hay una *contracción hacia* el atractor, y en la otra dirección hay una *expansión a lo largo del* atractor. La figura 4.12(b) destaca la “lámina” en donde hay **dependencia sensitiva a las condiciones iniciales**: Dos puntos

iniciales muy cercanos van a tener órbitas que eventualmente se van a separar exponencialmente. Estas son las direcciones a lo largo de las cuales toma lugar un *estiramiento* del atractor. A continuación, el flujo dobla la parte más ancha de la lámina en dos capas y luego se da la vuelta para regresar muy cerca de la parte más estrecha; ver figura 4.13(a).

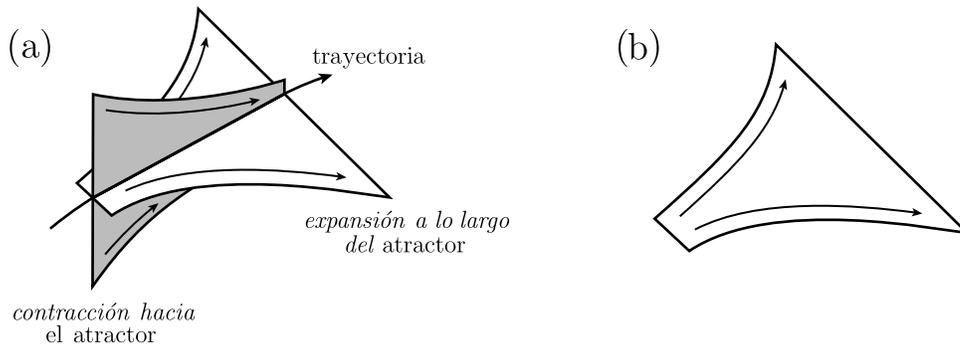


Figura 4.12: Compresión y expansión cerca de una órbita.

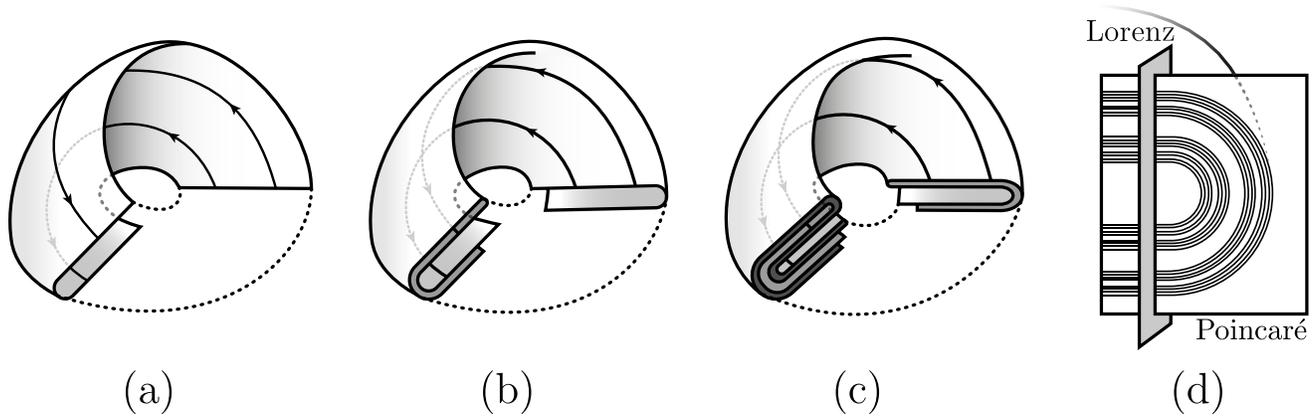


Figura 4.13: Gracias al mecanismo de estirar y doblar, el atractor caótico de Rössler tiene la estructura topológica de un conjunto de Cantor de superficies y es una manifestación de la presencia de herraduras de Smale en secciones de Poincaré.

Este mecanismo de estirar y doblar se manifiesta de la siguiente manera en el atractor de Rössler: dos órbitas vecinas se separan al “estirarse” a medida que se mueven en espiral (parte baja del atractor), luego se cruzan sin intersectarse al moverse hacia la tercera dimensión (“se doblan”), y luego regresan cerca de

sus lugares de partida (“re-inyección”); ver figura 4.13. Hallamos el siguiente comportamiento:

(a) El flujo se expande a lo largo del atractor doblando una lámina/capa en dos y luego contrae ambas capas resultantes acercándolas una a la otra. De esta forma, el flujo ha tomado una capa y ha producido dos capas después de un circuito a lo largo del atractor (figura 4.13(a)).

(b) Repitiendo el proceso, aquellas dos capas producen cuatro (figura 4.13(b))...

(c) ...y luego producen ocho (figura 4.13(c)), y así sucesivamente.

Esto es análogo a tener un panadero amasando una masa de hojaldre para un croissant. En este caso, la masa es el espacio de fase! En definitiva, el flujo genera un complejo infinito de superficies apretadas unas con otras: esto es el atractor extraño; ver figura 4.13(d).

Dinámica de herradura en la sección de Poincaré. La dinámica caótica en el atractor es una manifestación de la presencia de ciertas estructuras que parecen *herraduras*, las cuales son “visibles” al cortar el atractor transversalmente con una sección de Poincaré; ver figura 4.13. De hecho, la dinámica de herraduras es una característica general de todos los comportamientos caóticos, y no es exclusivo del atractor de Rössler. La identificación de estas herraduras provee un esquema que permite demostraciones matemáticas de muchos aspectos importantes de la dinámica del sistema. Y además, tiene el beneficio adicional de la reducción de la dimensión del problema original al análisis de un mapeo bidimensional. La dinámica de herraduras fue introducida por Stephen Smale y nosotros la estudiaremos en el capítulo 7.

Si tomamos una sección adicional (*sección de Lorenz*) a través de la sección de Poincaré, encontramos un conjunto infinito de puntos separados por espacios vacíos de distintos tamaños. Este patrón de puntos y espacios es un conjunto de Cantor topológico. Dado que cada punto corresponde a una lámina del complejo de superficies, nuestro modelo del atractor de Rössler tiene la estructura topológica de un conjunto de *Cantor de superficies*. De hecho, localmente, el atractor es el producto cartesiano de un conjunto de Cantor y una banda.

Reducción a un mapeo unidimensional. Las órbitas en el sistema de Rössler son atraídas hacia el atractor caótico muy rápidamente, después de lo cual lo siguen en la dirección del flujo indicada por las flechas en las ilustraciones. Dado

que esta atracción es tan fuerte, podemos hacer una *aproximación* del comportamiento del sistema **restringido al atractor** al considerar el siguiente *mapeo unidimensional*: Para un valor dado de c , denotemos por x_n al n -ésimo máximo local de los valores de $x(t)$ para una órbita en el atractor. El mapeo unidimensional definido resulta de graficar x_{n+1} versus x_n , donde la gráfica que emerge se ve justamente como una parábola invertida en la figura 4.14. Hemos encontrado un orden o patrón en el caos (!!!).

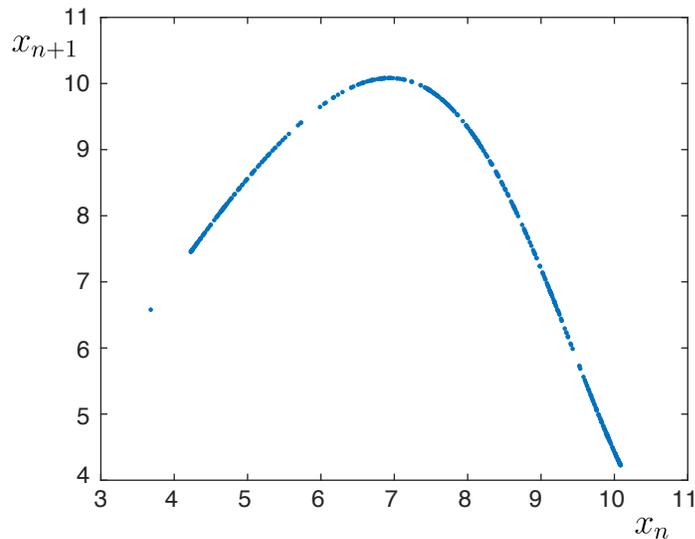


Figura 4.14: Para $c = 5$ la gráfica del mapeo unidimensional x_{n+1} versus x_n de puntos en el atractor de Rössler se ve como una parábola invertida.

En resumen, para obtener la figura 4.14 hemos hecho la siguiente reducción en el sistema de Rössler:

Campo de vectores tridimensional \rightarrow Mapeo unidimensional.

Gracias a esta reducción obtenemos una muy buena *aproximación* para comprender la dinámica en el atractor de Rössler. En particular, esto nos sugiere repetir la misma estrategia para analizar otros sistemas caóticos: **Estudiaremos sistemas dinámicos discretos 1D cuya gráfica sea cualitativamente como la figura 4.14 (i.e., cóncava hacia abajo con un solo máximo) y lo que aprendamos de este sistema 1D podrá ser aplicado para entender sistemas caóticos 3D como el modelo de Rössler.**

4.6. Ejercicios

1. Encuentre dos órbitas periódicas γ_1 y γ_2 y sus períodos positivos T_1 y T_2 para el flujo del sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r-1)(r-2), \\ \dot{\theta} = r^2, \end{cases}$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares en \mathbb{R}^2 .

2. Considere el siguiente sistema en el plano, dado en **coordenadas polares**:

$$\dot{r} = ar(1-r), \quad \dot{\theta} = 1, \quad a > 0.$$

- a) Demuestre que la aplicación de retorno de Poincaré P , definida en el semieje x positivo, está dada por $P(x) = x/[x + (1-x)\exp(-2\pi a)]$.

Ayuda: $\int_{r_0}^r (s(1-s))^{-1} ds = \ln(r/r_0) - \ln((1-r)/(1-r_0))$.

- b) Verifique **explícitamente** que P tiene un punto fijo estable en $x^* = 1$.
¿Qué se puede concluir a cerca del retrato de fase del sistema original?

3. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

visto en el ejemplo 32. Repita el análisis al añadir las componentes $\dot{z} = \mu z$ y luego $\dot{z} = \mu - z^2$ obteniendo un sistema tridimensional en cada caso. Considere $\mu < 0$, $\mu = 0$ y $\mu > 0$. Bosqueje las variedades estable e inestable de las órbitas periódicas en cada caso.

4. Encuentre las órbitas cerradas del siguiente sistema para diferentes valores de μ_1 y μ_2 : $\dot{r} = r(\mu_1 + \mu_2 r^2 - r^4)$, $\dot{\theta} = 1 - r^2$. Discuta su estabilidad en términos del mapeo de Poincaré.
5. Considere un **sistema planar**, el cual escrito en coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ posee ecuación angular que satisface $\dot{\theta} > 0$. Sea P la aplicación de retorno de Poincaré definida sobre $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$. Suponga además que existe $x^* > 0$ tal que :

$$P(x^*) = x^*; \quad \frac{dP}{dx}(x^*) = 1; \quad \frac{d^2P}{dx^2}(x^*) = 0; \quad \frac{d^3P}{dx^3}(x^*) = \epsilon \neq 0.$$

- a) Dibuje un diagrama que ilustre la forma cualitativa de la iteración $x_{n+1} = P(x_n)$ a partir de una condición inicial $x_0 > 0$ suficientemente cerca de x^* , para los dos casos $\epsilon > 0$ y $\epsilon < 0$. *Sugerencia:* Considere una expansión de Taylor de P cerca de x^* .
- b) Haga un bosquejo de los retratos de fase correspondientes para el sistema planar a tiempo continuo en una vecindad anular suficientemente pequeña de $x = x^*$.

6. Sea $(r, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{S}^1$ y considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 + a \cos \theta - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

donde $|a| < 1$.

- 4.1 Demuestre que el círculo $r = 0$ es una órbita periódica con período 2π .
- 4.2 Demuestre que los multiplicadores de Floquet de $r = 0$ son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{2\pi}$.
Ayuda: Muestre que el sistema linealizado cerca de $r = 0$ tiene soluciones de la forma $(0, \delta\theta(t))$ y $(\delta r(t), 0)$.
- 4.3 Demuestre que hay dos círculos $r = r_-$ y $r = r_+$ tales que si $0 < r < r_-$ entonces $\dot{r} > 0$; y si $r > r_+$ entonces $\dot{r} < 0$. Luego la región $N = \{(r, \theta) : r_- < r < r_+\}$ es una región atrapadora. Nuestro próximo objetivo es probar que el conjunto atractor en N es una órbita periódica.
- 4.4 Sea S el rayo $\{(r, 0), r > 0\}$. Argumente que S es una sección global, es decir, el campo de vectores es transversal en todos los puntos de S . Sea $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ el mapeo de Poincaré en S .
- 4.5 Supongamos que la órbita del punto $(r_L, 0)$ cumple que $0 < P(r_L) < r_-$. Argumente que $P(r_L) > r_L$. Alternativamente, suponga que la órbita del punto $(r_H, 0)$ cumple que $P(r_H) > r_+$. Entonces argumente que se debe tener $P(r_H) < r_H$.
- 4.6 Aplique el teorema del valor intermedio a $P(r)$ para probar que existe un punto $(r^*, 0)$ con $r_L < r^* < r_H$ cuya órbita es periódica.

4.7 Demuestre que los multiplicadores de Floquet de esta nueva órbita cerrada son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{-4\pi}$ y, en consecuencia, este ciclo es asintóticamente estable.

Ayuda: Para calcular la integral $\int_0^{2\pi} r^2(t)dt$ use la ecuación diferencial para tener $r^2 = 1 + a \cos \theta - \frac{\dot{r}}{r}$.

7. Determine la estabilidad de **todos las órbitas periódicas** del siguiente sistema en coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r-1)^2(r-2), \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

Además, haga un bosquejo del retrato de fase en el plano cartesiano (x, y) .

Sugerencia: Construya la aplicación de retorno de Poincaré, o bien, analice el flujo linealizado del sistema en una vecindad de cada órbita periódica.

8. Haga un bosquejo del diagrama de bifurcación period-doubling de órbitas periódicas y retratos de fase representativos para un campo de vectores en \mathbb{R}^3 en el caso en que la aplicación de retorno P_α pasa por una bifurcación flip **subcrítica** en $\alpha = 0$.

9. Haga un bosquejo del diagrama de bifurcación de toro de órbitas periódicas y retratos de fase representativos para un campo de vectores en \mathbb{R}^3 en el caso en que la aplicación de retorno P_α pasa por una bifurcación Neimark-Sacker **subcrítica** en $\alpha = 0$.

10. Para las tres bifurcaciones de órbitas periódicas vistas para un campo de vectores en \mathbb{R}^3 en la sección 4.4, determine las dimensiones de las variedades estable e inestable de cada ciclo hiperbólico (i.e. para $\alpha \neq 0$), cuando estos existan. Incluya los casos supercrítico y subcrítico, si corresponde.

11. Explore el sistema de Rössler numéricamente. Fije $b = 2$, $c = 4$, e incremente a en pequeños pasos desde 0 a 0.4. Para cada valor de a , grafique el conjunto atractor, es decir:

a) Integre el sistema desde una condición inicial el tiempo suficiente hasta que converja al conjunto atractor;

- b) Para esta órbita calculada, descarte el “transiente” inicial y grafique solamente aquellos puntos que correspondan al comportamiento asintótico. (Ocupe cualquier proyección que se vea mejor. También grafique la serie temporal $z(t)$.)

Repita el experimento intentando reproducir las órbitas de la sección 4.5. Grafique su propio atractor de Rössler!

Capítulo 5

Sistemas dinámicos caóticos

En este capítulo mostraremos algunas de las principales características de comportamiento extremadamente complicado —lo que hoy llamamos *caos*— que pueden exhibir sistemas dinámicos no lineales. Enfocamos nuestra atención en un ejemplo icónico —el modelo logístico— y sus propiedades para ilustrar la teoría a través de él.

5.1. El mapeo logístico

El mapeo logístico es un ejemplo de un sistema unidimensional que exhibe caos; de hecho, es uno de los sistemas dinámicos más sencillos con esta propiedad. Por ello, en lugar de dar una presentación general y abstracta del tema, ocuparemos el mapeo logístico como un modelo geométrico útil para estudiar sistemas caóticos.

En 1976 Robert May propuso un análogo discreto de la ecuación logística para el crecimiento de una población:

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n) = F(x_n; r) = F_r(x_n), \quad x_n \geq 0, \quad 0 \leq r \leq 4. \quad (5.1)$$

Aquí, x_n es una medida adimensional de una población en la n -ésima generación; r es el parámetro del sistema y representa la tasa de crecimiento intrínseca. El mapeo logístico NO es el mapeo de Poincaré de ningún flujo bidimensional para ningún r . De hecho, ni siquiera es un difeomorfismo en $[0, 1]$. Sin embargo, la dinámica que exhibe es importante en sí misma, y es relevante en mapeos de Poincaré en dimensiones mayores.

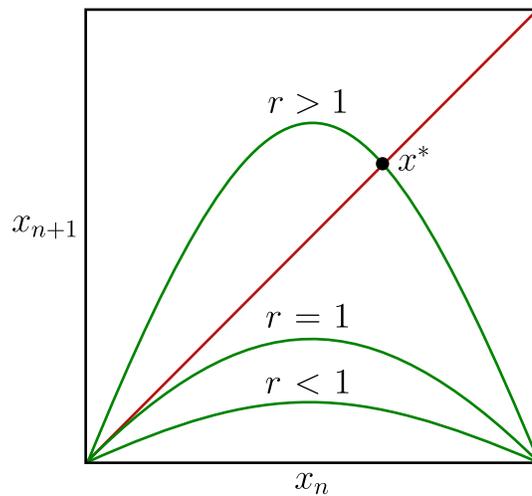


Figura 5.1: Gráficas de $F_r(x)$ para distintos valores característicos del parámetro $r > 0$.

5.1.1. Ruta al caos por duplicación de período

Muchas de las propiedades caóticas del mapeo logístico se pueden deducir con lo que sabemos hasta ahora de dinámica discreta y con simples herramientas de cálculo. El mapeo logístico posee una parábola invertida como gráfica al igual que la dinámica aproximada en el atractor de Rössler; ver figura 5.1 y compare con la figura 4.14.

La función $F_r(x_n)$ se anula en $x = 0$ y $x = 1$, y posee un máximo en $x = \frac{1}{2}$ con valor $F_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}$. Los puntos fijos satisfacen: $x^* = F_r(x^*) = rx^*(1 - x^*)$, $x^* \geq 0$. Se tiene que el origen 0 es un punto fijo para todo $0 \leq r \leq 4$: Es atractor para $r < 1$ y repulsor para $r > 1$. Más aún, ocurre una bifurcación transcítica en $r = 1$: Aparece un 2do punto fijo con coordenadas $x^* = 1 - \frac{1}{r}$, el cual existe para $r > 1$; ver figura 5.1. Entre $1 < r < 3$, el punto x^* es atractor y coexiste con el origen (repulsor); y si $r > 3$, x^* es repulsor. Por último, dado que $F_r(x)$ es una función cuadrática, solo posee a lo más 2 puntos fijos, el origen y x^* . Hasta aquí, todos estos resultados son muy fáciles de entender. Sin embargo, si para $r > 3$, ni el origen ni x^* son atractores, ¿Adónde converge una órbita típica?

Una pista a esta pregunta está en el escenario que ocurre en $r = 3$. Allí, $x^* = 1 - 1/r$ posee el multiplicador $\mu = -1$ y el mapeo $x \mapsto F_r(x)$ pasa por bifurcación flip. Para $r > 3$, F_r^2 tiene 2 puntos fijos atractores, los que corresponden un 2-ciclo

atractor $\{x_1^*, x_2^*\}$ de F_r que coexiste con los 2 puntos fijos repulsivos (el origen y x^*); ver figura 5.2.

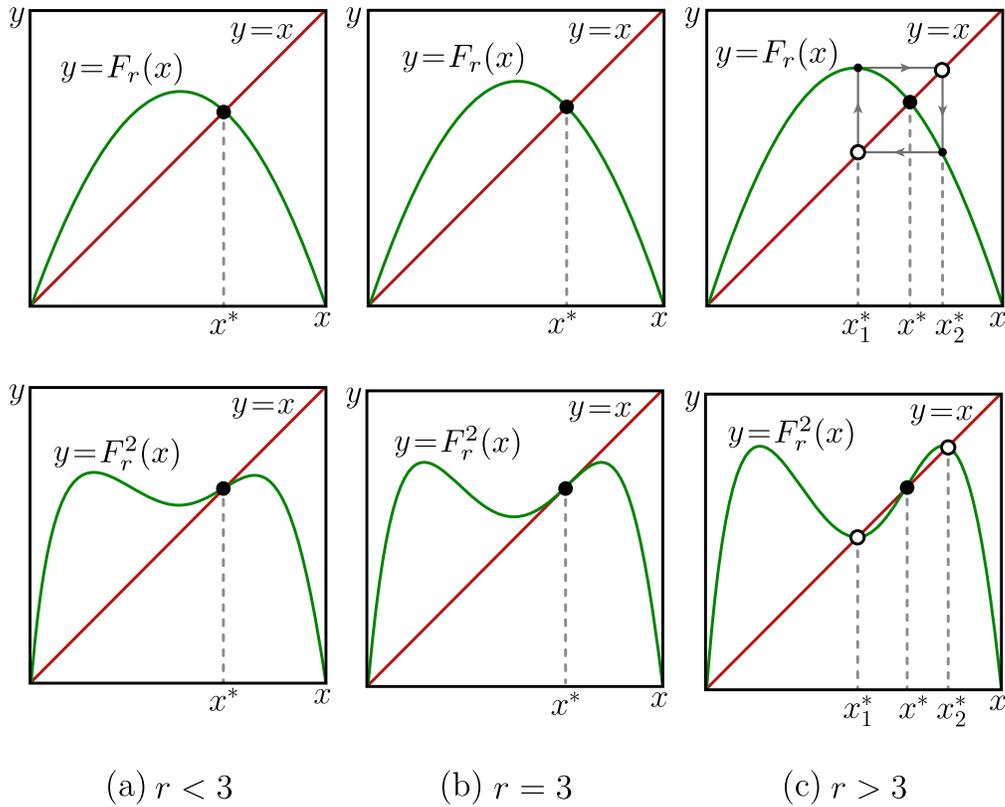


Figura 5.2: Transición de $F_r(x)$ y $F_r^2(x)$ en la bifurcación flip en $r = 3$.

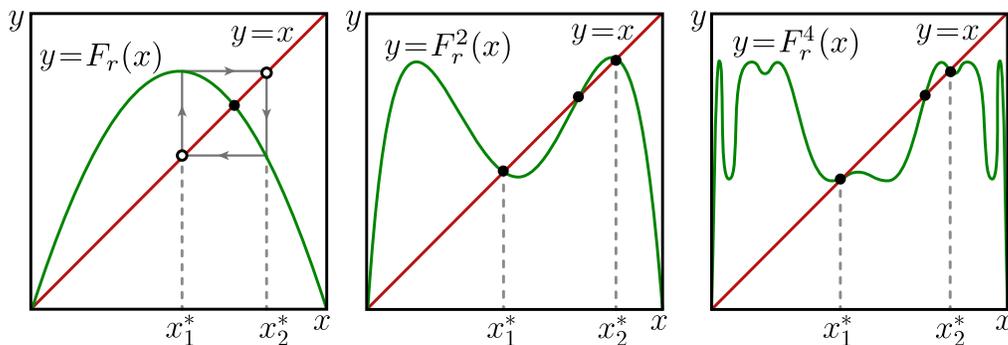
Para estudiar si este recién creado 2-ciclo es estable para todo $r > 3$ podemos analizar directamente la aplicación F_r^2 . Al resolver $F_r^2(x_{1,2}^*) = x_{1,2}^*$, se tiene:

$$x_{1,2}^* = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}.$$

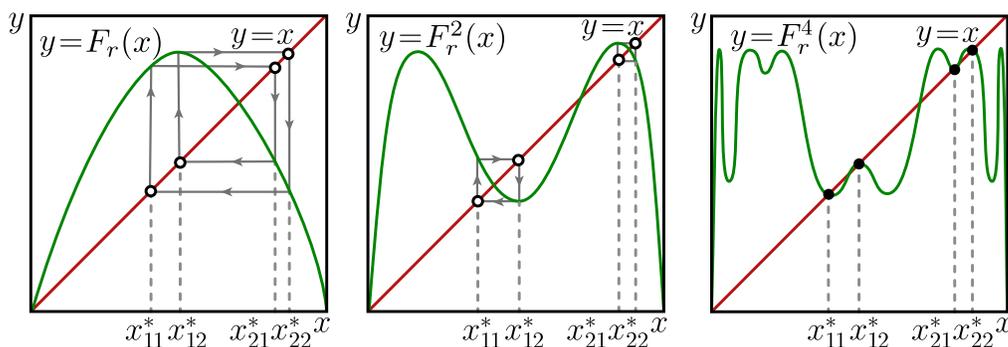
El multiplicador del punto fijo x_1^* de F^2 es

$$\mu = \left. \frac{d}{dx} \left(F(F(x)) \right) \right|_{x=x_1^*} = F'(F(x_1^*))F'(x_1^*) = F'(x_2^*)F'(x_1^*).$$

Sustituyendo por x_1^* y x_2^* se obtiene $\mu = 4 + 2r - r^2$. Por lo tanto, el ciclo es atractor para $|4 + 2r - r^2| < 1$, i.e., para $r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$. Para $r = 1 + \sqrt{6}$ se



(a) $r = 3.4$



(b) $r = 3.5$

Figura 5.3: Transición de $F_r(x)$ y $F_r^2(x)$ en la bifurcación flip de F_r^2 en $r = 1 + \sqrt{6}$.

tiene $\mu = -1$ y los puntos fijos $x_{1,2}^*$ de F^2 sufren una bifurcación flip. Luego, para $r > 1 + \sqrt{6}$ aparecen 4 puntos fijos atractores de F^4 ; éstos corresponden a un par de 2-ciclos atractores para F^2 . A su vez, se obtiene un 4-ciclo atractor para F , el que coexiste con un 2-ciclo repulsor y 2 puntos fijos repulsores (el origen y x^*); ver figura 5.3.

A medida que r crece, el conjunto límite atractor va *duplicando su período* en una secuencia de bifurcaciones flip en F , F^2 , F^4 , etc; ver figura 5.4 con el diagrama de bifurcación parcial en el espacio (r, x) . En el proceso, cada punto fijo o ciclo ya existente va perdiendo estabilidad y se vuelve repulsor, y en su reemplazo aparece un ciclo atractor del *doble de período*. A medida que r crece, se obtienen ciclos de período 8, 16, etc.

El complejo diagrama de bifurcación que emerge se muestra en la figura 5.5:

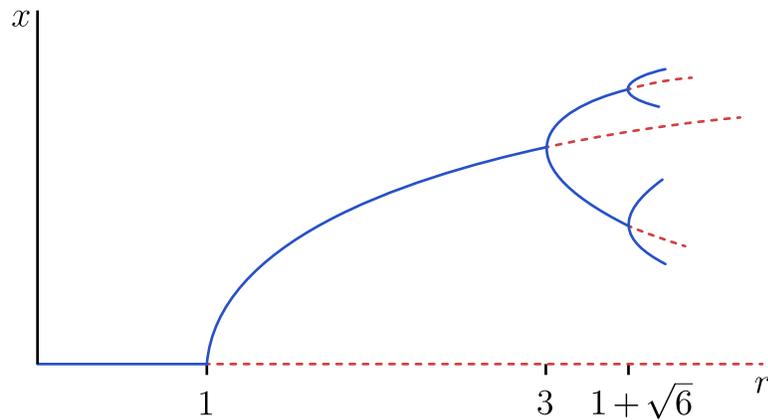


Figura 5.4: Diagrama de bifurcación parcial del mapeo logístico.

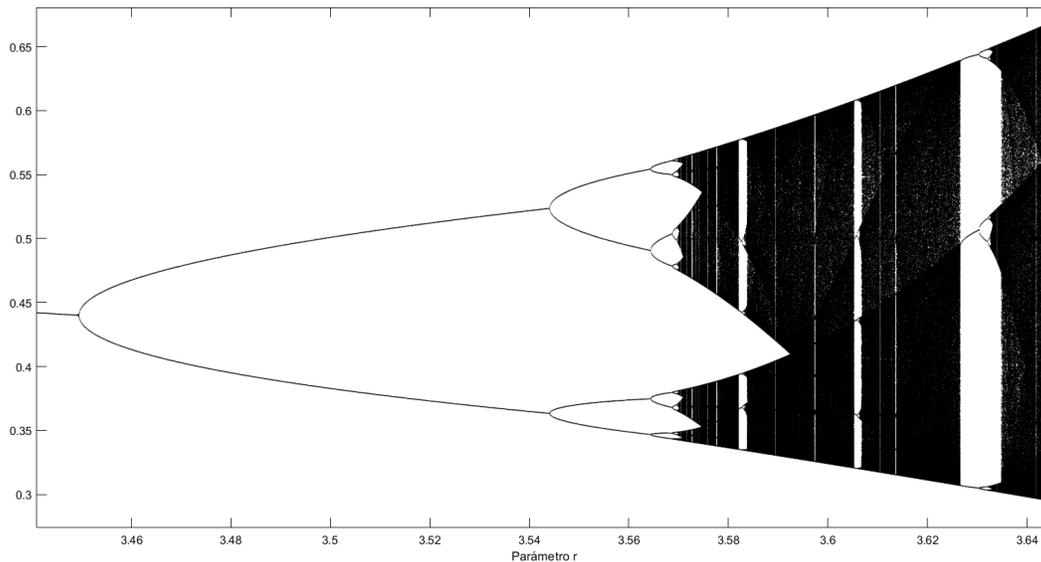


Figura 5.5: Diagrama de bifurcación del mapeo logístico.

Para cada r fijo, el diagrama muestra las coordenadas del objeto atractor del sistema y su periodicidad. Cada 2^k -ciclo que se bifurca en $r = r_k$ permanece atractor por un intervalo o “ventana” en r y se vuelve repulsor en $r = r_{k+1}$, dando paso a un 2^{k+1} -ciclo atractor. El conjunto atractor (el 2^{k+1} -ciclo) sigue siendo un conjunto finito de puntos. A medida que k crece, el tamaño de las

ventanas decrece, y la sucesión $\{r_k\} \rightarrow r_\infty \approx 3,57$, si $k \rightarrow \infty$. En $r = r_\infty$ todas las (infinitas) órbitas periódicas existentes son inestables. El conjunto invariante resultante pasa de ser un conjunto finito de puntos a un conjunto infinito, pero confinado al intervalo $[0, 1]$. Una órbita típica nunca se asienta ni en un punto fijo ni en una órbita periódica, sino que su comportamiento en el largo plazo es aperiódico. Cada una de esas órbitas aperiódicas es densa en un subintervalo de $[0, 1]$ y su comportamiento cualitativo es “errático”: Ésta es una de las cualidades del caos.

Para $r_\infty < r < 4$, a medida que r aumenta, existen otros puntos periódicos que pasan por más secuencias de duplicaciones de período. Esto produce una mezcla de orden y caos: Aparición de *ventanas periódicas* intercaladas entre *nubes* de puntos caóticos. En la figura 5.5 podemos ver que cerca de $r \approx 3,839$ existe una gran ventana que contiene un 3-ciclo estable. El 3-ciclo atractor es el comienzo de una nueva cascada de ciclos atractores de período 3×2^k que sigue como consecuencia de posteriores bifurcaciones de duplicación de período. Para justificar esto, ordenemos los enteros positivos de la siguiente manera, llamada el *orden de Sarkovskii*:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \dots \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

En palabras: escriba todos los números impares excepto el 1. Luego, 2 veces los números impares, 2^2 veces los impares, 2^3 , etc. Finalmente, escriba las potencias de 2 en orden decreciente, con el 1 al final. (Esta lista incluye todos los enteros positivos!) Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 19 (*Sarkovskii, 1964*) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que f posee un punto periódico de período minimal m . Si $m \triangleright n$ en el orden de Sarkovskii, entonces f también tiene un punto periódico de período minimal n .

Una consecuencia notable de este teorema es que si f tiene un punto de período minimal 3, entonces posee puntos periódicos de todos los períodos posibles. En particular, el mapeo logístico en $r \approx 3,839$, además de la órbita 3-periódica, tiene órbitas periódicas de cualquier período. Este resultado fue redescubierto por Li

& Yorke en un famoso paper titulado *“Period three implies chaos”*. Allí prueban que la sola presencia de 3-ciclos es suficiente para asegurar la existencia de órbitas aperiódicas.

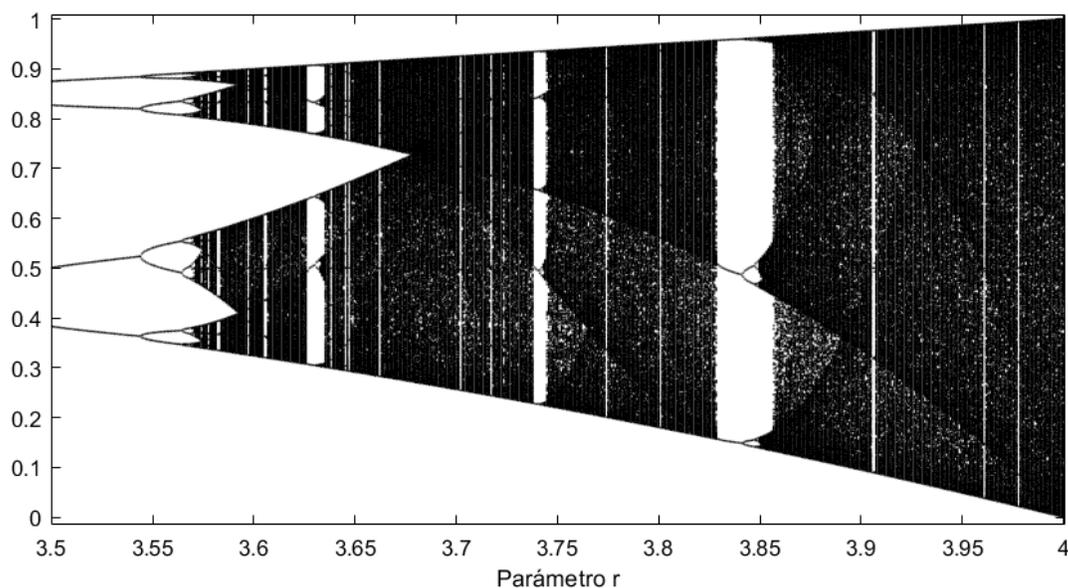


Figura 5.6: Diagrama de bifurcación del mapeo logístico.

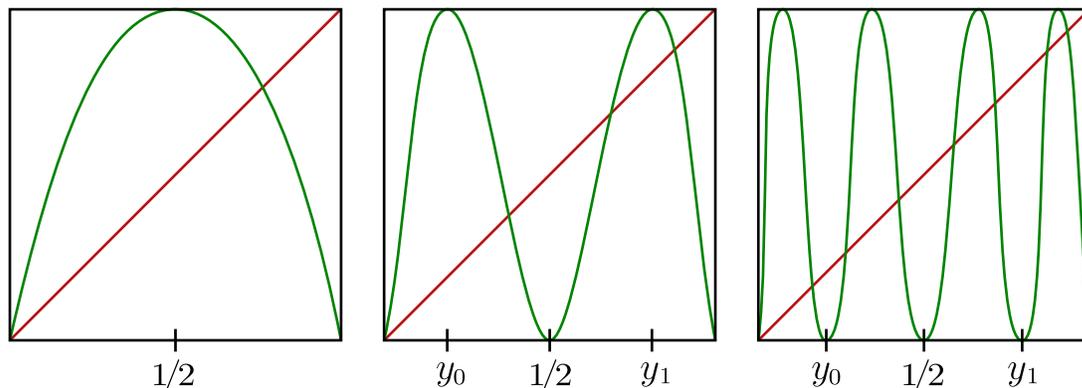


Figura 5.7: Gráficos de F , F^2 y F^3 para la función logística con $r = 4$.

Veamos el caso $r = 4$. De la figura 5.6, el mapeo F_4 es caótico en todo el intervalo $[0, 1]$. Las gráficas de las primeras tres iteraciones de F_4 se muestran en

la figura 5.7. No es difícil convencerse que la función F^n , $n = 1, 2, 3, \dots$, mapea sobreyectivamente 2^n subintervalos de I en todo I , obteniendo en el proceso 2^n puntos fijos. Luego, F_4 posee 2^n puntos de período n (aunque algunos de ellos pueden tener período minimal menor, por ejemplo, ser puntos fijos) y, por ende, un número infinito de puntos periódicos con períodos arbitrariamente altos.

Por otro lado, si escogemos una condición inicial al azar en el intervalo I y graficamos su órbita bajo iteración de F_4 ocupando iteración gráfica, raramente veremos alguno de estos infinitos ciclos, pues son inestables. En la figura 5.8 se muestra la órbita de $x_0 = 0,123$ bajo iteración de F_4 usando 200 y 500 iteraciones. Nuevamente, esta órbita nunca se asienta ni en un punto fijo ni en una órbita periódica, sino que presumiblemente hay algo “caótico” en su comportamiento.

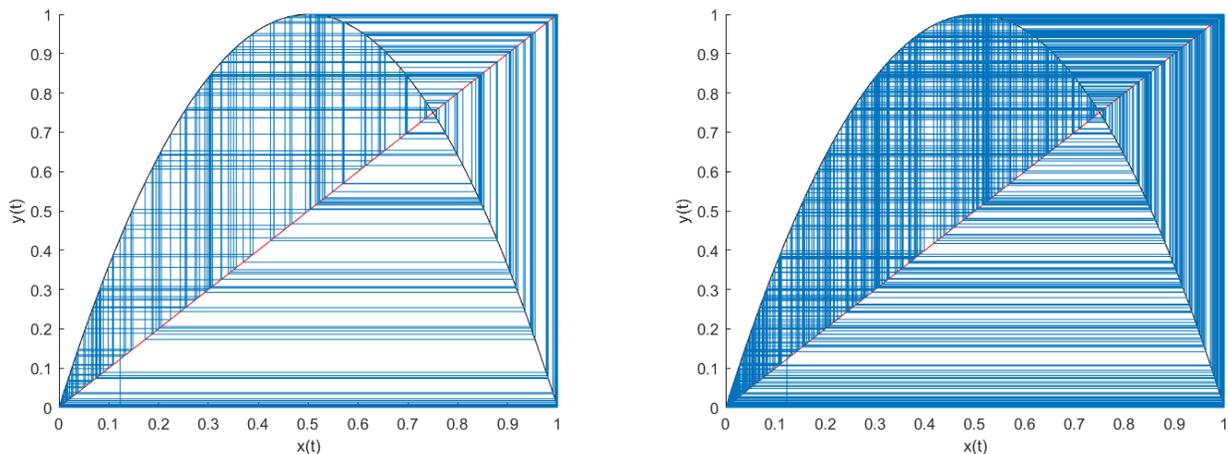


Figura 5.8: Órbita del punto $x_0 = 0,123$ bajo F_4 usando (a) 200 iteraciones y (b) 500 iteraciones.

El mapeo logístico es lo suficientemente simple como para que uno pueda obtener un montón de información analíticamente. El cuadro que resulta es **auto-similar**, es decir, su estructura se repite a escalas menores al hacer progresivos acercamientos a la figura, al igual que en un fractal; compare las figuras 5.5 y 5.9 — Este último diagrama de bifurcación parece ser una copia en miniatura contenida en el primero (!). Este es uno de los caminos “universales” al caos (*period-doubling route to chaos*), y se puede hallar en muchos sistemas. De hecho, el mapeo logístico es un ejemplo de una clase más amplia de mapeos llamada

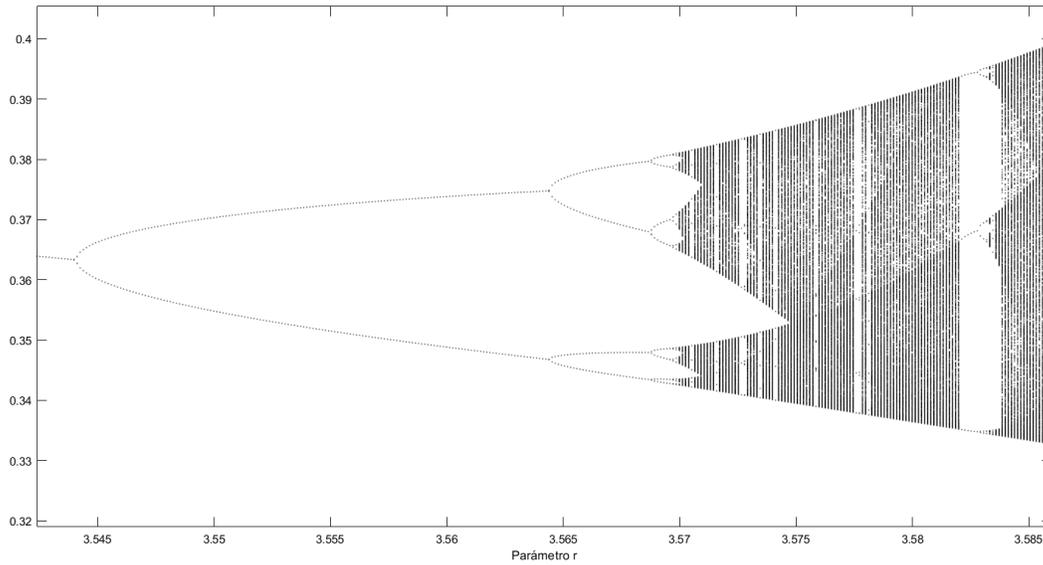


Figura 5.9: Diagrama de bifurcación del mapeo logístico para $3,541 < r < 3,587$.

mapeos **unimodales**: La gráfica del mapeo es suave, cóncava hacia abajo y con un único máximo.

La Constante de Feigenbaum y la universalidad de la ruta al caos via period-doubling. Sea $\{r_n\}$ la sucesión de valores de r donde ocurre la n -ésima duplicación de período. Si definimos la razón

$$\mu_n = \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \delta = 4,6692 \dots$$

se obtiene en el límite la llamada *Constante de Feigenbaum*. El número δ puede interpretarse como la tasa a la cual decrece la distancia entre sucesivas transiciones; ver figura 5.10. La Constante de Feigenbaum aparece como la tasa de convergencia (geométrica) asociada no sólo al mapeo logístico, sino que a cualquier mapeo unimodal. En otras palabras, la Constante de Feigenbaum es una nueva **constante matemática universal**, así como π o e (!!!)

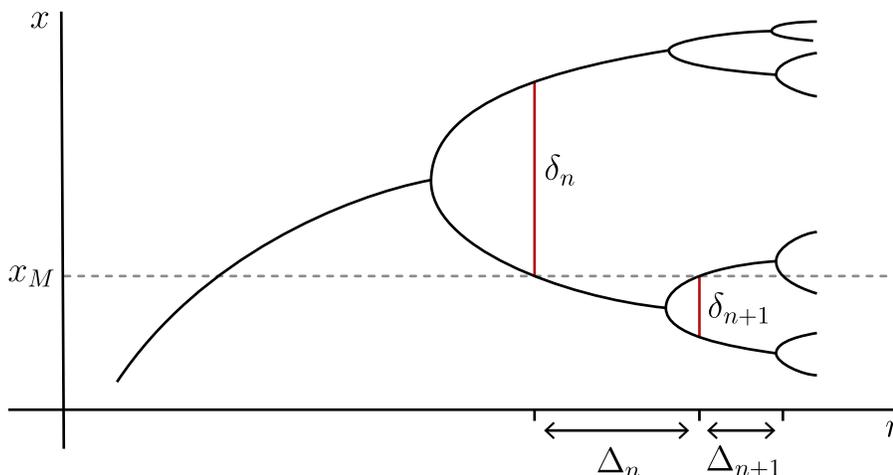


Figura 5.10: Construcción de la Constante de Feigenbaum.

5.2. Una definición de caos

No hay una única manera de definir *caos*, aunque todos están de acuerdo en las propiedades mínimas que debe tener un conjunto o sistema caótico. Las posibles definiciones van desde el punto de vista de la teoría de la medida hasta el enfoque topológico. Nosotros adoptaremos este último, también conocido como *la definición de caos de Devaney* [6]. Esta definición es útil pues aplica a un gran número de ejemplos importantes y porque en muchos casos es fácil de verificar.

Definición 22 Sea $f : V \rightarrow V$ una aplicación que mapea un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ en sí mismo (i.e., V es invariante). Diremos que la aplicación f es **caótica en V** si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El conjunto de **puntos periódicos** de f es **denso** en V , es decir, todo abierto de V contiene al menos un punto periódico de f .
2. f es **transitiva** en V : Dados dos subconjuntos $U_1, U_2 \subset V$ existe un $n > 0$ tal que $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$.
3. f posee **sensibilidad a las condiciones iniciales**: Existe una constante de sensibilidad $\beta > 0$ tal que para todo $x_0 \in V$ y para cualquier vecindad U alrededor de x_0 , existen $y_0 \in U$ y $n > 0$ tales que $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$.

Analicemos un poco más las propiedades 2 y 3 de la definición anterior.

TRANSITIVIDAD: La aplicación f es transitiva en V si, dados dos subconjuntos $U_1, U_2 \subset V$ existe un $n > 0$ tal que $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$.

Intuitivamente, un mapeo topológicamente transitivo tiene puntos que eventualmente se mueven bajo iteraciones desde una vecindad arbitrariamente pequeña hacia cualquier otra. Luego, este mapeo no podrá descomponerse en dos abiertos disjuntos que sean invariantes bajo f . Por otro lado, si f posee una órbita densa, dicha órbita visita repetidamente cualquier abierto de V ; entonces f es topológicamente transitivo. Si V es un compacto en \mathbb{R} o \mathbb{S}^1 , el recíproco también es cierto, es decir, transitividad es equivalente a la existencia de una órbita densa en V .

SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES: Decimos que f posee sensibilidad a las condiciones iniciales si existe una *constante de sensibilidad* $\beta > 0$ tal que para todo $x_0 \in V$ y para cualquier vecindad U alrededor de x_0 , existen $y_0 \in U$ y $n > 0$ tales que $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$.

Intuitivamente, un mapeo posee sensibilidad a las condiciones iniciales si existen puntos arbitrariamente cerca de x los cuales eventualmente se separan de x (más bien, de la órbita de x) una distancia (al menos) β bajo iteración de f . **No todos** los puntos cerca de x deben separarse de x bajo iteración, pero debe haber al menos uno de tales puntos en cualquier vecindad de x .

Si f es sensible a las condiciones iniciales, entonces para efectos prácticos, la dinámica de f es una pesadilla para cálculos numéricos: Cualquier pequeño error en el cálculo introducido por redondeos y aproximaciones tiende a magnificarse bajo iteraciones. Como consecuencia, no importa qué tan preciso sea el método numérico utilizado, la órbita calculada podría no tener ninguna semejanza con la órbita real. En el caso particular que $V = [a, b]$ es un intervalo cerrado en \mathbb{R} , la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en la definición de caos es redundante. (¿Por qué?).

Ejemplo 33 (El mapeo de duplicación o *doubling map*) Definamos la función

discontinua $D : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ por $D(x) = 2x \bmod 1$. Esto es,

$$D(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2; \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

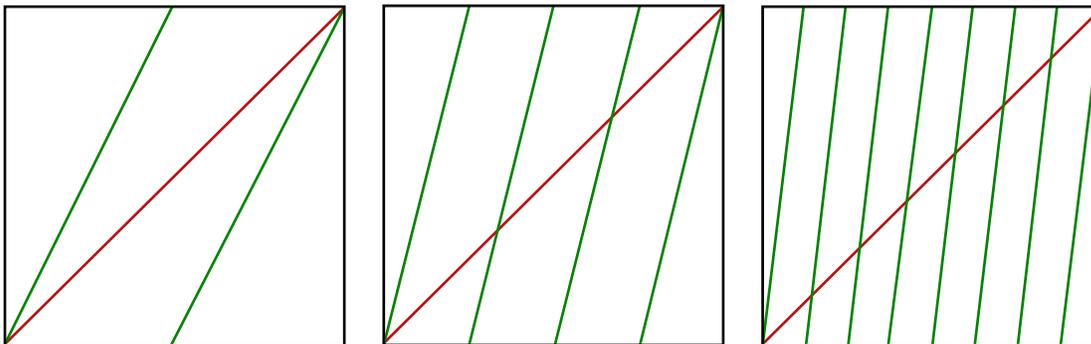


Figura 5.11: Bosquejo de las gráficas del mapeo de duplicación D , D^2 y D^3 .

Es fácil verificar que la n -ésima iteración satisface $D^n(x) = 2^n x \bmod 1$. Luego, el gráfico de D^n consiste de 2^n líneas rectas con pendiente 2^n , extendiéndose por el intervalo $[0, 1)$; ver figura 5.11 para $n = 1, 2, 3$. Así, D^n mapea cualquier intervalo de la forma $[k/2^n, (k+1)/2^n)$ para $k = 0, 1, \dots, 2^n - 2$ en todo el intervalo $[0, 1)$. El gráfico de D^n cruza la diagonal $y = x$ en algún punto en este intervalo. Luego, para cada n , existe un punto fijo en cada uno de estos intervalos. Es decir, D^n posee 2^n puntos fijos. Por lo tanto, por cada n , D posee 2^n puntos periódicos. Como la longitud de estos intervalos es $1/2^n$, se tiene que el conjunto de puntos periódicos de D es denso en $[0, 1)$.

Por otro lado, dado cualquier intervalo abierto J , siempre podemos hallar un intervalo de la forma $[k/2^n, (k+1)/2^n)$ dentro de J para n suficientemente grande. Así, D^n mapea J en todo $[0, 1)$. Luego, D es transitivo. Esto también prueba la sensibilidad a las condiciones iniciales al escoger la constante de sensibilidad $\beta = 1/2$. En definitiva, el *doubling map* es caótico según nuestra definición.

Ejemplo 34 (El mapeo tienda o *tent map*) Ahora consideramos un pariente continuo del mapeo de duplicación, dado por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2; \\ -2x + 2, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

T es caótico en $[0, 1]$. Este hecho se obtiene exactamente de la misma forma que para el *doubling map*, usando los gráficos de T^n (Tarea: Complete los detalles.); ver figura 5.12.

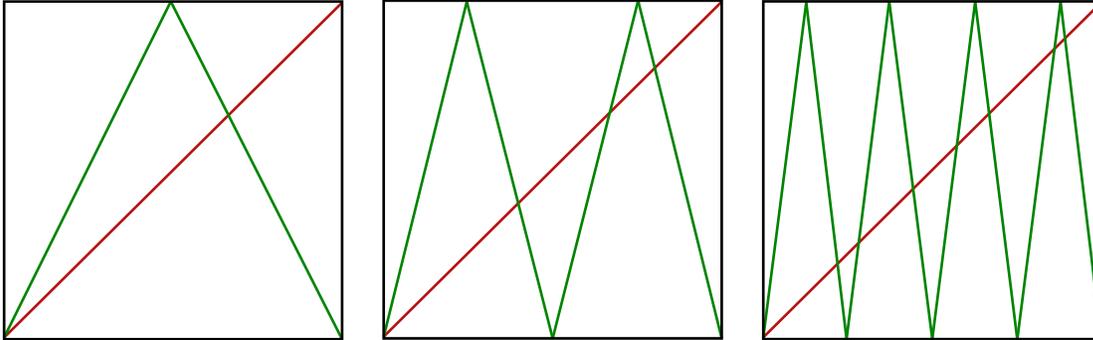


Figura 5.12: Bosquejo de las gráficas del mapeo tienda T , T^2 y T^3 .

Resumiendo, un mapeo caótico posee tres ingredientes:

1. **Es impredecible:** debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales.
2. **Es indescomponible:** no se puede romper o descomponer en dos subsistemas (dos subconjuntos abiertos invariantes) que no interactúen bajo f debido a la transitividad topológica.
3. **Posee un elemento de regularidad:** en medio de todo este comportamiento errático y virtualmente aleatorio hay un elemento de regularidad dado por los puntos periódicos los cuales son densos.

Por ejemplo, una rotación irracional del círculo es topológicamente transitiva pero no sensible a las condiciones iniciales, pues todos los puntos permanecen separados una misma distancia bajo iteración.

Proposición 5 *Suponga que $f : I \rightarrow I$ y $g : J \rightarrow J$ son conjugados via h , donde tanto I como J son intervalos cerrados en \mathbb{R} de longitud finita. Si f es caótico en I , entonces g es caótico en J .*

La proposición anterior nos asegura que (bajo ciertas condiciones) la dinámica caótica se preserva bajo conjugaciones. Luego, esto nos permite hallar un cambio de coordenadas apropiado que transforme un mapeo en otro más sencillo o mejor conocido. Sin embargo, no siempre es posible hallar conjugaciones entre funciones con dinámica equivalente. Pero siempre podemos relajar el requerimiento de que la conjugación sea inyectiva.

Definición 23 Una función continua h donde cada punto en su imagen $Im(h)$ posea a lo más n preimágenes y que satisfaga $f \circ h = h \circ g$ se llama una **semi-conjugación** entre f y g .

Según esta definición, una semiconjugación preserva el comportamiento caótico en intervalos de longitud finita, pero no necesariamente preserva el período de los ciclos, aunque sí mapea ciclos en ciclos.

Ejemplo 35 El mapeo tienda del ejemplo 34 y el mapeo logístico con $r = 4$ son semiconjugados en $[0, 1]$. Intuitivamente esto era de esperarse al comparar las gráficas de las figuras 5.7 y 5.12.

Sea $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x))$. Entonces h mapea el intervalo $[0, 1]$ en la forma dos-a-uno sobre sí mismo, excepto en $x = 1/2$, que es la única preimagen de 1. (En particular, h no es invertible, y por ende, no puede ser una conjugación). Luego calculamos

$$\begin{aligned} h(T(x)) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi x)) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2 \cos^2(2\pi x) - 1) \\ &= 1 - 2 \cos^2(2\pi x) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi x) \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x) \right) \\ &= F_r(h(x)), \end{aligned}$$

para $r = 4$.

Luego, h es una semiconjugación entre T y F_r para $r = 4$.

Dado que T es transitivo, recordemos que podemos hallar subintervalos arbitrariamente pequeños que se mapean por T a todo $[0, 1]$. Luego, por medio de h , F_4 mapea estas imágenes de estos intervalos a todo $[0, 1]$. Como h es continua, las imágenes de estos intervalos también se pueden escoger arbitrariamente pequeñas. Luego, podemos escoger $1/2$ como constante de sensibilidad para F_4 también. Recordando del ejemplo 34 que T es caótico en $[0, 1]$ se obtiene finalmente el siguiente resultado.

Teorema 20 *El mapeo logístico $F_r(x) = rx(1 - x)$ con $r = 4$ es caótico en el intervalo $[0, 1]$.*

5.3. El conjunto invariante Λ para $r > 4$

En lo que sigue denotaremos al mapeo logístico como $F = F_r$ para simplificar la notación siempre que esto no lleve a confusión.

¿Qué ocurre para $r > 4$? Observemos la gráfica del mapeo $F(x)$ para $r > 4$ en la figura 5.13. Notemos que el valor máximo de $F(x)$ ahora satisface $x_M = \frac{r}{4} > 1$. Por lo tanto existen puntos en el intervalo $I = [0, 1]$ que abandonan I después de una iteración de F . Sea A_0 el conjunto de tales puntos. En particular, A_0 es un intervalo abierto centrado en $\frac{1}{2}$. Para todo $x \in A_0$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = -\infty$ (¿Por qué?).

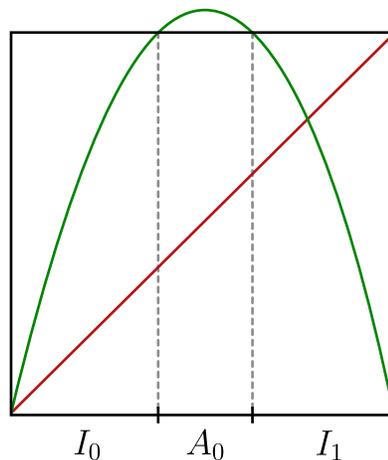


Figura 5.13: Bosquejo de la gráfica de F para $r > 4$.

Nos interesa caracterizar aquellos puntos de I que **permanecen** en I al iterar F indefinidamente. Llamaremos

$$\Lambda = \{x \in I : F^n(x) \in I, n \in \mathbb{Z}\}$$

a este conjunto. Es claro que Λ es invariante bajo F . Podemos determinar cómo es el conjunto Λ en forma progresiva. Por ejemplo, después de una iteración, debemos mirar el complemento de A_0 , el cual se compone de la unión de dos intervalos cerrados disjuntos $I_0 \cup I_1$; ver figura 5.13. Análogamente, sea

$$A_1 = \{x \in I : F(x) \in A_0\},$$

el conjunto de puntos que abandonan I después de dos iteraciones de F , o equivalentemente, aquellos puntos que llegan a A_0 después de la primera iteración. Inductivamente podemos definir $A_n = \{x \in I : F^n(x) \in A_0\}$, o equivalentemente

$$A_n = \{x \in I : F^i(x) \in I \text{ para } i \leq n \text{ pero } F^{n+1}(x) \notin I\}.$$

Así, A_n consiste de puntos que escapan de I a la $(n + 1)$ -ésima iteración y nunca vuelven a regresar a I . Luego, el complemento de A_n son justamente aquellos puntos de I que permanecen en I (al menos) hasta la $(n + 1)$ -ésima iteración. Repitiendo este proceso hasta el límite $n \rightarrow \infty$, obtendremos el conjunto

$$\Lambda = I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right),$$

que consiste de aquellos puntos (de existir alguno) que *nunca* abandonan I .

Podemos caracterizar y estudiar el conjunto invariante Λ mediante el siguiente razonamiento. Como vimos más arriba, a la primera iteración ($n = 1$), obtenemos el conjunto $I \setminus A_0$ consistente en dos intervalos cerrados: I_0 a la izquierda e I_1 a la derecha (ver figura 5.13). Notemos que F es creciente en I_0 y decreciente en I_1 . Luego, F mapea I_0 e I_1 monótonamente en I : $F(I_0) = F(I_1) = I$. Esto implica que hay un par de intervalos abiertos —uno en I_0 y otro en I_1 — que van a parar a A_0 bajo F . Este par de intervalos es justamente A_1 (ver figura 5.14). Luego, después de 2 iteraciones de F nos quedamos con el conjunto $I \setminus (A_0 \cup A_1)$, el cual consiste de cuatro intervalos cerrados. La figura 5.15 muestra la gráfica de F^2 .

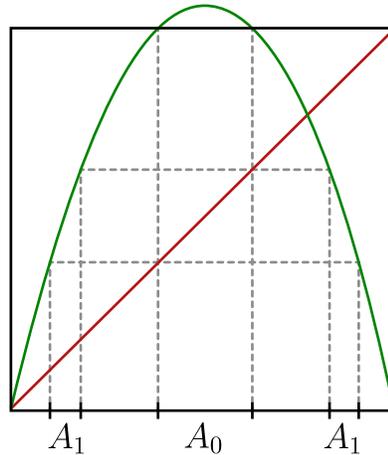
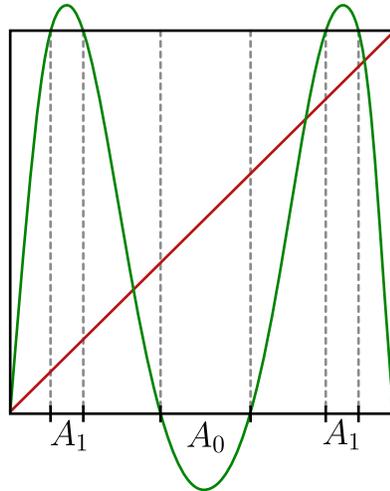


Figura 5.14: El conjunto que abandona I consiste de una colección de intervalos abiertos disjuntos; en este caso se muestra A_1 .

Luego, F^2 mapea *cada uno* de estos 4 intervalos de $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ en todo I . Notemos que F^2 alterna crecimiento y decrecimiento en estos cuatro subintervalos. Luego, cada uno de estos 4 subintervalos en $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ contiene un subintervalo abierto que es mapeado por F^2 en A_0 . Estos últimos son puntos que escapan de I a la tercera iteración por F , i.e, componen el conjunto A_2 . Entonces lo que nos queda en I luego de la 3ra iteración es el conjunto que resulta de dividir los intervalos cerrados en $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ en tres partes cada uno y “eliminar” las partes del medio en cada uno. *¿Suena conocido?*

Continuando con esta construcción, el conjunto A_n consiste de 2^n intervalos abiertos disjuntos. Así, $I \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ consiste de 2^{n+1} intervalos cerrados. F^{n+1} mapea monótonamente cada uno de estos intervalos cerrados de $I \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ en I . La gráfica de F^{n+1} alterna entre crecimiento y decrecimiento en estos intervalos. El gráfico de F^{n+1} tiene exactamente 2^n “jorobas” o máximos locales en I . El gráfico de F^n cruza la recta $y = x$ exactamente 2^n veces. Por lo tanto, F^n tiene 2^n puntos fijos y F posee 2^n puntos de período n (aunque algunos de ellos podrían tener período *minimal* más pequeño, por ejemplo, ser puntos fijos). De esta manera, la construcción de Λ nos recuerda a la construcción de un conjunto de Cantor: Λ se obtiene al remover sucesivamente intervalos abiertos de las “partes del medio” de un conjunto de intervalos cerrados.

Figura 5.15: Bosquejo de la gráfica de F^2 para $r > 4$.

Definición 24 *Un subconjunto de $I \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Cantor topológico si es cerrado, totalmente desconexo y perfecto.*

A modo de recuerdo, un subconjunto de \mathbb{R} es *totalmente desconexo* si no contiene intervalos. Mientras que se dice *perfecto* si todo punto es un punto de acumulación o punto límite de otros puntos en el mismo conjunto.

En particular, el clásico conjunto de los “medios tercios” de Cantor es un conjunto de Cantor topológico y es también un ejemplo de un **fractal**, i.e., un conjunto que es autosimilar bajo magnificaciones. A modo de ejemplo, consideremos los puntos en el intervalo izquierdo $[0, \frac{1}{3}]$. Bajo un microscopio que magnifique este intervalo $\times 3$, esta pieza del conjunto de Cantor se ve exactamente como el conjunto original. De hecho, el mapeo lineal $L(x) = 3x$ mapea la porción del Cantor en $[0, \frac{1}{3}]$ homeomórficamente en el conjunto completo en $[0, 1]$. Este proceso continúa a todo nivel: uno puede magnificar cualquier parte del Cantor en la etapa n -ésima de la construcción por un factor de 3^n y obtener el conjunto original.

Teorema 21 *Si $r > 2 + \sqrt{5} \approx 4,236$, entonces Λ es un conjunto de Cantor topológico.*

El teorema es válido para $r > 4$ pero la demostración es más delicada.

DEMOSTRACIÓN. *Paso 1:* Λ es totalmente desconexo. Se puede comprobar que si $r > 2 + \sqrt{5}$, entonces $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. En particular existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda$. Aplicando la Regla de la Cadena se obtiene $|(F^n)'(x)| > \lambda^n$.

Supongamos que Λ no es totalmente desconexo. Si Λ tuviera intervalos, podemos escoger $x, y \in \Lambda, x \neq y$ con $[x, y] \subset \Lambda$. Entonces $|(F^n)'(\alpha)| > \lambda^n, \forall \alpha \in [x, y]$. En particular, escojamos n tal que $\lambda^n|y - x| > 1$. Por el Teorema del Valor Medio se tiene que $|F^n(y) - F^n(x)| \geq \lambda^n|y - x| > 1$. Luego, al menos $F^n(y)$ o $F^n(x)$ está fuera de I . Esto es una contradicción, pues $\Lambda \subset I$ es invariante.

Paso 2: Λ es cerrado pues es una intersección anidada de intervalos cerrados.

Paso 3: Λ es perfecto. Nuevamente, supongamos que Λ no es perfecto. Si $p \in \Lambda$ fuese un punto **aislado**, todo punto cercano debe estar en algún A_k y, por lo tanto, debe abandonar I bajo iteración de F .

Opción 1: Existe una sucesión de puntos extremos de los A_k que converge a p . Notemos que todo punto en un extremo de un intervalo A_k está en Λ . Estos puntos van a parar al punto fijo en 0, y se quedan en I bajo iteraciones de F . (En particular, esto implica que Λ no es un conjunto vacío). Por lo tanto, la opción 1 es un contradicción.

Opción 2: Todos los puntos en una vecindad de p son mapeados fuera de I por alguna potencia de F . En tal caso, por continuidad, podemos asumir que F^n mapea p al 0 y todos los otros puntos vecinos van al eje real negativo. Pero entonces F^n tiene un máximo en p de manera que $(F^n)'(p) = 0$. Por la Regla de la cadena se tiene $F'(F^i(p)) = 0$ para algún $i < n$. Luego, $F^i(p) = 1/2 \in A_0$. Pero entonces $F^n(p) \rightarrow -\infty$, lo cual contradice que $F^n(p) = 0 \in \Lambda$. Un argumento análogo es válido si uno asume que F^n mapea p a 1. ■

5.4. Conjuntos hiperbólicos en \mathbb{R}

En la demostración anterior ocupamos la propiedad de que $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$ si $r > 2 + \sqrt{5}$. Luego, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda$. La anterior es una condición similar a la hiperbolicidad que hemos estudiado para puntos fijos

y puntos periódicos ($|F'(x)| \neq 1$), pero considerándola como propiedad de todo un conjunto.

Definición 25 *Un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ es un conjunto hiperbólico repulsor (resp. atractor) para $x \mapsto f(x)$ si*

- Γ es cerrado, acotado e invariante bajo f y
- existe $N > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| > 1$ (resp. $|(f^n)'(x)| < 1$) para todo $n \geq N$ y para todo $x \in \Gamma$.

Según esta definición, el conjunto de Cantor Λ para el mapeo logístico $F(x) = rx(1-x)$ cuando $r > 2 + \sqrt{5}$ es un conjunto hiperbólico repulsor con $N = 1$. Los conjuntos invariantes hiperbólicos son un arquetipo para comportamiento complicado de sistemas dinámicos.

5.5. Exponentes de Lyapunov

Hemos visto que el mapeo logístico puede exhibir órbitas aperiódicas para ciertos valores de parámetros, pero ¿Cómo sabemos si esto es realmente caos? Para ser llamado “caótico”, un sistema debe también mostrar dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, en el sentido que órbitas vecinas se separan exponencialmente rápido, en promedio.

Consideremos un sistema a tiempo discreto $x \mapsto f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Sea un punto x_0 en un conjunto caótico y tomemos un punto vecino $x_0 + \delta_0$, donde la separación inicial δ_0 es extremadamente pequeña. Luego, aplicamos el mapeo iterativo n veces a cada punto y consideramos el valor absoluto de la diferencia entre esos resultados:

$$\delta_n = |f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)|.$$

Esta es la separación de las órbitas después de n iteraciones. Si el comportamiento es caótico, esperamos que esta distancia δ_n crezca exponencialmente con n . Si $\delta_n \approx |\delta_0|e^{n\lambda}$, entonces decimos que λ es el **exponente de Lyapunov**. Un exponente de Lyapunov positivo indica que hay sensibilidad a las condiciones iniciales y, por ende, es una característica del caos.

Derivemos una fórmula más precisa para λ . Escribamos

$$\frac{\delta_n}{|\delta_0|} = \frac{|f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)|}{|\delta_0|} \approx e^{n\lambda}$$

o equivalentemente

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|. \quad (5.2)$$

La ecuación (5.2) define el exponente de Lyapunov λ para la órbita de x_0 . Si ahora hacemos $\delta_0 \rightarrow 0$, en el lado derecho de (5.2) obtenemos:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|.$$

Aplicando la regla de la cadena, la derivada de f^n se puede expresar como el producto de n derivadas de f evaluadas en los puntos x_0, x_1, x_2, \dots de la órbita de x_0 . Luego, obtenemos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln (|f'(x_0)| |f'(x_1)| \cdots |f'(x_{n-1})|) = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right|,$$

o bien

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (5.3)$$

La expresión (5.3) es una medida de la tasa exponencial de expansión de f tomada *en promedio* a lo largo de los n primeros puntos de la órbita de x_0 . Si (5.3) posee un límite cuando $n \rightarrow \infty$, definimos el límite como el **exponente de Lyapunov** para la órbita que comienza en x_0 :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right).$$

Notemos que λ depende de x_0 . Sin embargo, se puede demostrar que es el mismo valor para todo x_0 en la cuenca de atracción de un atractor dado. Para puntos fijos y puntos periódicos estables, λ es negativo; para conjuntos invariantes caóticos, λ es positivo.

Ejemplo 36 Supongamos que x_0 es un punto p -periódico del mapeo f . Mostraremos que el exponente de Lyapunov $\lambda < 0$.

Como es usual, transformamos las preguntas sobre p -ciclos de f en preguntas sobre puntos fijos de f^p . De hecho, notemos que x_0 es un punto fijo de f^p . Como el ciclo es estable, x_0 es un punto fijo estable de f^p y el multiplicador satisface $|(f^p)'(x_0)| < 1$. Por lo tanto,

$$\ln |(f^p)'(x_0)| < \ln(1) = 0.$$

Es fácil verificar entonces que la órbita periódica completa $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ también posee (el mismo) exponente de Lyapunov negativo.

Ejemplo 37 Consideremos ahora el mapeo tienda (tent map) general:

$$T(x) = \begin{cases} rx, & 0 \leq x < 1/2; \\ r - rx, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

para $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq x \leq 1$. Notemos que este mapeo generaliza al del ejemplo 34.

Dado que $f'(x) = \pm r$ para todo x (en $x = \frac{1}{2}$ consideramos derivadas laterales), tenemos que

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right) = \ln r.$$

Luego, esto sugiere que el mapeo tienda posee comportamiento caótico para todo $r > 1$ —o al menos, sensibilidad a las condiciones iniciales— y no solo para $r = 2$ como se afirmó en el ejemplo 34.

5.5.1. Estimando exponentes de Lyapunov numéricamente

En muchos casos, el exponente de Lyapunov debe ser calculado numéricamente. Supongamos que calculamos computacionalmente una órbita de un mapeo f que asumimos conocido, por ejemplo el mapeo logístico. Podemos calcular su exponente de Lyapunov como un indicador de si este sistema dinámico es caótico o no siguiendo los siguientes pasos:

1. Escoja una condición inicial al azar en el dominio de f .

2. Itere el mapeo f un tiempo suficientemente largo como para que los transientes decaigan, i.e, para que la órbita se acerque a su conjunto atractor. Pueden ser 300 iteraciones o algo así, todo depende de la elección particular de f .
3. A continuación, calcule un número adicional de iteraciones de la misma órbita, digamos 10.000, a partir del último punto calculado en el paso anterior.
4. Para cada uno de los 10.000 puntos x_i de la órbita obtenida en el paso anterior, calcule $\ln |f'(x_i)|$.
5. El exponente de Lyapunov es entonces aproximado por el promedio

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|,$$

donde $n = 10,000$ en este ejemplo.

5.5.2. Escalamiento universal del exponente de Lyapunov

Podemos monitorear cómo el exponente de Lyapunov cambia a medida que un parámetro de control varía y el sistema se vuelve caótico. La figura 5.16 muestra el exponente de Lyapunov para el mapeo logístico (5.1) plotado como función del parámetro r . (Un gráfico similar puede obtenerse con el procedimiento explicado en la sección anterior al repetir dicho algoritmo “barriendo” los distintos valores de r en un rango dado. Hazlo tú también en casa!) Para $r < 3,5699\dots = r_\infty$, el exponente de Lyapunov es negativo excepto en los puntos de bifurcación, donde ocurren las duplicaciones de período. En estos puntos el exponente de Lyapunov es igual a 0. Para $r > r_\infty$, el exponente de Lyapunov es positivo pero con caídas ocasionales por debajo de 0 siempre que ocurra una ventana periódica. Si ignoramos estas caídas a valores negativos, entonces vemos que el exponente de Lyapunov crece a medida que r aumenta más allá de r_∞ . Decimos que el sistema se vuelve *más caótico* a medida que r se incrementa, donde el “grado de caoticidad” (cuantificado por la divergencia de órbitas cercanas) crece con r .

De hecho, para $r > r_\infty$, podemos predecir este crecimiento como

$$\begin{aligned} \lambda(r) &= \lambda_0(r - r_\infty)^{\frac{\ln 2}{\ln \delta}} \\ &= \lambda_0(r - r_\infty)^{0,445\dots} \end{aligned} \tag{5.4}$$

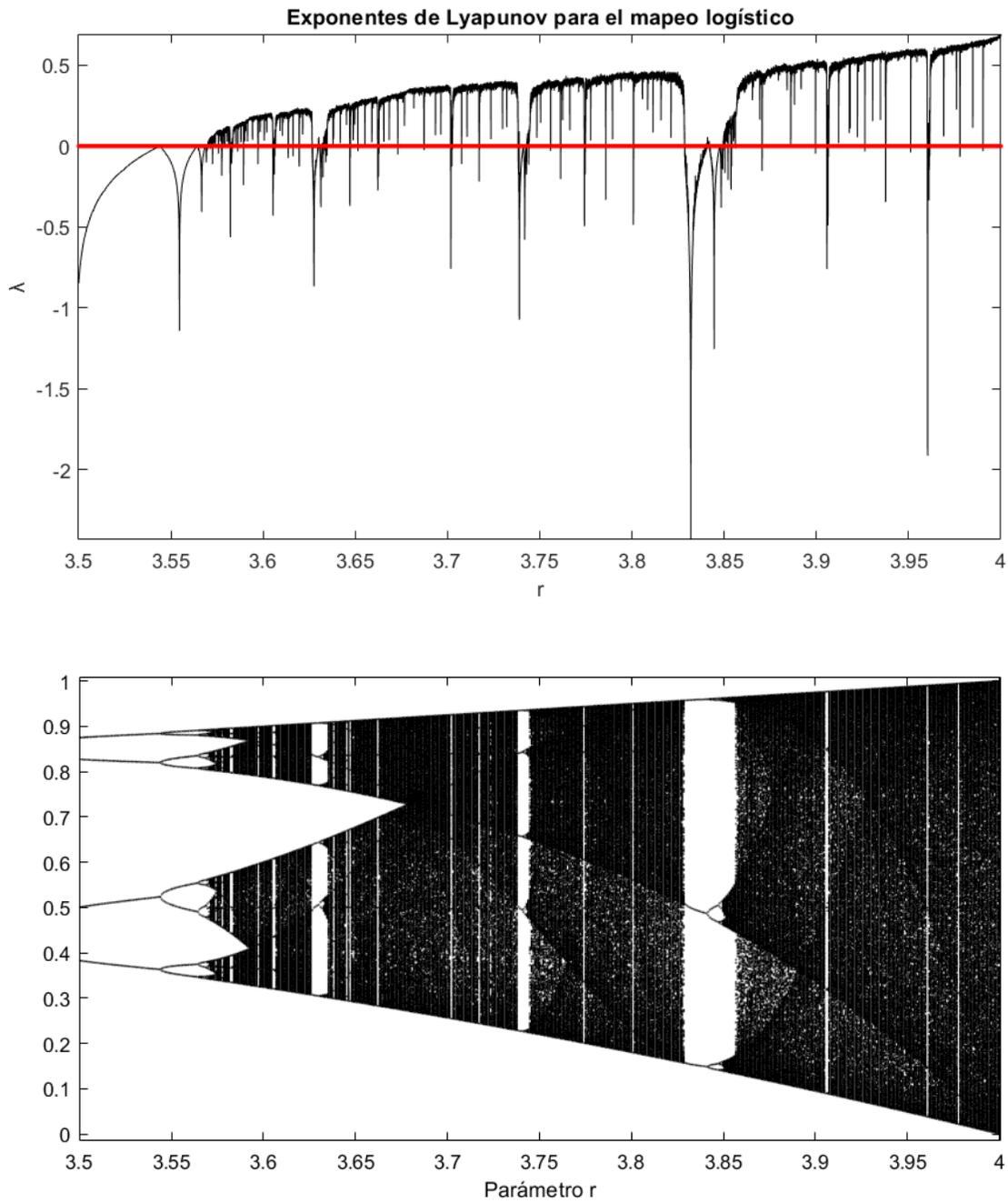


Figura 5.16: El exponente de Lyapunov λ para el mapeo logístico toma valores positivos en concordancia con los valores del parámetro r para los cuales el sistema es caótico.

Aquí, λ_0 es una constante, y δ es una vez más la constante de Feigenbaum $\delta \approx 4,669\dots$. La derivación de esta fórmula y de cómo obtener el valor de λ_0 puede hallarse en [9].

La ecuación (5.4) nos da capacidades predictivas: Si vemos que un sistema se vuelve caótico mediante una cascada de duplicaciones de período, entonces podemos predecir qué tan caótico será (en términos del exponente de Lyapunov) como función del parámetro de control.

5.5.3. Comportamiento ergódico

Otro método importante relacionado con los exponentes de Lyapunov para caracterizar un conjunto caótico hace uso de una distribución de probabilidad. En términos generales, nos interesa saber cuál es la probabilidad de que una órbita dada visite una región particular del espacio de fase.

Si μ es una medida de probabilidad y si la dinámica del sistema viene dada por un mapeo medible $x \mapsto f(x)$, entonces decimos que μ es una **medida de probabilidad invariante** si $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ para todo conjunto medible A . Aquí, el término *medida* se usa en el sentido de *peso*: Mientras más veces una región del espacio de fase sea visitada, mayor será su medida o peso. El término *invariante* significa que la distribución resultante no cambia bajo la dinámica del sistema. Por ejemplo, si el espacio de estados es simplemente el eje real, podemos dividir este eje en pequeños intervalos o celdas. Luego, la probabilidad de hallar la órbita en la i -ésima celda es

$$p_i = \mu(x_i) = \int_{\text{celda } i} p(x)dx,$$

donde x_i etiqueta la ubicación de la celda i -ésima. Interpretamos $p(x)dx$ como la probabilidad de que la órbita visite el intervalo entre x y $x + dx$. Para la mayoría de los sistemas dinámicos, debemos hallar la distribución de probabilidad numéricamente al calcular diferentes órbitas y estimar las frecuencias relativas de ocurrencias o visitas a cada celda.

Una de las razones para enfocarnos en las distribuciones invariantes para un sistema dinámico dado, si existen, es que nos da una manera alternativa de calcular *propiedades promedio* del sistema como, por ejemplo, el exponente de Lyapunov.

La idea es la siguiente: consideremos alguna *propiedad* u *observable* G del sistema, el cual depende del valor de la variable x del espacio de estados. Por ejemplo, $G(x)$ podría ser la temperatura dentro de un reactor químico hipotético en función de la cantidad de un cierto reactante x durante una reacción química. Conocemos la regla mediante la cual x cambia en el tiempo (la reacción química o sistema dinámico), pero en la práctica solo podemos medir directamente $G(x)$ (la temperatura) y no x una vez que la reacción ha iniciado —por ello, decimos que G es un *observable* de la cantidad x . Podemos definir el **promedio temporal de G** como

$$\overline{G}_t = \frac{1}{T} \int_0^T G(x(t)) dt, \quad (5.5)$$

o bien,

$$\overline{G}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(x(t_i)). \quad (5.6)$$

La forma integral (5.5) es útil si conocemos $x(t)$ como una función continua del tiempo (un resultado analítico). La forma de suma (5.6) se ocupa para series de tiempo discretas de valores. En este último caso, $t_N = T$. La idea en ambos casos es seguir G como una función del tiempo para un intervalo de duración T y calcular el valor promedio de G sobre ese intervalo. Por supuesto, comúnmente queremos que T sea suficientemente grande para que podamos muestrear el rango completo de comportamientos del sistema. Luego, usualmente añadimos el límite $T \rightarrow \infty$.

Alternativamente, podemos evaluar el **promedio espacial de G** al encontrar G como función de x y multiplicar ese valor por la probabilidad de que el sistema visite el intervalo $[x, x + dx]$:

$$\begin{aligned} \overline{G}_p &= \int G(x)p(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^M G(x_i)p_i. \end{aligned} \quad (5.7)$$

En la forma integral de (5.7), asumimos que hemos evaluado la distribución de probabilidad (continua) $p(x)$. En la forma de suma, sumamos sobre los M intervalos (o cajas) que dividan la región del atractor en el espacio de fase.

Si el promedio en (5.5) o (5.6) es igual al promedio en (5.7), decimos que el sistema es **ergódico**. Es decir, los promedios temporales son iguales a los promedios espaciales, donde el promedio espacial está ponderado por la probabilidad de que una órbita visite una porción particular del espacio de fase.

Ejemplo 38 Calculemos el exponente de Lyapunov para el mapeo logístico (5.1) cuando el parámetro $r = 4$. Para este valor de r , se puede demostrar (ver [17]) que la distribución de probabilidad asociada $p(x)$ es

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Además, según lo visto en (5.3), el valor “puntual.º “local” del exponente de Lyapunov está dado por

$$\lambda(x) = \ln |f'(x)|.$$

Podemos calcular el exponente de Lyapunov al hacer uso de la distribución de probabilidad $p(x)$:

$$\lambda = \int_0^1 \lambda(x) \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln |4(1-2x)|}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Si ahora hacemos la sustitución $x = \sin^2(\pi y/2)$, hallamos que

$$\lambda = \int_0^1 \ln |4 \cos(\pi y)| dy = \ln 2.$$

El exponente de Lyapunov para el mapeo logístico con $r = 4$ es positivo. Su valor, $\lambda = \ln 2$, es el mismo para el mapeo tienda con $r = 2$ obtenido en el ejemplo 37. Esto no es coincidencia: el mapeo logístico con $r = 4$ es semiconjugado al mapeo tienda con $r = 2$ según el ejemplo 35. De hecho, esto es una manifestación de un resultado más general: El exponente de Lyapunov es independiente de los cambios de coordenadas.

Proposición 6 *Si dos sistemas dinámicos $x \mapsto f(x)$, $y \mapsto g(x)$ son conjugados, entonces poseen el mismo exponente de Lyapunov.*

Este resultado es importante pues cuando caracterizamos experimentalmente un sistema, la señal (o cantidad) que registramos ($G(x)$) muchas veces no es la misma que la variable dinámica (x) que buscamos caracterizar. Por ejemplo, si estamos monitoreando la temperatura (x) de un fluido turbulento, entonces podríamos registrar los valores de la señal eléctrica ($G(x)$) de una sonda de temperatura. Luego podemos usar los valores registrados de la señal eléctrica directamente para calcular el exponente de Lyapunov para el sistema, pues este exponente es independiente del cambio de variables (siempre que sea uno-a-uno) que se use para convertir temperatura en voltaje eléctrico. Más aún, si el sistema es ergódico, no es necesario conocer (o estimar) la distribución de probabilidad $p(x)$ para evaluar el promedio espacial (5.7), sino que basta calcular el promedio temporal de $G(x(t))$ (5.5) o (5.6) a lo largo de una solución $x(t)$.

5.6. Ejercicios

1. Pruebe que $F_2(x) = 2x(1-x)$ satisface: si $0 < x < 1$, entonces $F_2^n(x) \rightarrow 1/2$ cuando $n \rightarrow \infty$.
2. Bosqueje el gráfico de $F_4^n(x)$ en el intervalo unitario, donde $F_4(x) = 4x(1-x)$. Concluya que F_4 tienen al menos 2^n puntos periódicos de período n .
3. Verifique que el mapeo logístico tiene un 2-ciclo para todo $r > 3$.
4. Reproduzca el diagrama de la figura 5.5: Utilizando un computador, itere el mapeo logístico desde una condición inicial fija, descarte el transiente de la órbita calculada y grafique las coordenadas del conjunto atractor resultante en el plano (x, r) . Repita el proceso “barriando” el intervalo $r \in [0, 4]$.
5. Repita el ejercicio anterior para cada uno de los siguientes mapeos. Asegúrese de usar un rango suficientemente grande para r y x de tal forma de incluir los principales detalles de interés. Además, pruebe con diferentes condiciones iniciales, por si acaso sea relevante:
 - (a) $x_{n+1} = x_n e^{-r(1-x_n)}$ (Ruta al caos por duplicación de período estándar);
 - (b) $x_{n+1} = e^{-rx_n}$ (Una duplicación de período y eso es todo);
 - (c) $x_{n+1} = r \cos x_n$ (Duplicación de período y caos por montones).

6. Considere el mapeo cuadrático $x_{n+1} = x_n^2 + c$.
- Encuentre y clasifique todos los puntos fijos como función de c .
 - Encuentre los valores de c en los cuales los puntos fijos se bifurcan, y clasifique esas bifurcaciones.
 - ¿Para qué valores de c hay un 2-ciclo estable?
 - Dibuje un diagrama de bifurcación parcial indicando puntos fijos, 2-ciclos y su estabilidad.
7. Demuestre que el mapeo logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ es conjugado al mapeo cuadrático $y_{n+1} = y_n^2 + c$ mediante un cambio de variables lineal de la forma $x_n = ay_n + b$, donde a, b se deben determinar.
8. Este problema intenta relacionar los contenidos de este capítulo con la aparición de caos en el modelo de Rössler; ver sección 4.5. Considere una órbita periódica estable de un campo de vectores en \mathbb{R}^3 que pasa por una cascada de duplicaciones de período al caos.
- Haga un bosquejo de la dinámica en el espacio de fase tridimensional antes y después de la primera duplicación de período.
 - Explique el concepto de un mapeo de Poincaré en una sección transversal bidimensional apropiada.
 - Bosqueje la dinámica del mapeo de Poincaré antes y después de la primera duplicación de período. ¿En qué consiste el conjunto atractor del mapeo de Poincaré en cada caso? Describa brevemente el bosquejo.
 - Bosqueje la secuencia de atractores del mapeo de Poincaré a lo largo de toda la ruta al caos. Describa brevemente el bosquejo.
 - Explique en términos de “estirar y doblar”, por qué la dinámica del sistema es caótica después de la secuencia de duplicación de período.
9. Considere el mapeo cúbico $x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f(x_n) = x_n^3 - \lambda x_n$ para $\lambda > 0$.
- Encuentre todos los puntos periódicos y clasifíquelos cuando $0 < \lambda < 1$.
 - Demuestre que, si $|x|$ es suficientemente grande, entonces $|f^n(x)| \rightarrow \infty$.
 - Demuestre que si λ es suficientemente grande, entonces el conjunto de puntos que no tienden a infinito es un conjunto de Cantor.

10. Sea $x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f(x) = -(1+r)x - x^2 - 2x^3$.
- Clasifique la estabilidad lineal del punto fijo $x^* = 0$.
 - Demuestre que ocurre una bifurcación flip en $x^* = 0$ cuando $r = 0$.
 - Al considerar los primeros términos en la serie de Taylor para $f^2(x)$ (o por algún otro método), demuestre que existe un 2-ciclo **inestable** para $r < 0$ y que este ciclo colapsa con $x^* = 0$ cuando r tiende por abajo a $r = 0$. (Bifurcación flip subcrítica).
 - ¿Cuál es el comportamiento en el largo plazo de las órbitas que empiezan cerca de $x^* = 0$, tanto para $r < 0$ como para $r > 0$?
11. Complete los detalles del ejemplo 33 para probar que el doubling map es caótico.

12. Complete los detalles del ejemplo 34 para probar que el tent map es caótico:

$$x \mapsto T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- Use el gráfico de T^n para concluir que T tiene exactamente 2^n puntos periódicos de período n . (Algunos de estos puntos periódicos podrían corresponder a puntos con un “período minimal” menor, por ejemplo, puntos fijos.)
- Pruebe que el conjunto de todos los puntos periódicos de T es denso en $[0, 1]$.
- Demuestre que T es transitivo.
- Calcule el exponente de Lyapunov para concluir que T exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales.

13. Demuestre que el mapeo del panadero (*Baker's map*)

$$B(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2; \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

es caótico en $[0, 1]$.

14. Sean $f : I \rightarrow I$ y $g : J \rightarrow J$ dos aplicaciones que definen sistemas dinámicos discretos, donde I y J son intervalos cerrados en \mathbb{R} de longitud finita. Suponga que f y g son **conjugados** mediante el homeomorfismo $h : I \rightarrow J$.

a) Demuestre que h mapea puntos periódicos de f en puntos periódicos de g .

b) Demuestre que si f es caótico en I , entonces g es caótico en J .

Sugerencia: Suponga que f posee constante de sensibilidad β y pruebe que h lleva intervalos de longitud β en I en intervalos de longitud (al menos) β' en J , para cierto $\beta' > 0$.

15. Suponga que $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y que existe una **semiconjugación** de f a g . Suponga que f es caótico en $[0, 1]$. Demuestre que g es también caótico en $[0, 1]$.

16. Demuestre que el mapeo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $f(\theta) = 2\theta$ es caótico.

17. Considere el mapeo definido en **el intervalo unitario** $[0, 1]$ dado por

$$x_{n+1} = 10 x_n \pmod{1} \quad \Leftrightarrow \quad x \mapsto f(x) = 10 x \pmod{1}.$$

(Aquí, “mod 1” significa que consideramos sólo la parte no-entera de x . Por ej., $2,63 \pmod{1} = 0,63$). Demuestre que **la dinámica del mapeo es caótica** siguiendo los siguientes pasos:

(a) Encuentre los puntos fijos.

Ayuda: Escriba los puntos x_n en forma decimal; por ej., $\frac{1}{4} = 0,25$, $\pi = 3,141592\dots$, etc.

(b) Para $x_n = 0,142857142857142\dots = 0.\overline{142857} \in \mathbb{Q}$, calcule x_{n+6} . ¿Qué clase de órbita posee x_n ?

(c) Pruebe que el mapeo posee un número infinito numerable de puntos periódicos de todos los períodos posibles, y que todos ellos son inestables. Use esto para probar que el conjunto de órbitas periódicas del mapeo es denso en $[0, 1]$. *Ayuda: Para cada entero $p > 1$, dé un ejemplo de un punto de período p .*

(d) Demuestre que el mapeo tiene un número infinito no-numerable de órbitas aperiódicas.

(e) Demuestre que el mapeo es transitivo.

- (f) Demuestre que el mapeo posee sensibilidad a las condiciones iniciales.
18. Sea F_r es el mapeo logístico con $r > 2 + \sqrt{5}$, y sea $\Omega(F_r)$ el conjunto de puntos no-errantes de F_r .
- Demuestre que $\Omega(F_r)$ es cerrado.
 - Demuestre que $\Omega(F_r) = \Lambda$.
 - Determine $\Omega(F_r)$ para cada r con $0 < r \leq 3$.
19. Un punto p es *recurrente* si, para cualquier intervalo abierto J alrededor de p , existe $n > 0$ tal que $f^n(p) \in J$. Claramente todos los puntos periódicos son recurrentes.
- Dé un ejemplo de un punto recurrente no-periódico para F_r con $r > 2 + \sqrt{5}$.
 - Dé un ejemplo de un punto no-errante para F_r que no sea recurrente.
20. Considere una función tienda diferente definida en todo \mathbb{R} por

$$T(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1/2; \\ -3x + 3, & 1/2 \leq x. \end{cases}$$

Identifique el conjunto de puntos Λ cuyas órbitas no se van a $-\infty$. ¿Qué se puede decir de la dinámica en este conjunto?

21. Realice un estudio del mapeo seno (*sine map*) $x_{n+1} = a \sin(\pi x_n)$, para $0 \leq x \leq 1$, y donde $a > 0$ es un parámetro. Encuentre puntos fijos y puntos periódicos y derive un diagrama de bifurcación parcial. Identifique y describa el conjunto invariante Λ . ¿Existen valores de a tal que Λ sea un conjunto de Cantor topológico?
22. Considere la función $f(x) = x^3 - \lambda x$ para $\lambda > 0$.
- Encuentre todos los puntos periódicos y clasifíquelos cuando $0 < \lambda < 1$.
 - Pruebe que, si $|x|$ es suficientemente grande, entonces $|f^n(x)| \rightarrow \infty$.
 - Pruebe que si λ es suficientemente grande, entonces el conjunto de puntos que no tienden a infinito es un conjunto de Cantor.

23. Pruebe que el conjunto de Cantor “estándar” de los tercios medios es cerrado, no vacío, perfecto y totalmente desconexo. Adicionalmente, pruebe que es un conjunto no numerable y posee medida cero.
24. Muestre que para $1 < r < 3$ y $r \neq 2$, el exponente de Lyapunov del mapeo logístico $F_r(x) = rx(1 - x)$ es $\lambda = \ln |2 - r|$.
25. Muestre que, en la n -ésima etapa de la construcción del conjunto de Cantor “estándar”, la suma de las longitudes de los intervalos no removidos es

$$1 - \frac{1}{3} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^i \right).$$

Concluya que la suma de las longitudes de estos intervalos tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

26. Sea Γ el conjunto de Cantor “estándar”. Pruebe que el mapeo lineal $L(x) = 3x$ mapea $\Gamma \cap [0, \frac{1}{3}]$ homeomórficamente a Γ .
27. Generalice el problema anterior para mostrar que la porción de Γ contenida en un intervalo no removido en la n -ésima etapa de la construcción de Γ es homeomorfo a Γ .
28. Encuentre el exponente de Lyapunov del mapeo *del panadero* generalizado B_μ (del inglés “baker’s map”) y determine los valores de $\mu > 0$ para los cuales B_μ posee sensibilidad a las condiciones iniciales:

$$x \mapsto B_\mu(x) = \begin{cases} 2\mu x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(2x - 1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

29. Sea

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 2 - 3x, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ 3 - 3x, & \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

Encuentre el exponente de Lyapunov de f y muestre directamente que posee sensibilidad a las condiciones iniciales.

30. Un punto y_0 se dice **asintóticamente periódico** si su órbita converge a una órbita periódica $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ para algún período $k \in \mathbb{Z}^+$. En otras palabras, $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - x_n| = 0$.

a) Defina el **número de Lyapunov** $L(x_0)$ de un punto x_0 como

$$L(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_0)| |f'(x_1)| \cdots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}.$$

Demuestre que si L es el número de Lyapunov de x_0 bajo el mapeo f , entonces L^k es el número de Lyapunov de x_0 bajo f^k .

b) Suponga que un punto y_0 es asintóticamente periódico a un punto periódico x_0 tal que $f'(y_k) \neq 0$ para todo k . Demuestre que $\lambda(y_0) = \lambda(x_0)$ siempre que ambos exponentes de Lyapunov existan.

Capítulo 6

Nociones de dinámica simbólica

En el capítulo anterior descubrimos que el mapeo logístico

$$F(x) = rx(1 - x)$$

con $r = 4$ es caótico en el intervalo $[0, 1]$. ¿Pero cómo podemos describir el mapeo logístico para $r > 4$? Sabemos que para $r > 2 + \sqrt{5}$ el conjunto invariante Λ de F es topológicamente equivalente a un conjunto de Cantor. Presumiblemente, está pasando algo “caótico” en la restricción de F a Λ : Dado que Λ es un conjunto hiperbólico repulsor, todos los puntos en Λ tienden a alejarse de sus vecinos bajo iteraciones de F . Pero al mismo tiempo, dado que Λ es invariante, todas las órbitas permanecen confinadas en Λ . Más aún, Λ es compacto, y las órbitas en Λ están contenidas en el intervalo $I = [0, 1]$. Sabiendo todo esto, ¿Cómo caracterizar “fácilmente” la dinámica de F restringida a Λ ?

Para esto, necesitamos incorporar ideas de dinámica simbólica, las cuales nos llevarán a expresar una dinámica cualitativamente equivalente mediante una representación muchísimo más simple y básica. Tan simple y básica que podremos comprender y explicar *completamente* la increíble complejidad del mapeo logístico para $r \geq 4$ de una forma muy sencilla.

Recordemos que dividimos el intervalo $I = [0, 1]$ en $I = I_0 \cup A_0 \cup I_1$; ver figura 5.13. Llamamos Λ al conjunto invariante del mapeo logístico. Dedujimos que para $r > 4$, el conjunto Λ posee las siguientes propiedades:

- Λ está contenido en $I_0 \cup I_1$ y es un conjunto de Cantor topológico.
- Órbitas de puntos en A_0 se van a $-\infty$.

- $\Lambda = I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, donde A_n es el conjunto de puntos en I cuya n -ésima iteración cae en A_0 .

Sabemos que si $x \in \Lambda$, toda su órbita $\mathcal{O}(x)$ está en $I_0 \cup I_1$; ver figura 5.13. Es decir, cada punto de la órbita $\mathcal{O}(x)$ debe caer o bien en I_0 o en I_1 . Esto sugiere introducir el siguiente concepto.

Definición 26 Llamaremos el **itinerario** de x a la sucesión $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, donde

$$s_j = \begin{cases} 0, & \text{si } F^j(x) \in I_0, \\ 1, & \text{si } F^j(x) \in I_1. \end{cases}$$

El itinerario de x es una secuencia infinita de 0's y 1's. Simplemente observamos cómo $F^j(x)$ “rebota” entre I_0 e I_1 y asignamos un 0 o un 1 en la j -ésima coordenada de $S(x)$ dependiendo en cuál intervalo caiga $F^j(x)$.

Ejemplo 39 El punto fijo $x = 0$ tiene itinerario $S(0) = (000\dots)$. El punto $x = 1$ tiene itinerario $S(1) = (1000\dots)$. El punto fijo $x = x^*$ tiene itinerario $S(x^*) = (111\dots)$. Un 2-ciclo que salte entre I_0 e I_1 tiene itinerario $(010101\dots) = (\overline{01}\dots)$ o $(101010\dots) = (\overline{10}\dots)$, donde $\overline{01}$ denota a la secuencia con el bloque 01 repetido infinitamente.

Intentemos ampliar a continuación esta idea de secuencias de símbolos para entender los itinerarios de órbitas más generales.

6.1. Secuencias infinitas de dos símbolos

Sea Σ la colección de todas las secuencias infinitas de 0's y 1's (si se escoge cualquier otro par de símbolos, toda la descripción que sigue resulta equivalente). Así, una secuencia $s \in \Sigma$ si y sólo si $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, donde cada entrada $s_i \in \{0, 1\}$, $\forall i$. En particular, si $x \in \Lambda$, el itinerario $S(x)$ es un punto en el conjunto Σ . Luego, podemos pensar en S como una aplicación $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$, que toma un punto $x \in \Lambda$ y nos entrega el itinerario de la órbita $\mathcal{O}(x)$.

Definición 27 Consideremos dos elementos s, \bar{s} en Σ :

$$s = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

$$\bar{s} = (\bar{s}_0 \bar{s}_1 \bar{s}_2 \dots).$$

Definimos la **distancia entre dos secuencias** s y \bar{s} como:

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i}, \quad \text{donde} \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & s_i = \bar{s}_i, \\ 1, & s_i \neq \bar{s}_i. \end{cases}$$

Notemos que

$$d(s, \bar{s}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Luego, la serie converge y la métrica está bien definida. Con esta noción de distancia, dos secuencias están “cerca” si y solo si *coinciden a lo largo de todo un extenso bloque inicial*. La razón es la siguiente: Si $s_i = \bar{s}_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, entonces $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} \leq \frac{1}{2^n}$. Mientras mayor es n (i.e., mientras más “se parecen” las secuencias), menor es la distancia. Recíprocamente, si $d(s, \bar{s}) < 1/2^n$ (i.e., las dos secuencias son cercanas), entonces $s_i = \bar{s}_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$. **Tarea:** Complete los detalles.

El siguiente teorema nos dice que Σ es topológicamente equivalente al conjunto invariante Λ del mapeo logístico para todo r suficientemente grande.

Teorema 22 *Si $r > 2 + \sqrt{5} \approx 4,236$, entonces la aplicación $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ que toma un punto $x \in \Lambda$ y nos entrega el itinerario de su órbita $\mathcal{O}(x)$ es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. *Paso 1: Probaremos que S es inyectiva.* Sean $x, y \in \Lambda$ y suponga que $S(x) = S(y)$ (i.e., x e y tienen el mismo itinerario) pero $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x < y$. Luego, para cada n , $F^n(x)$ y $F^n(y)$ caen en el mismo lado de $1/2$: I_0 o bien I_1 ; ver figura 5.13. Luego, F es monótona en el intervalo entre $F^n(x)$ y $F^n(y)$, pues F es monótona creciente en I_0 y monótona decreciente en I_1 . En particular, $[F^n(x), F^n(y)] \cap A_0 = \emptyset$. Entonces, todos los puntos en $[F^n(x), F^n(y)]$ permanecen en $I_0 \cup I_1$ cuando les aplicamos F , y por lo tanto, no abandonan el intervalo $[0, 1]$.

Ahora bien, $|F'| > K > 1$ en todos los puntos de este intervalo: Cada iteración de F expande este intervalo en un factor de K . Por lo tanto, la distancia entre $F^n(x)$ y $F^n(y)$ crece sin cota, y así estos dos puntos deben eventualmente caer

en lados opuestos de A_0 . Entonces, $S(x) \neq S(y)$.

Paso 2: Probaremos que S es sobreyectiva. Sea $J \subset I$ un intervalo cerrado. Las preimágenes de J son de la forma

$$F^{-n}(J) = \{x \in I : F^n(x) \in J\}.$$

Por ejemplo, $F^{-1}(J)$ consiste de dos subintervalos, uno en I_0 y otro en I_1 como en la figura 6.1.

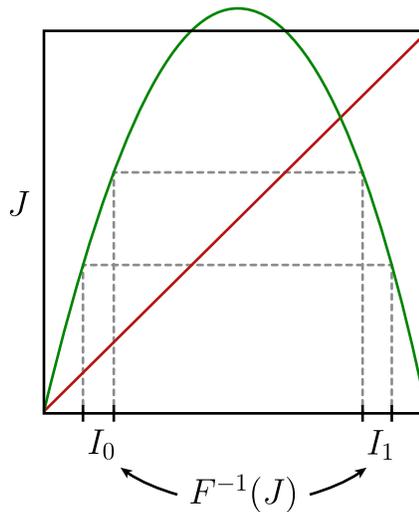


Figura 6.1: Si $J \subset I$ es un intervalo cerrado, su preimagen $F^{-1}(J)$ consiste de dos subintervalos, uno en I_0 y otro en I_1 .

Sea $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$. Debemos hallar $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = s$. Para la secuencia especificada por s definimos:

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= \{x \in I : x \in I_{s_0}, F(x) \in I_{s_1}, \dots, F^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Por ejemplo, $I_{110} = \{x \in I : x \in I_1, F(x) \in I_1, F^2(x) \in I_0\} = I_1 \cap F^{-1}(I_1) \cap F^{-2}(I_0)$.

El conjunto $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ contiene todos aquellos puntos en Λ cuyos itinerarios coinciden con s (al menos) hasta la n -ésima coordenada.

Probaremos que $I_{s_0s_1\dots s_n}$ forma una secuencia anidada de intervalos cerrados no vacíos cuando $n \rightarrow \infty$. En tal caso, $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_n}$ sería no vacío y aquel elemento $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_n}$ es el candidato para tener $S(x) = s$.

Notemos que

$$I_{s_0s_1\dots s_n} = I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1\dots s_n}).$$

Por ejemplo: $I_{110} = I_1 \cap F^{-1}(I_{10}) \subset I_1$ donde $F^{-1}(I_{10}) = F^{-1}(I_1) \cap F^{-2}(I_0)$ pues $I_{10} = I_1 \cap F^{-1}(I_0) \subset I_1$. Por inducción, dado que F es continua e I_0, I_1 son cerrados no vacíos, podemos asumir que $I_{s_1\dots s_n}$ es un subintervalo no-vacío. Entonces, por la observación de la figura 6.1, $F^{-1}(I_{s_1\dots s_n})$ consiste de dos subintervalos cerrados, uno en I_0 y otro en I_1 . Luego, $I_{s_0s_1\dots s_n} = I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1\dots s_n})$ es un solo intervalo cerrado. Estos intervalos son anidados pues

$$I_{s_0s_1\dots s_n} = I_{s_0\dots s_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0\dots s_{n-1}}.$$

Por lo tanto, $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_n}$ es no vacío.

Si $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_n}$, entonces $x \in I_{s_0}$, $F(x) \in I_{s_1}$, etc. Luego, $S(x) = (s_0s_1\dots) = s$. Por lo tanto, S es sobreyectiva.

Notemos que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_n}$ consiste de un único punto, pues S es una biyección. En particular, $\text{diam}(I_{s_0s_1\dots s_n}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Paso 3: Probaremos que S es continua. Sea $x \in \Lambda$ con $S(x) = (s_0s_1s_2\dots)$ y sea $\epsilon > 0$. Sea n tal que $1/2^n < \epsilon$. Considere los subintervalos cerrados $I_{t_0t_1\dots t_n}$ definidos para todas las posibles combinaciones $t_0t_1\dots t_n$ de 0's y 1's. Estos subintervalos son todos disjuntos y Λ está contenido en su unión. Existen 2^{n+1} de tales subintervalos y $I_{s_0s_1\dots s_n}$ —asociado a $S(x) = (s_0s_1s_2\dots)$ — es uno de ellos. Podemos escoger δ tal que si $|x - y| < \delta$ e $y \in \Lambda$ entonces $y \in I_{s_0s_1\dots s_n}$. Luego, $S(y)$ coincide con $S(x)$ en los primeros $n+1$ términos. Luego, se puede comprobar que

$$d(S(x), S(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Paso 4: S^{-1} también es continua: Tarea. ■

6.2. El mapeo shift

El teorema anterior nos dice que, como conjuntos, Λ y Σ son lo mismo, esto es, un Cantor topológico. Ahora esto nos permite construir un mapeo $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definido en el espacio de secuencias Σ con las siguientes propiedades:

1. σ es conjugado a F restringido a Λ ;
2. σ es caótico;
3. σ es lo suficientemente sencillo como para ser completamente entendible como un sistema dinámico.

De esta forma, la codificación en itinerarios que nos da el homeomorfismo S también nos dará una relación de equivalencia entre la dinámica de F en Λ y la de σ en Σ .

Definición 28 *Definimos la aplicación shift como $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ dada por*

$$s = (s_0s_1s_2\dots) \mapsto \sigma(s) = (s_1s_2\dots).$$

Notemos que el mapeo shift toma una secuencia s y la traslada una unidad hacia la izquierda, “olvidando” la primera entrada de la secuencia.

Ejemplo 40 Claramente, σ posee exactamente dos puntos fijos: $(\bar{1})$ y $(\bar{0})$. En particular, las órbitas de secuencias con bloques que se repiten periódicamente **son periódicas** bajo iteración de σ . Por ejemplo, consideremos la secuencia $(\bar{10})$. Tenemos: $\sigma(\bar{10}) = (\bar{01})$, $\sigma(\bar{01}) = (\bar{10})$. Luego, $\sigma^2(\bar{10}) = (\bar{10})$. Por lo tanto, la órbita de $(\bar{10})$ es una órbita de período 2 de σ .

Ejemplo 41 Cada secuencia $(s_0s_1s_2\dots)$ tiene 2 preimágenes por σ : $(0s_0s_1s_2\dots)$ y $(1s_0s_1s_2\dots)$. Por ejemplo, la secuencia $(010\dots)$ tiene como preimágenes $(0010\dots)$ y $(1010\dots)$.

Proposición 7 *La aplicación shift es continua en la métrica de Σ definida anteriormente.*

DEMOSTRACIÓN. Tarea. ■

Queremos estudiar la dinámica de σ en Σ , es decir, el comportamiento de órbitas de puntos en Σ bajo iteración de σ . El siguiente teorema nos da una relación de equivalencia entre σ y el mapeo logístico en su conjunto invariante Λ .

Teorema 23 Si $r > 2 + \sqrt{5} \approx 4,236$, la aplicación $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ es una conjugación entre F y σ .

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que S es un homeomorfismo. Falta probar que $S \circ F = \sigma \circ S$.

Sea $x_0 \in \Lambda$ y supongamos que $S(x_0) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Entonces tenemos: $x_0 \in I_{s_0}$, $F(x_0) \in I_{s_1}$, $F^2(x_0) \in I_{s_2}$, etc. Esto significa que también conocemos el itinerario de $F(x_0)$, esto es, $S(F(x_0)) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$. Así, $S(F(x_0)) = \sigma(S(x_0))$. ■

El resto de esta sección la dedicaremos a encontrar más propiedades sobre el mapeo shift σ . Gracias al teorema anterior, todo lo que digamos sobre σ también será válido para la restricción del mapeo logístico a su conjunto invariante Λ .

Órbitas periódicas de período k . A partir de los ejemplos anteriores, es fácil ver que para cualquier k fijo, las órbitas de σ que tienen período k corresponden a aquellas órbitas de secuencias que contienen bloques de 0's y 1's de longitud k que se repiten periódicamente: $(\overline{s_0 s_1 \dots s_{k-1}})$.

Dado un k fijo, el número de secuencias que tienen un bloque de longitud k que se repite periódicamente es finito (el número de combinaciones de 0's y 1's en bloques de longitud k es finito). Por lo tanto, σ posee un **número infinito numerable de órbitas periódicas** de todos los posibles períodos $k = 1, 2, 3, 4, \dots$. Por ejemplo,

- Período 1: $(\overline{1})$, $(\overline{0})$.
- Período 2: $(\overline{10}) \rightarrow (\overline{01}) \rightarrow (\overline{10})$.
- Período 3: $(\overline{001}) \rightarrow (\overline{010}) \rightarrow (\overline{100}) \rightarrow (\overline{001})$; $(\overline{110}) \rightarrow (\overline{101}) \rightarrow (\overline{011}) \rightarrow (\overline{110})$.
- \vdots

- etc.

Por lo tanto, podemos escribir todas las órbitas periódicas de período k explícitamente!! (es decir, la “dinámica es completamente entendible”) (Imagine haber tenido que escribir las órbitas periódicas de F explícitamente sin conocer la conjugación entre F y σ .)

El conjunto de puntos periódicos es denso en Σ . Dado cualquier punto arbitrario $s = (s_0 \dots s_n s_{n+1} \dots) \in \Sigma$, podemos construir una sucesión de puntos periódicos τ_n que converge a s . En efecto, definimos $\tau_n = (s_0 \dots s_n, s_0 \dots s_n, \dots)$ como la secuencia periódica cuyas entradas coinciden con s hasta la n -ésima coordenada. Luego, $d(\tau_n, s) \leq 1/2^n$. Así, $\tau_n \rightarrow s$, cuando $n \rightarrow \infty$.

σ **posee una órbita densa en Σ .** Es decir, existe un elemento $s^* \in \Sigma$ tal que para cualquier $s \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$, existe un entero n tal que $d(\sigma^n(s^*), s) < \epsilon$.

Construyamos s^* directamente: Consideramos todas las posibles secuencias de 0's y 1s con longitud 1,2,3,... etc.

- Longitud 1: $\{0\}, \{1\}$.
- Longitud 2: $\{00\}, \{01\}, \{10\}, \{11\}$.
- Longitud 3: $\{000\}, \{001\}, \{010\}, \{011\}, \{100\}, \{101\}, \{110\}, \{111\}$.
- \vdots
- etc.

Este proceso está bien definido en un sentido de teoría de conjuntos, pues existen sólo un número finito de posibilidades en cada paso, i.e., existen 2^k secuencias de 0's y 1's de longitud k . Así definimos:

$$s^* = (\underbrace{01}_{\text{long 1}} \mid \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{long 2}} \mid \underbrace{000\ 001\ \dots}_{\text{long 3}} \mid \underbrace{\dots}_{\text{long 4}} \mid \underbrace{\dots}_{\text{etc}}).$$

La secuencia s^* se construye al listar todos los posibles bloques de 0's y 1's de longitud 1, longitud 2, longitud 3, etc. Por construcción, s^* contiene todas las posibles secuencias de 0's y 1's de cualquier longitud!

Demostraremos que la órbita de s^* es densa. Sea $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ un punto arbitrario en Σ y sea $\epsilon > 0$ fijo. Una ϵ -vecindad de $t \in \Sigma$ consiste de todos los puntos $s \in \Sigma$ tales que $d(t, s) < \epsilon$. Por construcción, la secuencia finita $(t_0 t_1 t_2 \dots t_n)$ está contenida en alguna parte en s^* . Luego, para cualquier n debe haber algún entero k tal que

$$\sigma^k(s^*) = (t_0 t_1 t_2 \dots t_n s_{n+1} s_{n+2} \dots)$$

y se tenga $d(\sigma^k(s^*), t) \leq 1/2^k < \epsilon$. Por lo tanto, la órbita de s^* pasa arbitrariamente cerca de cualquier punto en Σ . El razonamiento anterior prueba que la órbita de s^* es densa en Σ y así σ es transitiva. Es posible construir una multitud de otras órbitas densas en Σ simplemente reordenando los bloques en la secuencia s^* .

(Piense lo difícil que sería identificar un punto cuya órbita bajo el mapeo logístico fuese densa en Λ ! A esto nos referimos cuando dijimos anteriormente que la dinámica de σ es “completamente entendible”.)

Sensibilidad a las condiciones iniciales. Queremos considerar puntos cercanos a $s = (s_0 s_1 \dots s_n \dots) \in \Sigma$ y ver cómo evolucionan bajo iteración por σ al compararlos con la órbita de s .

Sea $\epsilon > 0$ fijo. Luego, existe un $N = N(\epsilon)$ tal que la correspondiente vecindad de s incluye el conjunto de secuencias $\bar{s} = (\bar{s}_0 \bar{s}_1 \dots \bar{s}_n \dots) \in \Sigma$ tal que $s_i = \bar{s}_i$, $\forall |i| \leq N$: \bar{s} y s coinciden en las primeras N entradas.

Supongamos que la $(N+1)$ -ésima entrada en la secuencia de \bar{s} es 1 y la $(N+1)$ -ésima entrada en la secuencia de s es 0. Luego, después de N iteraciones (i.e., un número finito de iteraciones), sin importar qué tan pequeño sea ϵ , las secuencias $\sigma^N(s)$ y $\sigma^N(\bar{s})$ están separadas a una distancia fija.

En resumen, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 8 *El mapeo shift σ es caótico en Σ .*

Y gracias a la conjugación en el teorema 23, finalmente podemos concluir que...

Teorema 24 *El mapeo logístico es caótico en Λ cuando $r > 2 + \sqrt{5}$.*

Hemos visto que las técnicas de dinámica simbólica nos entregan un modelo computable para la dinámica del mapeo logístico F en el conjunto Λ , a pesar de que F es caótica en Λ . Similarmente, la estrategia ocupada en este capítulo puede emplearse en otros sistemas: Hallar una conjugación entre el modelo de interés (que puede ser muy complicado de estudiar por sí solo) y un mapeo shift definido en algún espacio de secuencias apropiado, cuyas propiedades ya sean conocidas y más fáciles de describir.

6.3. Mapeo shift en el espacio de secuencias de N símbolos

A modo de ejemplo de un espacio de secuencias un poco más general que podría ser apropiado para estudiar otros sistemas dinámicos, consideremos ahora el conjunto de N símbolos $S = \{1, 2, 3, \dots, N\}$, $N \geq 2$. Definimos el espacio Σ^N de estas secuencias como un producto cartesiano bi-infinito de copias de S :

$$\Sigma^N := \dots \times S \times S \times S \times S \times \dots = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S^i,$$

donde $S^i = S$, $\forall i$. Un punto en Σ^N es una “tupla bi-infinita” de elementos de S , es decir, $s \in \Sigma^N$ si y solo si

$$s = \{\dots s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1, \dots s_n \dots\},$$

donde $s_i \in S$, $\forall i$. Es decir, $s \in \Sigma^N$ es una secuencia bi-infinita donde cada entrada corresponde a alguno de los N símbolos posibles del conjunto S .

Se puede probar que el espacio Σ^N equipado con una métrica apropiada (de hecho, muy parecida a la definida en la sección anterior) es un Cantor topológico:

- compacto;
- totalmente desconexo;
- perfecto, i.e., es cerrado y todo punto en Σ^N es un punto límite de Σ^N .

En particular, como consecuencia, Σ^N es no-numerable.

Consideremos la aplicación *shift* $\sigma : \Sigma^N \rightarrow \Sigma^N$ dada por

$$s = \{\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots\} \mapsto \sigma(s) = \{\dots s_{-2}s_{-1}s_0.s_1s_2\dots\},$$

o bien, $\sigma(s)_i = s_{i+1}$. Cuando el dominio de σ es todo Σ^N , decimos que σ es el *full shift en N símbolos*.

Bajo argumentos similares a los vistos anteriormente, se puede demostrar que $\sigma(\Sigma^N) = \Sigma^N$, i.e., Σ^N es invariante bajo σ , y que el mapeo shift σ es caótico en Σ^N , es decir:

- (a) Existe una cantidad infinita numerable de órbitas periódicas con todos los períodos posibles.
- (b) El conjunto de órbitas periódicas es denso en Σ^N .
- (c) Existe una órbita densa.
- (d) Hay dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

6.4. Ejercicios

1. Sean las secuencias

$$\begin{aligned} s &= (001\ 001\ 001\ \dots) \\ t &= (01\ 01\ 01\ \dots) \\ r &= (10\ 10\ 10\ \dots). \end{aligned}$$

Calcule $d(s, t)$, $d(t, r)$ y $d(s, r)$.

2. Sea Σ el espacio de secuencias infinitas $x = (s_0s_1s_2\dots)$ de dos símbolos 0 y 1, con la métrica d definida en clases.
 - a) Demuestre que el conjunto A de todos los elementos en Σ que comienzan con 10 es cerrado.
 - b) Demuestre que el conjunto B de todos los elementos en Σ que terminan con una secuencia infinita de 1's es denso en Σ .
3. Sea Σ' el subconjunto de todas las secuencias de Σ que satisfacen: Si $s_j = 0$ entonces $s_{j+1} = 1$. En otras palabras, Σ' consiste de solo aquellas secuencias en Σ que nunca tienen dos ceros consecutivos.

- a) Muestre que Σ' es invariante bajo σ y que Σ' es un subconjunto cerrado de Σ .
- b) Muestre que los puntos periódicos de σ son densos en Σ' .
- c) Muestre que existe una órbita densa en Σ' .
- d) ¿Cuántos puntos fijos hay para $\sigma, \sigma^2, \sigma^3$ en Σ' ?
- e) Encuentre una fórmula recursiva para el número de puntos fijos de σ^n en términos del número de puntos fijos de σ^{n-1} y σ^{n-2} .

4. Considere el mapeo tienda en $[0, 1]$:

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2; \\ 2 - 2x, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Defina el itinerario $S(x)$ de un punto $x \in I = [0, 1]$ como $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ donde

$$s_k = \begin{cases} 0, & 0 \leq T_2^k(x) \leq 1/2; \\ 1, & 1/2 \leq T_2^k(x) \leq 1. \end{cases}$$

Note que el máximo de T_2 es 1 y ocurre en $x = \frac{1}{2}$. Para describir la dinámica de T_2 via dinámica simbólica, necesitamos modificar un poco el espacio Σ pues existe una ambigüedad en la secuencia asociada a cualquier número racional de la forma $p/2^k$ donde p es un entero. Por ejemplo, el itinerario de $1/2$ se puede describir como $(11000\dots)$ o bien $(01000\dots)$. Para remediar esto, identificamos como la misma a dos secuencias de la forma $(s_0 \dots s_{k-1} * 1000\dots)$, donde $*$ = 0 o 1. Por ejemplo, las secuencias $(1101000\dots)$ y $(1111000\dots)$ se asumen que representan al mismo punto. Denotemos por Σ' al espacio Σ con estas identificaciones.

- a) Pruebe que $S : I \rightarrow \Sigma'$ es una biyección.
- b) Pruebe que $\sigma \circ S = S \circ T_2$.
- c) Pruebe que T_2 tiene exactamente 2^n puntos periódicos de período n .
- d) Pruebe que T_2 es caótico en I .
- e) Pruebe que T_2 es topológicamente conjugado al mapeo logístico $F_4(x) = 4x(1 - x)$.

5. Sea Σ_N el conjunto de todas las secuencias infinitas de números naturales $1, 2, \dots, N$. Existe un shift natural en Σ_N .

a) ¿Cuántos puntos periódicos tiene σ en Σ_N ?

b) Muestre que σ tiene una órbita densa en Σ_N .

6. Considere Σ^2 , el espacio de secuencias **bi-infinitas** de dos símbolos (0's y 1's), es decir, $s \in \Sigma^2$ si y sólo si $s = \{\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots\}$, con $s_i \in S = \{0, 1\}$, $\forall i$. Definimos la distancia en Σ^2 como $d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}}$, donde

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & s_i = \bar{s}_i, \\ 1, & s_i \neq \bar{s}_i. \end{cases} \quad \text{Demuestre que el mapeo shift}$$

$$s = \{\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots\} \mapsto \sigma(s) = \{\dots s_{-2}s_{-1}s_0.s_1s_2\dots\}$$

es caótico en Σ^2 .

Sugerencia: Intente imitar la demostración hecha en la sección 6.2 para el shift en el espacio de secuencias infinitas de 0's y 1's.

7. Sea Σ^2 el espacio de secuencias bi-infinitas de dos símbolos 0 y 1, con la métrica

$$d(s, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^{|k|}}.$$

a) Demuestre que dos secuencias en Σ^2 son *cercanas* si y solo si coinciden a lo largo de todo un extenso bloque central.

Ayuda: Recuerde que $\sum_{k=m}^{\infty} ar^k = \frac{ar^m}{1-r}$, con $|r| < 1$ y $a \in \mathbb{R}$.

b) Se define el **conjunto estable** de $s^* = (\dots s_{-2}^*s_{-1}^*.s_0^*s_1^*s_2^*\dots) \in \Sigma^2$ como

$$W^s(s^*) = \{t \in \Sigma^2 : d(\sigma^n(t), \sigma^n(s^*)) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty\},$$

donde σ denota el shift en Σ^2 . Demuestre que el conjunto estable $W^s(s^*)$ consiste de todas aquellas secuencias cuyas entradas coinciden con las de s^* a partir de alguna posición hacia la derecha.

c) Describa las entradas de una secuencia s **homoclínica** a

$$(\mathbf{0}) = (\dots 00,000 \dots) \in \Sigma^2,$$

es decir, $s \in W^s(\mathbf{0}) \cap W^u(\mathbf{0})$, donde el **conjunto inestable** de una secuencia s^* se define como

$$W^u(s^*) = \{t \in \Sigma^2 : d(\sigma^{-n}(t), \sigma^{-n}(s^*)) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty\}.$$

d) Demuestre que el conjunto de secuencias homoclínicas a $(\mathbf{0})$ es denso en Σ^2 .

8. Considere el mapeo unidimensional

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 1/2; \\ 4 - 4x, & x > 1/2; \end{cases}$$

y el conjunto

$$\Lambda = \{x \in [0, 1] : f^n(x) \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}\}$$

de puntos que nunca abandonan el intervalo $[0, 1]$ bajo iteración de f . Defina el itinerario $s(x)$ de un punto $x \in \Lambda$ como $s(x) = (a_0 a_1 a_2 \dots)$ donde

$$a_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq f^i(x) < 1/2; \\ 1, & 1/2 < f^i(x) \leq 1. \end{cases}$$

a) Muestre mediante una iteración gráfica (o diagrama de telaraña) que cualquier condición inicial $x_0 \notin [0, 1]$ se escapa a $-\infty$ bajo iteración de f . Es decir, si $x_0 \notin [0, 1]$, entonces $f^n(x_0) \rightarrow -\infty$ a medida que $n \rightarrow \infty$.

b) Dibuje la gráfica de f^2 . Muestre gráficamente la existencia de puntos fijos y puntos 2-periódicos de f y determine si son estables o no.

c) Describa brevemente cómo espera que sea la gráfica de f^n , para $n \geq 3$.
Sugerencia: Use un argumento inductivo.

d) Calcule la órbita de $\frac{1}{65}$. ¿Cuál es el itinerario de $\frac{1}{65}$?
Sugerencia: Use fracciones!

- e) Muestre que $p_k = \frac{1}{4^k + 1}$ converge a una órbita periódica de período k para cualquier entero $k \geq 1$. ¿Cuál es el itinerario de $p_k = \frac{1}{4^k + 1}$?
- f) Dé un argumento para afirmar que Λ es un conjunto de Cantor y que la dinámica de f restringida a Λ es caótica.

9. Investigue el comportamiento del sistema dinámico discreto dado por la función cúbica $f_\lambda(x) = \lambda x - x^3$. Intente probar rigurosamente todos los puntos siguientes.

- a) Describa la dinámica de esta familia de funciones f_λ para todo $\lambda < 1$.
- b) Describa la bifurcación que ocurre en $\lambda = -1$.
Ayuda: Note que f_λ es una función impar. En particular, ¿Qué pasa cuando el gráfico de f_λ cruza la recta $y = -x$?
- c) Describa la dinámica de f_λ cuando $-1 < \lambda < 1$.
- d) Describa la bifurcación que ocurre en $\lambda = 1$.
- e) Encuentre un valor λ^* para el cual f_{λ^*} tiene un par de intervalos invariantes $[-x^*, 0]$ y $[0, x^*]$ en cada uno de los cuales el comportamiento de f_λ imita al de la función logística $4x(1 - x)$.
- f) Describa el cambio en la dinámica que ocurre cuando λ crece desde λ^* .
- g) Describa la dinámica de f_λ cuando λ es muy grande. Describa el conjunto de puntos Λ_λ cuyas órbitas no se escapan a $\pm\infty$ en este caso.
- h) Use dinámica simbólica para armar un espacio de secuencias y un correspondiente mapeo shift para λ grande. Demuestre que f_λ es caótico en Λ_λ .
- i) Encuentre el valor de parámetro $\lambda' > \lambda^*$ de arriba para el cual es válido el análisis de los dos puntos anteriores.
- j) Describa la bifurcación que ocurre cuando λ crece desde λ' .

Capítulo 7

La herradura de Smale

El mapeo logístico del capítulo anterior está cercanamente relacionado con otro ejemplo, la herradura de Smale, el cual es un conjunto invariante hiperbólico que ha sido un ejemplo catalizador del desarrollo de la teoría moderna de los sistemas dinámicos. Este ejemplo está descrito en términos de un mapeo planar invertible y también lo podemos estudiar ocupando dinámica simbólica. Este sistema discreto 2D puede pensarse como un mapeo de Poincaré de una ecuación diferencial autónoma tridimensional o proveniente de un problema de un oscilador forzado (como veremos más adelante en la sección 8.1).

Consideremos la siguiente construcción geométrica como en la figura 7.1. Sea S un cuadrado en el plano. Apliquemos una contracción en la dirección horizontal, seguido de una dilatación en la dirección vertical. El objeto resultante dóblelo por la mitad y colóquelo de tal forma que intersecte al cuadrado original S a lo largo de dos bandas verticales.

Este proceso define un mapeo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La imagen $f(S)$ del cuadrado S se parece a una herradura. Por ello, se habla del **mapeo herradura** o **horseshoe map**. La forma exacta de $f(S)$ es irrelevante para nuestros propósitos. Por simplicidad, podemos asumir que la contracción y la expansión son lineales y que las bandas verticales $f(S) \cap S$ en la intersección son rectángulos. El mapeo f se puede hacer invertible y suave junto con su inversa (i.e., un difeomorfismo). En particular, note que f^{-1} transforma la herradura $f(S)$ de vuelta en el cuadrado S . Más aún, f^{-1} mapea el cuadrado punteado S en una herradura punteada horizontal de forma que $f^{-1}(S) \cap S$ son dos bandas horizontales. Al iterar este proceso repetidas veces, el objeto con forma de herradura $f(S)$ se va elongando y

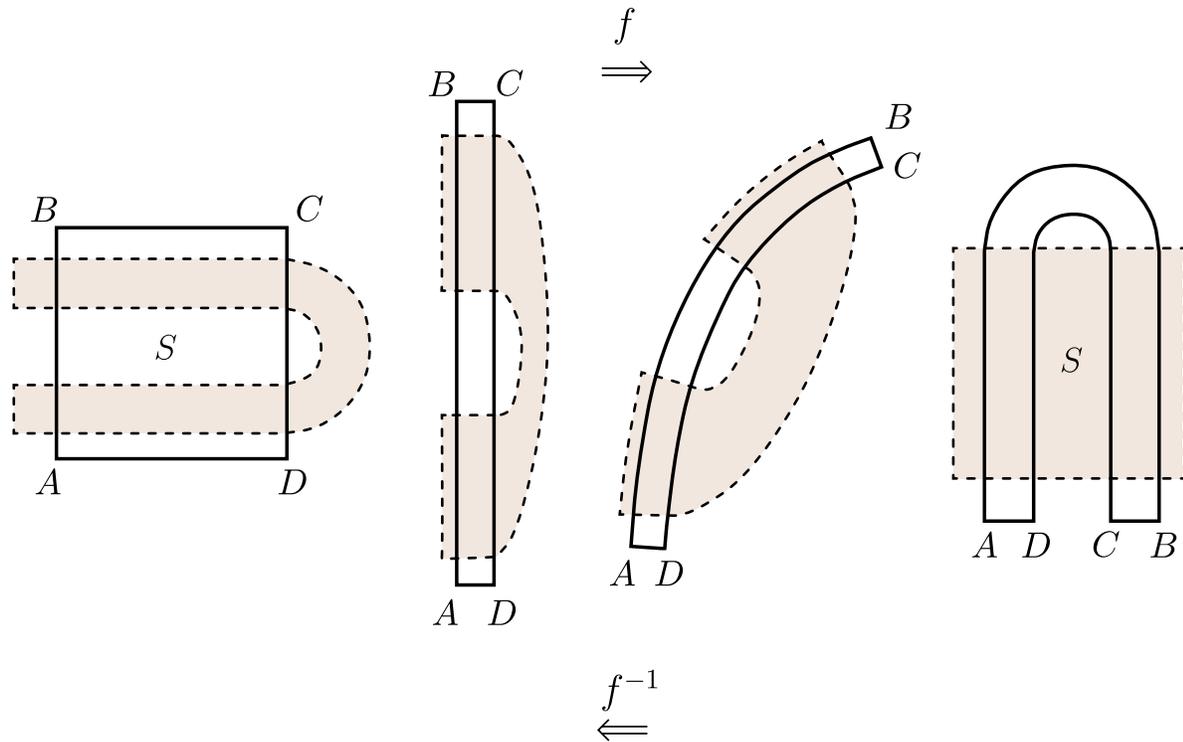


Figura 7.1: Contraer, estirar y doblar: la construcción de la herradura de Smale.

doblando progresivamente como en la figura 7.2 donde se muestran $f(S)$, $f^2(S)$ y $f^3(S)$.

Describamos con un poco más de detalle las segundas iteraciones $f^2(S)$ y $f^{-2}(S)$. Denotemos las bandas verticales por $f(S) \cap S = \{V_1, V_2\}$ como en la figura 7.3. Bajo la 2da iteración de f , las bandas verticales $V_{1,2}$ serán transformadas en una herradura más delgada (contraída, estirada y doblada) que intersecta el cuadrado S a lo largo de cuatro bandas verticales más angostas (ver figura 7.2). Más específicamente:

$$S \cap f(V_1) = V_{11} \cup V_{12}, \quad S \cap f(V_2) = V_{21} \cup V_{22}.$$

Se tiene: $S \cap f(S) \cap f^2(S) = V_{11} \cup V_{12} \cup V_{21} \cup V_{22}$ (es decir, $4 = 2^2$ bandas verticales). Similarmente, $S \cap f^{-1}(S) = H_1 \cup H_2$. Luego, $S \cap f^{-1}(S) \cap f^{-2}(S) = H_{11} \cup H_{12} \cup H_{21} \cup H_{22}$ (i.e., $4 = 2^2$ bandas horizontales delgadas).

La relación entre las bandas horizontales y verticales se puede apreciar mediante la figura 7.4. Notemos que $f(H_i) = V_i$, $i = 1, 2..$ Equivalentemente,

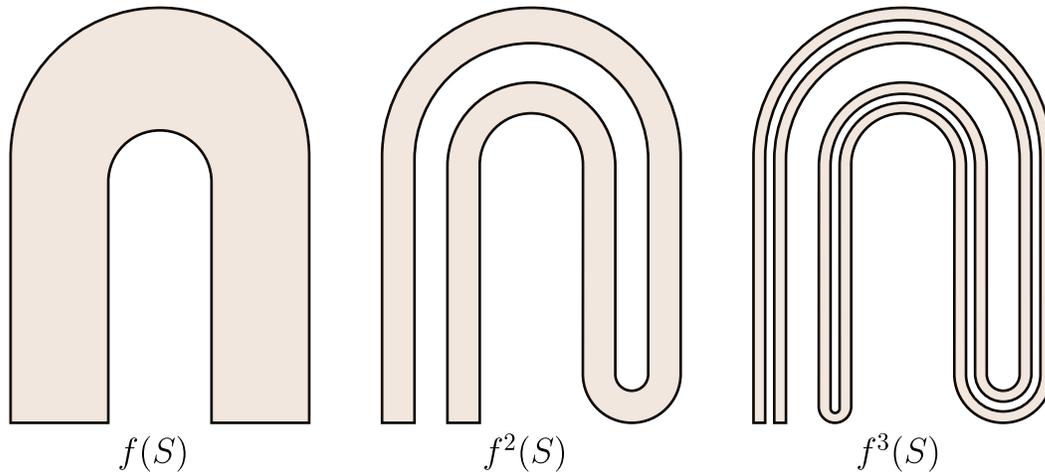


Figura 7.2: Contraer, estirar y doblar: iteraciones adicionales de la herradura.

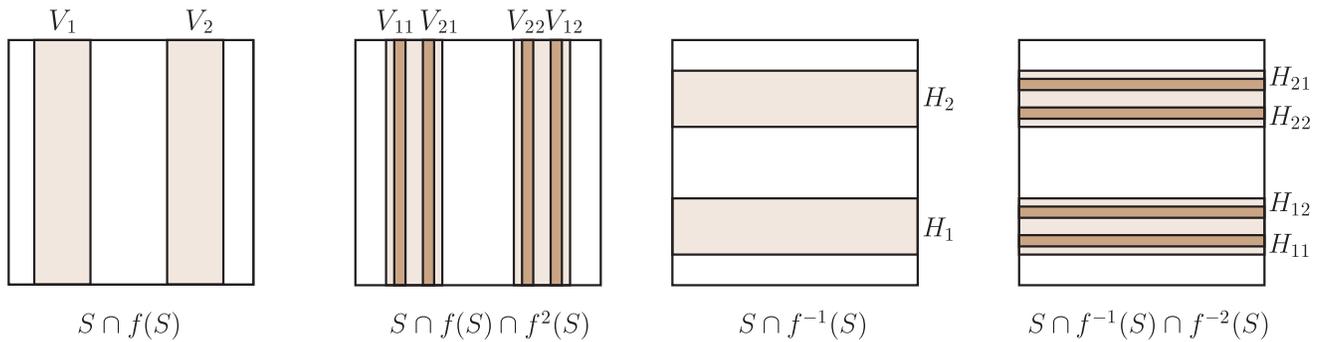


Figura 7.3: 2da iteración de f y f^{-1} en la herradura de Smale.

$f^{-1}(V_i) = H_i$, $i = 1, 2$. Del mismo modo: $f^2(H_{ij}) = V_{ij}$, $i = 1, 2$. O equivalentemente, $f^{-2}(V_{ij}) = H_{ij}$, $i = 1, 2$. Es decir, bandas horizontales son llevadas a bandas verticales bajo iteraciones de f , y viceversa bajo iteraciones de f^{-1} . Iterando aún más el mapeo f obtenemos que la intersección $S \cap f^k(S)$ consiste en 2^k bandas verticales. Similarmente, las iteraciones de f^{-1} nos dan 2^k bandas horizontales en $S \cap f^{-k}(S)$.

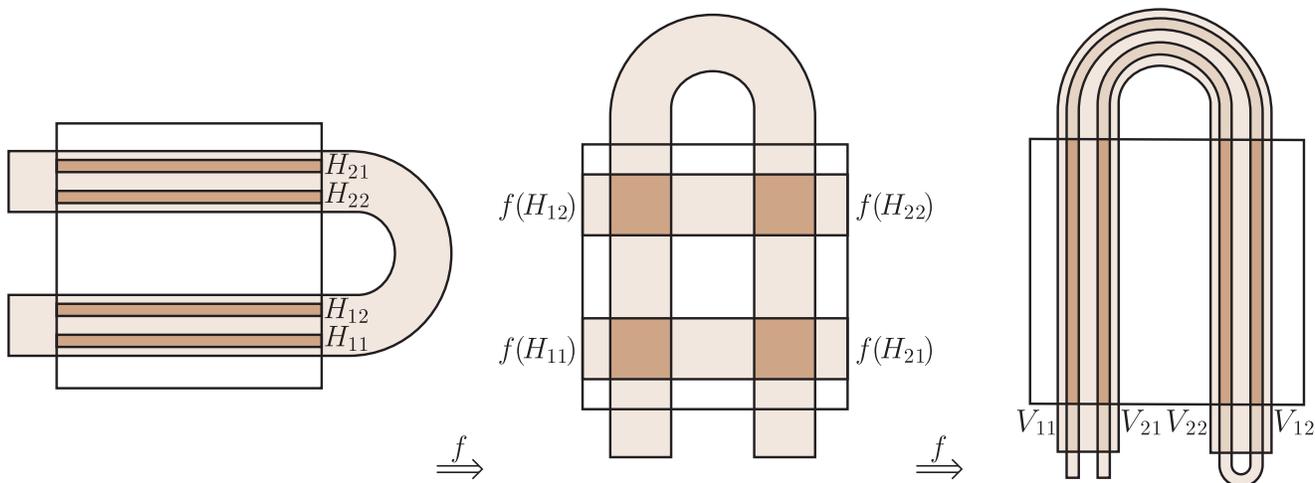


Figura 7.4: 2da iteración de f y f^{-1} en la herradura de Smale.

7.1. El conjunto invariante Λ

Notemos que la mayoría de los puntos abandonan el cuadrado S bajo iteración de f o f^{-1} . Al igual que con el mapeo logístico en el capítulo anterior, estos puntos no nos interesan. En cambio, nos enfocamos en aquellos puntos cuyas órbitas permanecen en S bajo **todas** las iteraciones de f y f^{-1} :

$$\Lambda = \{x \in S : f^k(x) \in S, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si el conjunto Λ es no-vacío, es un *conjunto invariante* del sistema dinámico discreto definido por f . Escrito en forma equivalente tenemos:

$$\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(S).$$

Es decir,

$$\Lambda = \dots \cap f^{-k}(S) \cap \dots \cap f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S) \cap \dots \cap f^k(S) \cap \dots$$

Por lo tanto, cada punto $x \in \Lambda$ posee una órbita que debe estar contenida en **cada uno** de los conjuntos $f^{\pm k}(S)$.

El conjunto Λ debe tener una forma peculiar. Λ debe estar contenido en $f^{-1}(S) \cap S \cap f(S)$, que consiste de 4 cuadrados a partir de la intersección de

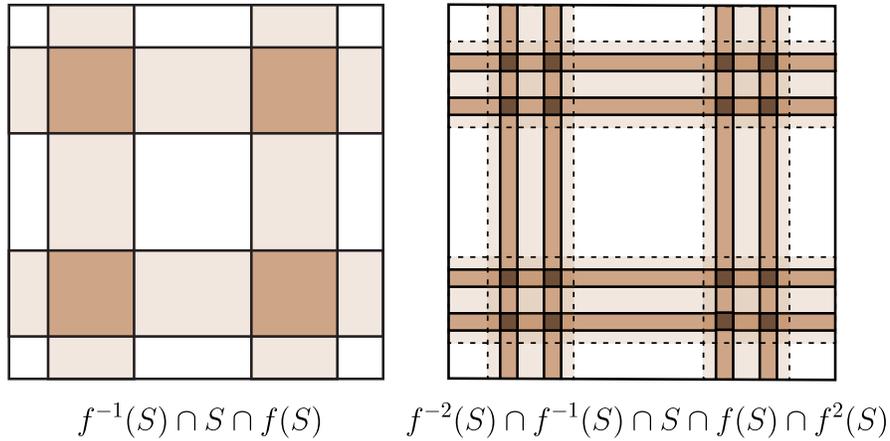


Figura 7.5: Intersecciones de bandas horizontales y verticales en la herradura de Smale.

dos bandas verticales y 2 bandas horizontales. Además, Λ debe estar contenido en $f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S)$. Este conjunto consiste de 16 cuadrados más pequeños. Y así sucesivamente... En el límite,

$$\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(S)$$

es un conjunto de Cantor topológico en el plano: sus componentes son puntos y cada punto en Λ es un punto de acumulación para Λ .

Podemos lograr una descripción más completa de la herradura la cual contenga información sobre la dinámica de cada punto al ocupar el método de la dinámica simbólica. Concretamente, consideramos el espacio Σ^2 de secuencias bi-infinitas de 2 símbolos presentado en la sección 6.3. Así, tenemos...

Lema 2 *Existe una biyección $h : \Lambda \rightarrow \Sigma^2$, entre puntos de Λ y el conjunto Σ^2 de todas las secuencias bi-infinitas de dos símbolos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \Lambda$, y definamos una secuencia de dos símbolos $\{1, 2\}$

$$h(x) = \omega = \{ \dots \omega_{-2} \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots \} \in \Sigma^2,$$

mediante la fórmula

$$\omega_k = \begin{cases} 1, & f^k(x) \in H_1, \\ 2, & f^k(x) \in H_2, \end{cases}$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Aquí, f^0 es la identidad.

Notemos que la secuencia $\omega = h(x)$ contiene la información sobre todo el itinerario de $x \in \Lambda$ y su órbita! Por ejemplo, el itinerario futuro de x viene dado por las coordenadas ω_k , con $k > 0$; el itinerario pasado de x , por las coordenadas ω_k , con $k < 0$.

Demostraremos que la transformación h es invertible. Específicamente, encontremos la (única) preimagen $x = h^{-1}(\omega)$ de una secuencia arbitraria $\omega \in \Sigma^2$. En primer lugar, escojamos un $m > 0$ fijo (que sirva para truncar la secuencia ω). Luego, consideremos el conjunto $R_m(\omega)$ de todos los puntos $x \in S$, no necesariamente en Λ , tales que la k -ésima iteración, $f^k(x)$, cae en la misma banda horizontal asociada a la coordenada ω_k , i.e.,

$$f^k(x) \in H_{\omega_k}, \quad -m \leq k \leq m.$$

Es decir, todos los puntos $x \in R_m(\omega) \subset S$ poseen órbitas (truncadas) cuyas secuencias de símbolos coinciden con la secuencia truncada de ω . Luego, todos los puntos en $R_m(\omega)$ son candidatos a preimagen de ω . Por ejemplo, si $m = 1$, el conjunto R_1 es una de las cuatro intersecciones $V_j \cap H_k$ en la figura 7.5. En general, R_m pertenece a la intersección de una banda vertical y una banda horizontal.

A medida que $m \rightarrow \infty$, estas bandas se vuelven más y más delgadas, convergiendo **en el límite a segmentos unidimensionales verticales y horizontales**, respectivamente. Tales segmentos obviamente se intersectan en un único punto x con $h(x) = \omega$. Por lo tanto, h es biyectiva y, en particular, Λ es no-vacío. ■

Se puede demostrar que la transformación $h : \Lambda \rightarrow \Sigma^2$ es un *homeomorfismo* en la métrica estándar de $S \subset \mathbb{R}^2$ y la métrica de Σ^2 introducida en la sección 6.3.

Ahora bien, considere $x \in \Lambda$ y su correspondiente secuencia $\omega = h(x)$. Entonces, por definición, el punto $y = f(x) \in \Lambda$ también posee una secuencia $\theta = h(y)$. ¿Cuál es la relación entre las secuencias ω y θ ? Notemos que $y = f(x)$ está en la misma órbita de x . Luego, el *itinerario* de y —dado por la secuencia θ —, debe coincidir con el de x al desplazar una coordenada de $\omega = h(x)$ a la izquierda. Luego: $\theta_k = \omega_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. En otras palabras, la secuencia θ se puede obtener a partir de ω mediante el *mapeo shift* σ actuando en el espacio de secuencias bi-

infinitas de dos símbolos! Concretamente, podemos probar que la dinámica en el conjunto invariante Λ es caótica:

Lema 3 *La restricción de f a su conjunto invariante $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ es conjugada al mapeo shift σ en el conjunto de secuencias bi-infinitas Σ^2 mediante el homeomorfismo h del lema 2, es decir, $h(f(x)) = \sigma(h(x))$, para todo $x \in \Lambda$.*

Teorema 25 (Smale, 1963). *El mapeo herradura f posee un conjunto invariante Λ que contiene un conjunto numerable de órbitas periódicas de periodo arbitrariamente alto, y un número no-numerable de órbitas aperiódicas, entre las cuales hay órbitas que pasan arbitrariamente cerca de cualquier punto de Λ .*

Como consecuencia de este resultado, podemos decir que hay una especie de movimiento “aleatorio” en Λ : Para cualquier secuencia de dos símbolos generada aleatoriamente —y así prescribiendo de antemano el itinerario de visitas a las bandas H_1 y H_2 —, existe una órbita en Λ que muestra exactamente el mismo comportamiento. El ejemplo de la herradura de Smale nos entrega una buena base intuitiva para la manera en la cual las órbitas de un mapeo discreto —y por lo tanto, de una ecuación diferencial ordinaria— pueden ser caóticas.

Más aún, el caos en la herradura de Smale es *estructuralmente estable*, es decir, persiste ante pequeñas perturbaciones. En efecto, la construcción de Smale se basa en procesos de contracción/expansión suficientemente fuertes, combinados con un dobléz. Luego, una perturbación (suave) \tilde{f} tendrá bandas horizontales y verticales similares, las cuales ya no serán rectángulos sino regiones curvilíneas. Si la perturbación es suficientemente pequeña, estas bandas, en el límite, se encogerán a *curvas* que se aproximan a segmentos rectos verticales y horizontales. Luego, la construcción puede llevarse a cabo similarmente, y el mapeo perturbado \tilde{f} tendrá un conjunto invariante $\tilde{\Lambda}$ en el cual la dinámica queda completamente descrita por el mapeo shift σ en el espacio de secuencias Σ^2 .

7.2. Estructura hiperbólica de la herradura

Las herraduras de Smale aparecen en forma natural en muchos sistemas caóticos y nos ayudan a estudiar y a entender sus conjuntos invariantes. Una de las

principales preguntas que uno puede hacerse entonces es cuándo una órbita “típica” debería mostrar características dinámicas caóticas como las de la herradura. Por ejemplo, en cada iteración un punto de Λ es contraído en una dirección y dilatado en otra a tasas exponenciales: debido a esta propiedad decimos que Λ posee una *estructura hiperbólica* (De hecho, ya habíamos adelantado esta característica al inicio de este capítulo). Esta cualidad geométrica se puede generalizar para extender el análisis de la herradura a conjuntos invariantes generales para así determinar propiedades dinámicas caóticas en otros ejemplos particulares. La definición formal del caso general n -dimensional es la siguiente.

Definición 29 *Sea Λ un conjunto invariante para el sistema dinámico discreto $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una **estructura hiperbólica** para Λ es una descomposición en suma directa, invariante y continua, $T_\Lambda \mathbb{R}^n = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^s$, con la propiedad de que hay constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$, tales que:*

1. Si $v \in E_x^u$, entonces $|Df^{-n}(x)v| \leq C\lambda^n|v|$;
2. Si $v \in E_x^s$, entonces $|Df^n(x)v| \leq C\lambda^n|v|$.

OBSERVACIONES:

1. En esta definición, $T_\Lambda \mathbb{R}^n$ consiste de todos los vectores tangentes a \mathbb{R}^n en todos los puntos de Λ . Para cada $x \in \Lambda$, $T_x \mathbb{R}^n$ es el espacio tangente en x y $T_x \mathbb{R}^n = E_x^u \oplus E_x^s$ es una suma directa separando este espacio vectorial en subespacios de dimensiones u y s , con $u + s = n$.
2. La derivada Df de f mapea $T_x \mathbb{R}^n$ en $T_{f(x)} \mathbb{R}^n$. Como Λ es invariante bajo f entonces $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ y $Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$.
3. La continuidad de la descomposición en suma directa significa que a medida que x varía en Λ , uno puede hallar bases para $E^u(x)$ y $E^s(x)$ que varían continuamente. En general, la separación en suma directa no se puede tomar suave.
4. Las condiciones de hiperbolicidad 1 y 2 dicen que, infinitesimalmente, los vectores en E^s (resp. E^u) son contraídos exponencialmente en tiempo positivo (resp. negativo) a una tasa exponencial λ la cual es uniforme para todos

los puntos de Λ y para todas las elecciones de vectores en los subespacios invariantes.

Ejemplo 42 La herradura Λ posee una estructura hiperbólica. La división $E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^s$ en cada punto $x \in \Lambda$ viene dada al tomar apropiadamente piezas de los conjuntos $\cap_{n=0}^{\infty} f^n(S)$ y $\cap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(S)$, respectivamente, i.e., iteraciones al futuro y al pasado del cuadrado S . Cada uno de estos conjuntos intersecta S en un conjunto de Cantor de segmentos. Así, para cada x , E_x^u es una línea vertical y E_x^s es una línea horizontal; ver figura 7.6. Más aún, si las tasas lineales de contracción y expansión de f en S son μ^s y μ^u , respectivamente, entonces podemos obtener las estimaciones de la definición anterior como $\lambda = \max\{\mu^s, 1/\mu^u\}$ y $C = 1$. La separación en suma directa es constante pues asumimos que el mapeo es lineal en cada pieza con los mismos vectores propios.

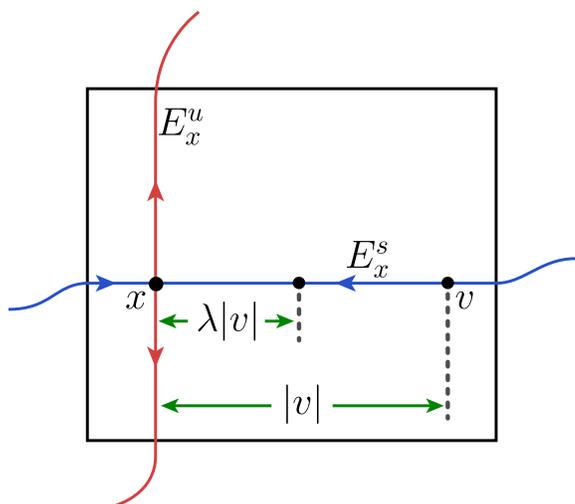


Figura 7.6: Una división en suma directa para puntos en la herradura.

Aunque las herraduras no son atractores, su presencia en sistemas dinámicos discretos tiene importantes consecuencias para fenómenos físicamente observables en aplicaciones. (Si los mapeos en cuestión son mapeos de Poincaré para flujos, entonces se tienen observaciones similares para las soluciones de las ecuaciones diferenciales asociadas.) La dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en un

sistema que posee una herradura se puede entender en términos de la estructura de los conjuntos E_Λ^s y E_Λ^u . Para la herradura de nuestro ejemplo, cada uno de estos conjuntos es el producto de un intervalo con un conjunto de Cantor. Esto implica que, si x está en una órbita asintótica a una órbita γ_1 en Λ , entonces en cualquier vecindad de x hay puntos y cuyas órbitas son asintóticas a órbitas $\gamma_j \subset \Lambda$ con secuencias de símbolos las cuales difieren completamente de la de γ_1 después de un número suficientemente grande de coordenadas. Además, existen conjuntos abiertos de órbitas comenzando cerca de x las cuales eventualmente se escapan de una vecindad de Λ , alejándose “paralelas” a diferentes miembros (i.e., fibras) del conjunto inestable E^s . Por lo tanto, órbitas que comienzan cercanas pueden tener destinos muy diferentes.

Las órbitas asintóticas a Λ forman una variedad estable, $W^s(\Lambda)$, la cual puede formar fronteras muy complicadas para los dominios de atracción de diferentes atractores: en efecto, la herradura se comporta como una suerte de punto silla caótico (aunque con una estructura topológica bastante más complicada que un punto!). Luego, cuando hay herraduras presentes en un sistema, uno espera ver largos transientes caóticos antes de que las órbitas “se asienten” a equilibrios o comportamiento periódico. Mientras que casi todas las órbitas (con respecto a la medida de Lebesgue) pasando cerca de Λ eventualmente abandonan su vecindad, la presencia de Λ afecta dramáticamente su comportamiento.

El teorema de la variedad estable para conjuntos hiperbólicos a continuación expresa en forma concisa la manera en que los puntos de un conjunto invariante hiperbólico se comportan como sillas, y también nos lleva a una caracterización topológica de la naturaleza caótica de la dinámica dentro del conjunto invariante.

Teorema 26 *Sea Λ un conjunto invariante compacto para un C^r -difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con una estructura hiperbólica $E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^s$. Entonces existe $\epsilon > 0$ y existen dos colecciones de variedades de clase C^r , $W_\epsilon^s(x)$, $W_\epsilon^u(x)$, $x \in \Lambda$, las cuales tienen las siguientes propiedades:*

1. $y \in W_\epsilon^s(x)$ si y solo si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon$ para todo $n \geq 0$.
 $y \in W_\epsilon^u(x)$ si y solo si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon$ para todo $n \leq 0$.
2. Los espacios tangentes a $W_\epsilon^s(x)$ y $W_\epsilon^u(x)$ en x son E_x^s y E_x^u , respectivamente.

3. Existen constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ tales que si $y \in W_\epsilon^s(x)$, entonces

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\lambda^n$$

para $n \geq 0$, y si $y \in W_\epsilon^u(x)$, entonces

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C\lambda^n$$

para $n \geq 0$.

4. $W_\epsilon^s(x)$ y $W_\epsilon^u(x)$ son discos incrustados en \mathbb{R}^n . Las aplicaciones de Λ al espacio de funciones de incrustaciones C^r de discos en \mathbb{R}^n dadas por $x \mapsto W_\epsilon^s(x)$ y $x \mapsto W_\epsilon^u(x)$ son continuas.

El significado de la propiedad 4 y la demostración del teorema de la variedad estable requiere más discusión sobre espacios de funciones y sus topologías, lo cual se escapa de las metas de este apunte.

7.3. Puntos homoclínicos y estructura homoclínica de Poincaré

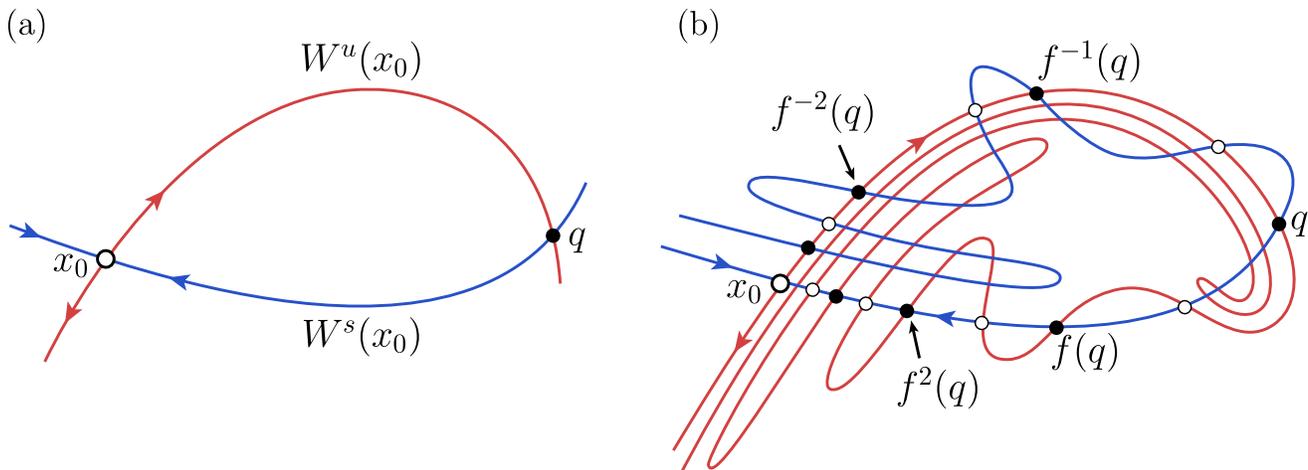


Figura 7.7: Estructura homoclínica de Poincaré.

Consideremos un punto fijo silla x_0 de un sistema discreto planar de la forma

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{7.1}$$

con f un difeomorfismo suficientemente suave con respecto a x . Y supongamos que el punto silla x_0 posee multiplicadores positivos. A diferencia de las variedades estable e inestable de un equilibrio en un sistema continuo, las variedades $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ de un sistema discreto genérico se pueden intersectar transversalmente, es decir, formando un ángulo no nulo. El punto $q \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ se dice un **punto homoclínico**; ver figura 7.7(a).

Una intersección transversal de $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$, si existe, implica un número *infinito* de tales intersecciones. ¿Cómo es esto posible? Por definición, q pertenece a ambas variedades invariantes. Luego, $f^k(q) \rightarrow x_0$, si $k \rightarrow \infty$; asimismo, $f^k(q) \rightarrow x_0$, si $k \rightarrow -\infty$. Luego, la órbita $\mathcal{O}(q) = \{\dots, f^{-2}(q), f^{-1}(q), q, f(q), f^2(q), \dots\}$ que comienza en q también converge (monótonamente) a x_0 para $k \rightarrow \pm\infty$. Esto quiere decir que todos los puntos en $\mathcal{O}(q)$ son homoclínicos. Por lo tanto, hay una cantidad infinita de intersecciones entre $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$; ver figura 7.7(b). Este número infinito de intersecciones fuerza a las variedades a “oscilar” de manera complicada cerca de x_0 . Además, el teorema conocido como *Lambda Lemma* o *lema de inclinación*, probado por Palis, implica que la existencia de puntos homoclínicos obliga a que $W^u(x_0)$ se acumule en sí mismo (similarmente para $W^s(x_0)$). La red que se forma con las infinitas intersecciones de $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ y las respectivas acumulaciones de estas variedades en sí mismas es llamada una **estructura homoclínica de Poincaré** o **enredo homoclínico** (homoclinic tangle, en inglés). En conclusión, la presencia de la estructura homoclínica puede hacer que la intersección de las variedades $W^{s,u}(x_0)$ con cualquier vecindad de x_0 sea altamente no trivial.

Las consecuencias dinámicas de la existencia de la estructura homoclínica también son dramáticas. Sea S un rectángulo “curvilíneo” cerca de $W^s(x_0)$, y consideremos las iteraciones $f^k(S)$. Si existe la estructura homoclínica, la imagen de S se debe contraer en la dirección de $W^s(x_0)$, expandir en la dirección de $W^u(x_0)$, y luego doblarse. Luego, para un número suficientemente grande de iteraciones $N > 0$, el conjunto $f^N(S)$ lucirá como la banda doblada y expandida $Q = f^N(S)$ de la figura 7.8. La intersección de S con Q forma varias herraduras de Smale, donde *cada una de ellas* posee una estructura hiperbólica e implica un número infinito de puntos periódicos con período arbitrariamente alto, una cantidad no numerable de órbitas aperiódicas, transitividad, y sensibilidad a las condiciones

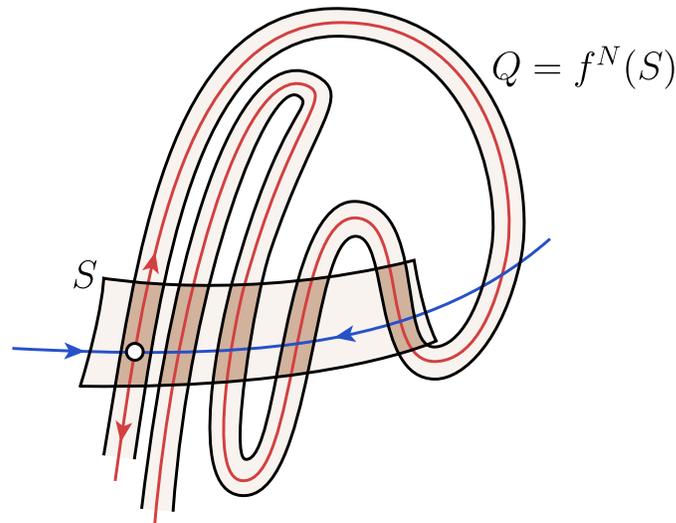


Figura 7.8: Herraduras de Smale incrustadas en la estructura homoclínica de Poincaré.

iniciales; en definitiva, caos.

La aparición de una estructura homoclínica también puede darse en aplicaciones de retorno de Poincaré de una órbita periódica de un sistema continuo (un campo de vectores o sistema de EDOs). En tal caso, el punto homoclínico corresponde a una órbita homoclínica al ciclo, en cuya vecindad hay un conjunto invariante caótico que contiene un número infinito de ciclos de tipo silla y una cantidad no-numerable de órbitas aperiódicas caóticas.

Ejemplo 43 (El mapeo de Hénon) Considere la transformación planar no-lineal

$$F : x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n.$$

Aquí $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Si $b \neq 0$, el mapeo es invertible y diferenciable. En el límite cuando $b \rightarrow 0$, el mapeo F se aproxima a un equivalente del mapeo logístico $x \mapsto 1 - ax^2$.

Al fijar $b = 0,3$ e incrementar $a \in (0, 1,5)$, uno encuentra una cascada de duplicaciones de período que culminan en la generación del atractor (caótico) de Hénon para $a = 1,4$; ver figura 7.9. El atractor de Hénon tiene una estructura de Cantor en la dirección transversal (es autosimilar/fractal en escalas arbitrariamente pequeñas), pero es suave en la sección longitudinal.

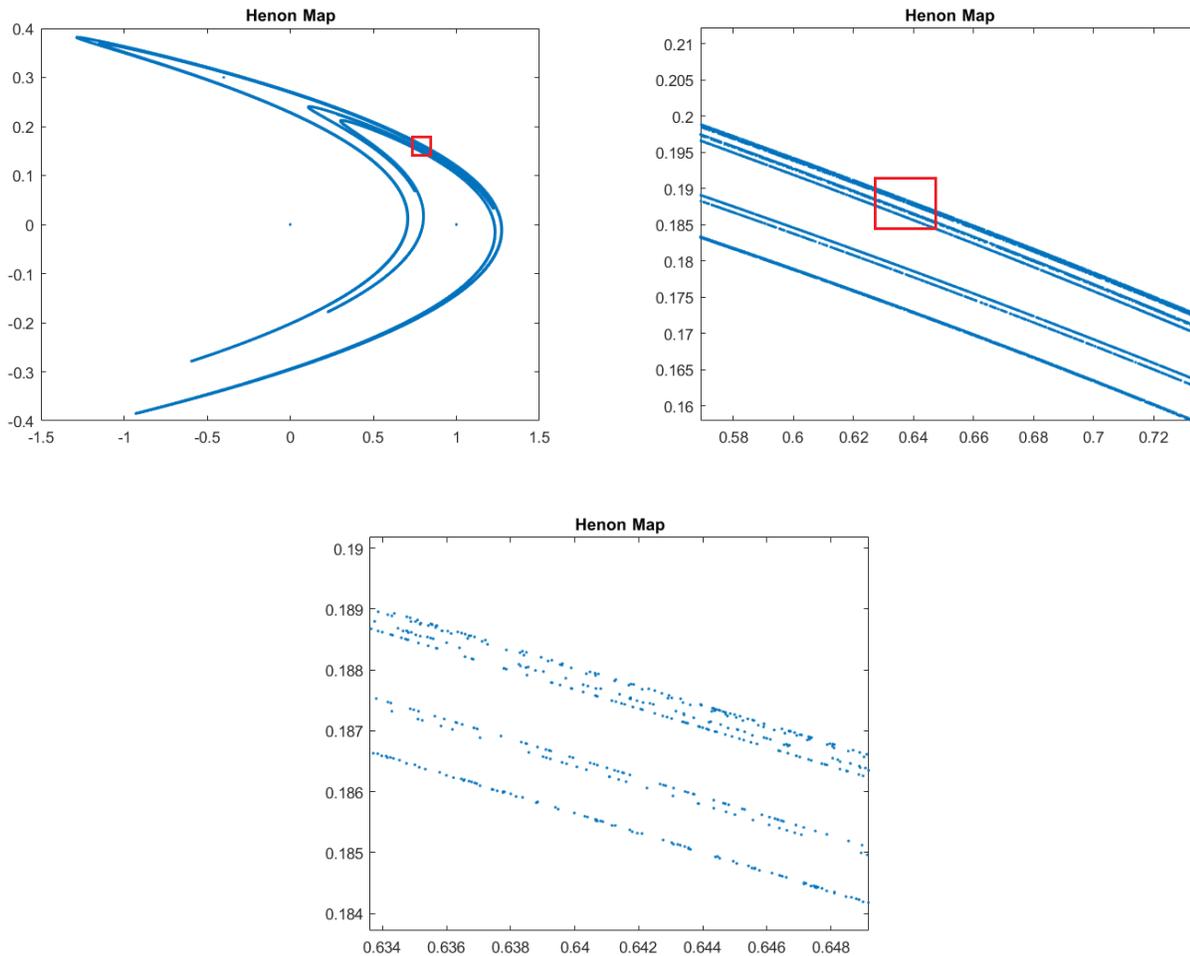


Figura 7.9: El atractor caótico del mapeo de Hénon.

El atractor es la clausura de una rama de la variedad inestable de un punto silla p ubicado en el borde del atractor. La variedad inestable $W^u(p)$ (“curva” roja en la figura 7.10) traza una curva que se dobla una y otra vez “dibujando” la forma del atractor. Por otro lado, la variedad estable $W^s(p)$ también es una “curva” (en azul en la figura 7.10), la cual realiza excursiones muy grandes, pero sigue volviendo cerca del atractor. Esto sucede pues $W^s(p)$ *intersecta* la variedad inestable $W^u(p)$ en puntos homoclínicos que convergen al punto silla p en tiempo positivo y negativo. Por lo tanto, la creación del atractor extraño del mapeo de

Hénon también puede explicarse por la presencia de herraduras y, en definitiva, como el resultado de contraer, estirar y doblar!

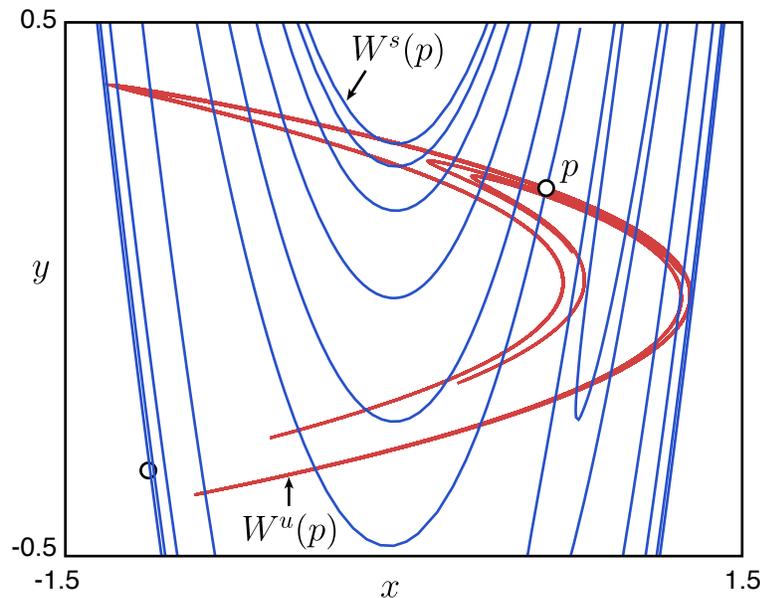


Figura 7.10: Las variedades estable e inestable del punto silla p se intersectan en puntos homoclínicos.

7.4. Ejercicios

1. Considere el difeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}x, 4y\right), & 0 \leq y \leq \frac{1}{4}, 0 \leq x \leq 1, \\ \left(1 - \frac{1}{3}x, 4 - 4y\right), & \frac{3}{4} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

y donde F actúa como un doblar no-lineal para $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq x \leq 1$. Así el mapeo queda sólo especificado en el cuadrado unitario $S = [0, 1] \times [0, 1]$.

(a) Demuestre que la imagen de S bajo F tiene la forma de una herradura.

(b) Sean $H_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\}$ y $H_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \frac{3}{4} \leq y \leq 1\}$. Demuestre que F lleva H_0 a $V_0 = \{0 \leq x \leq \frac{1}{3}, 0 \leq y \leq 1\}$ mediante una contracción de $1/3$ en la primera coordenada y una expansión de 4 en la segunda coordenada. Similarmente, F lleva H_1 en $V_1 = \{\frac{2}{3} \leq x \leq$

- $1, 0 \leq y \leq 1\}$ mediante una rotación en 180 grados, una contracción de $1/3$ en la primera coordenada y una expansión de 4 en la segunda coordenada.
2. Demuestre que el conjunto invariante Λ_H del mapeo herradura (horseshoe map) es homeomorfo al conjunto invariante Λ_L del mapeo logístico con $r > 2 + \sqrt{5}$.
 3. Demuestre que el mapeo de Hénon es invertible si $b \neq 0$.
 4. Demuestre que el mapeo de Hénon contrae áreas si $-1 < b < 1$.
 5. Demuestre que el mapeo de Hénon con $-1 < b < 1$ tiene un 2-ciclo para $a > a_1 = \frac{3}{4}(1 - b)^2$. ¿Para qué valores de a es un ciclo estable?

Capítulo 8

Dinámica en cilindros, toros y círculos

Además del espacio euclideo usual \mathbb{R}^n , hay ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden inducir flujos en espacios de fase más “exóticos” como cilindros y toros. A su vez, un sistema dinámico definido en un círculo puede aparecer en forma natural como la aplicación de retorno de Poincaré de un flujo en un toro. Todos estos ejemplos son el tema de estudio de este capítulo.

8.1. Oscilaciones periódicamente forzadas

Consideremos un sistema no-autónomo de la forma

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (8.1)$$

donde $f(\cdot, t) = f(\cdot, t+T)$ es una función periódica de período $T > 0$ en t . Podemos reescribir el sistema en la forma de un sistema autónomo al añadir una nueva variable. Aquí introducimos $\theta = \omega t$, donde ω es un parámetro, y consideramos el sistema como un campo de vectores:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta), \\ \dot{\theta} = \omega, \end{cases} \quad (8.2)$$

con $(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$. Es decir, el espacio de fase de (8.2) es un cilindro $(n + 1)$ -dimensional. De esta manera, la nueva variable θ refleja la periodicidad de f . Es natural pensar que la función periódica f inducirá un efecto en el flujo de (8.2) que hará que, al menos, éste tienda a parecerse a un comportamiento periódico. A este fenómeno le llamamos **oscilaciones periódicamente forzadas**.

Ejemplo 44 Un circuito RC sometido a una fuerza sinusoidal externa se puede escribir en forma adimensional como

$$\dot{x} + x = A \sin \omega t,$$

donde $\omega > 0$. Al introducir $\theta = \omega t$ obtenemos un campo de vectores en el cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + A \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \omega. \end{cases}$$

Podemos pensar en utilizar la aplicación de retorno de Poincaré P para analizar las oscilaciones forzadas de este flujo. Puesto que $\dot{\theta} = \omega > 0$, cualquier línea vertical $\theta = \theta_0$ en el cilindro es una sección transversal al flujo; escojamos $\Sigma = \{(x, \theta) : \theta = 0 \text{ mod } 2\pi\}$. Consideremos una condición inicial en Σ dada por $\theta(0) = 0, x(0) = x_0$. Entonces el tiempo de vuelo entre intersecciones sucesivas es $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En términos físicos, observamos el sistema una vez por ciclo y registramos los valores consecutivos de x .

Para calcular P necesitamos resolver la ecuación diferencial. Su solución general es una suma de soluciones homogéneas y particulares:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t.$$

Las constantes c_2 y c_3 se pueden hallar explícitamente, pero el punto importante es que dependen de A y ω , pero *no* de la condición inicial x_0 ; solamente c_1 depende de x_0 . Más explícitamente, observemos que en $t = 0, x(0) = x_0 = c_1 + c_3$. Luego,

$$x(t) = (x_0 - c_3)e^{-t} + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t.$$

Como P está definida por $x_1 = P(x_0) = x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$, sustituyendo en la solución obtenemos

$$P(x_0) = x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = (x_0 - c_3)e^{-\frac{2\pi}{\omega}} + c_3 = x_0 e^{-\frac{2\pi}{\omega}} + c_4,$$

donde $c_4 = c_3(1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}})$.

El gráfico de P es una línea recta con pendiente $e^{-\frac{2\pi}{\omega}} < 1$ como se ve en la figura 8.1. Dado que P tiene pendiente menor que 1, su gráfica interseca la

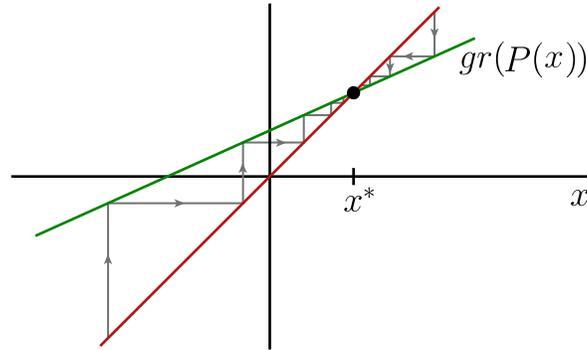


Figura 8.1: Diagrama de telaraña del circuito forzado sinusoidalmente.

diagonal en un único punto. Más aún, el gráfico de telaraña muestra que el punto fijo es globalmente estable. En términos físicos, el circuito siempre se asienta en la misma oscilación forzada, sin importar la condición inicial.

Regresando al caso general (8.1), si reescalamos el tiempo en la forma $t \mapsto \frac{2\pi t}{T}$, el campo de vectores (8.2) es C^∞ -equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta), & (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1; \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (8.3)$$

Definimos una sección transversal

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 : \theta = \theta_0\},$$

la cual es global, pues todas las soluciones cruzan Σ transversalmente debido a $\dot{\theta} = 1$. El mapeo de retorno de Poincaré (si está definido globalmente) es:

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad P(x_0) = \Phi_x^T(x_0, \theta_0),$$

donde Φ_x^t es la componente x en el instante t del flujo $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ de (8.3). Notemos que el tiempo de vuelo T es el mismo para todo $x \in \Sigma$, pues la periodicidad de f no depende de x . Alternativamente, si $x(x_0, t)$ es la componente x de la solución de (8.3) que pasa por x_0 , entonces $P(x_0) = x(x_0, T + t_0)$.

El mapeo de Poincaré también se puede obtener como un sistema dinámico discreto directamente a partir del flujo $\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ del campo de vectores

dependiente del tiempo (8.1). Dado que f es una función T -periódica en t , tenemos $\Psi(x, nT) = \Psi^n(x, T) =: \Psi_T^n(x)$. El mapeo de Poincaré queda definido entonces por $P(x_0) = \Psi_T(x_0)$ y es otro ejemplo de un sistema dinámico discreto obtenido a partir de un flujo evaluado en “instantes” fijos.

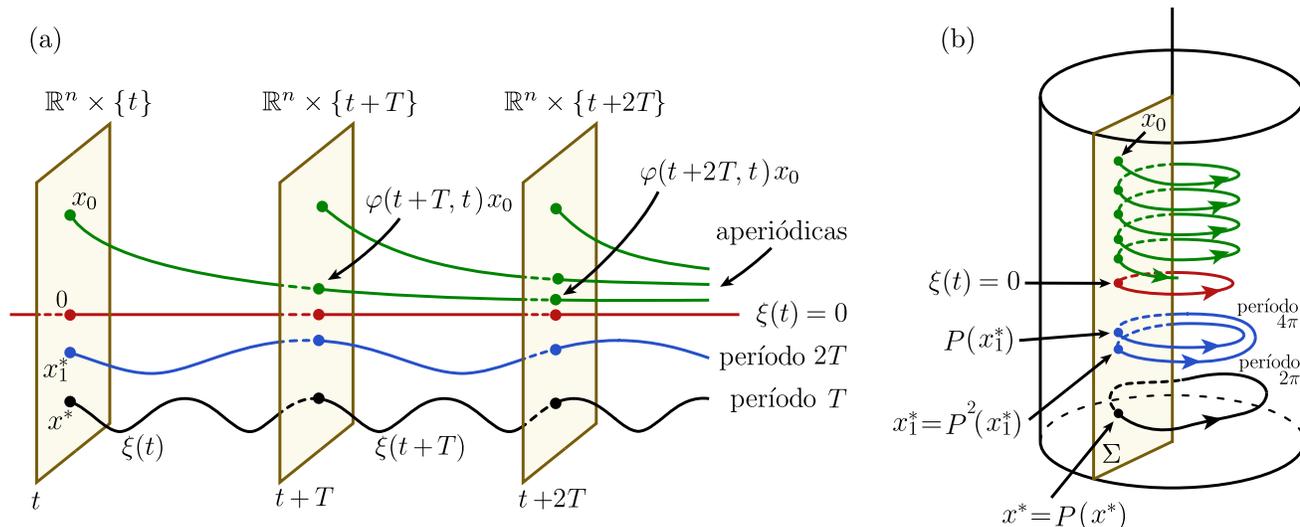


Figura 8.2: (a) Representación esquemática en el espacio de fase extendido $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de algunas posibles soluciones del sistema no-autónomo (8.1). (b) Correspondientes soluciones de la ecuación autónoma (8.3) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$. $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \{\theta\}$ es una sección global para el flujo de (8.3) y nos permite definir el mapeo de Poincaré P .

Algunas posibles órbitas de (8.1) se ilustran en el bosquejo de la figura 8.2. Observemos que las soluciones no necesariamente son periódicas. Sin embargo, es fácil verificar que si $\varphi(t)$ es una solución de (8.1) entonces también lo es $\varphi(t+T)$, es decir, desplazar una solución en un período del campo de vectores también nos da una solución.

La figura 8.2 nos ayuda a asociar este *mapeo de avance de período* del sistema no-autónomo (8.1) en el panel (a) con el mapeo de Poincaré P definido en la sección global Σ en el panel (b). Notemos que basta considerar $\theta_0 = 0$, pues para cualquier otro ángulo $\theta_0 \neq 0$, el mapeo de Poincaré asociado es topológicamente conjugado. Como es de esperar, se puede probar que P tiene un punto fijo x^* si y sólo si (8.3) tiene una órbita periódica de período 2π , es decir, si y sólo si el sistema no-autónomo (8.1) tiene una solución periódica de período T . La figura 8.2(b) también muestra un 2-ciclo (punto x_1 de período 2) de P en la forma de una

órbita periódica de período 4π de (8.3), la cual, a su vez, corresponde a una solución de (8.1) con período $2T$ en la figura 8.2(a).

Más aún, una solución de (8.1) es estable (o asintóticamente estable), si y sólo si el punto periódico de P asociado es estable (o asintóticamente estable).

OBSERVACIÓN. La aplicación de retorno de Poincaré podría no estar definida globalmente. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

con solución $\Phi^t(x_0, \theta_0) = \left(\left(\frac{1}{x_0} - t \right)^{-1}, t + \theta_0 \right)$, y mapeo de Poincaré

$$P(x_0) = \left(\frac{1}{x_0} - 2\pi \right)^{-1}, \quad x_0 \in \left(-\infty, \frac{1}{2\pi} \right)$$

en $\Sigma = \{(x, \theta) : \theta = 0\}$. Aquí, las órbitas de Φ^t con $x_0 \geq \frac{1}{2\pi}$ se van a ∞ en un tiempo $t \leq 2\pi$. Sin embargo, para algún subconjunto $U \subset \Sigma$, el mapeo $P : U \rightarrow \Sigma$ queda usualmente bien definido.

Ejemplo 45 Consideremos el sistema lineal sometido a una fuerza externa periódica:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + x = \gamma \cos(\omega t), \quad 0 \leq \beta < 1,$$

o bien en forma equivalente,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\beta x_2 + \gamma \cos(\theta), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

En este caso $(x_1, x_2, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, y la fuerza externa es de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Como la EDO de segundo orden es lineal, podemos hallar sus soluciones mediante métodos convencionales:

$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (8.4)$$

donde $\omega_d = \sqrt{1 - \beta^2}$ es la *frecuencia natural amortiguada*, y A y B son coeficientes de la solución particular, dados por:

$$A = \frac{(1 - \omega^2)\gamma}{(1 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega}, \quad B = \frac{2\beta\omega\gamma}{(1 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega}.$$

Por otro lado, las constantes c_1 y c_2 de la solución homogénea se determinan por las condiciones iniciales. Sean $x(0) = x_{10}$, $\dot{x}(0) = x_{20}$. Al sustituir en (8.4) se tiene $x_{10} = c_1 + A$, $x_{20} = -\beta c_1 + \omega_d c_2 + \omega B$. Luego se obtiene

$$c_1 = x_{10} - A, \quad c_2 = \frac{x_{20} + \beta(x_{10} - A - \omega B)}{\omega_d}.$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \dot{x}_1(t) \\ &= e^{-\beta t} \left(-\beta(c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t)) + \omega_d(-c_1 \sin(\omega_d t) + c_2 \cos(\omega_d t)) \right) \\ &\quad -\omega(A \sin(\omega t) - B \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

Si consideramos la sección transversal global $\Sigma = \{(x_1, x_2, \theta) : \theta = 0\}$, podemos calcular el mapeo de Poincaré explícitamente a partir del flujo Φ^t con condición inicial $(x_{10}, x_{20}, 0)$. De esta manera, $P(x_{10}, x_{20})$ viene dado por la proyección de $\Phi^{\frac{2\pi}{\omega}}(x_{10}, x_{20}, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ a \mathbb{R}^2 , es decir, como la componente $(x_1(T), x_2(T))$ del flujo después de un tiempo de vuelo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ desde $(x_{10}, x_{20}, 0) \in \Sigma$.

Por ejemplo, en el llamado caso de *resonancia*, $\omega = \omega_d = \sqrt{1 - \beta^2}$, obtenemos

$$P(x_{10}, x_{20}) = \left((x_{10} - A)e^{-\frac{2\pi\beta}{\omega}} + A, (x_{20} - \omega B)e^{-\frac{2\pi\beta}{\omega}} + \omega B \right).$$

Así, P posee un punto fijo en $(x_1, x_2) = (A, \omega B)$ (o equivalentemente, $c_1 = c_2 = 0$). Por supuesto, el mapeo P es lineal y se tiene:

$$DP = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial P_1}{\partial x_{20}} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial P_2}{\partial x_{20}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi\beta}{\omega}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi\beta}{\omega}} \end{pmatrix},$$

que corresponde a una matriz con valores propios repetidos $\mu_{1,2} = e^{-\frac{2\pi\beta}{\omega}} < 1$. Luego, las órbitas de P se acercan a $(x_1, x_2) = (A, \omega B)$ radialmente como en la

figura 8.3. Por lo tanto, el oscilador lineal posee una solución periódica asintóticamente estable.

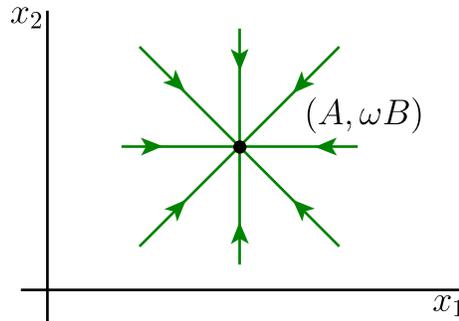


Figura 8.3: Las órbitas de la aplicación de Poincaré del sistema lineal sometido a una fuerza externa periódica se acercan a $(x_1, x_2) = (A, \omega B)$ radialmente.

8.1.1. La ecuación de Duffing

En 1918 Duffing introdujo un modelo de oscilador no lineal con un término cúbico de rigidez para describir el efecto “endurecedor” de un resorte observado en muchos problemas mecánicos. Desde entonces, esta ecuación, junto con la ecuación de Van der Pol, se ha vuelto uno de los ejemplos más comunes en textos de oscilaciones no lineales y artículos de investigación. Aquí discutimos una modificación de la ecuación de Duffing convencional en la cual el término de rigidez lineal es negativo. La ecuación que resulta describe la dinámica de una viga o placa doblada cuando se considera solo un modo de vibración. El modelo viene dado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden no autónoma:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t). \quad (8.5)$$

Mecánicamente, si $\delta = \gamma = 0$, el modelo representa un cuerpo sometido a una fuerza conservativa con un potencial de doble pozo; si $\delta > 0$, la viga presenta rigidez o resistencia al movimiento, por lo que el sistema se vuelve disipativo. El término no autónomo $\cos(\omega t)$ en (8.5) representa una fuerza externa actuando periódicamente sobre el cuerpo, en este caso de forma cosenoidal. Si $\gamma = 0$, las

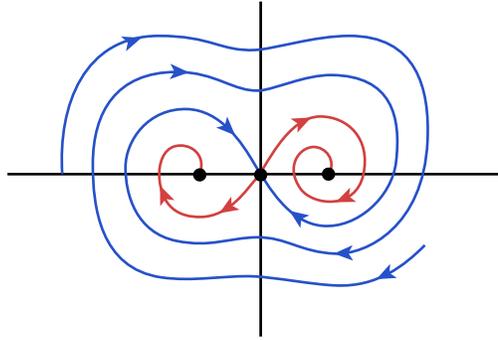


Figura 8.4: Retrato de fase de la ecuación de Duffing sin fuerza externa ($\gamma = 0$) y coeficiente de rigidez $\delta > 0$.

órbitas de (8.5) viven en el plano \mathbb{R}^2 y se muestran en la figura 8.4 para $\delta > 0$ (caso disipativo): el origen es un punto silla, y hay dos focos estables a cada lado.

Consideremos ahora $\gamma \neq 0$. La ecuación (8.5) se puede reescribir como un sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = u - u^3 + \delta v + \gamma \cos(\omega\theta), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (8.6)$$

Aquí $(u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T$ es el círculo unitario de período $T = 2\pi/\omega$. Este producto cartesiano (cilindro tridimensional) puede visualizarse como un *anillo* tridimensional donde viven las órbitas de (8.6); ver figura 8.5.

En (8.6) escogemos una sección transversal $\Sigma = \{(u, v, \theta) : \theta = 0\}$ y consideramos la aplicación de retorno de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Se puede demostrar que P está definido globalmente. Claramente, P depende de los parámetros γ, δ, ω , pero en lo que sigue consideramos que $\delta > 0$ y $\omega > 0$ están fijos y variamos γ ; por eso, escribiremos $P = P_\gamma$.

P_0 es solamente el mapeo del flujo cada $2\pi/\omega$ unidades de tiempo del problema sin fuerza externa, i.e., con $\gamma = 0$. Los puntos de equilibrio de (8.5) con $\gamma = 0$ corresponden a órbitas periódicas de (8.6); y su estabilidad se preserva. En efecto, para pequeños valores de $\gamma > 0$, los dos focos estables del caso $\gamma = 0$ en la figura 8.4 son órbitas periódicas atractoras de período $2\pi/\omega$ (o período 1 para P_γ) y el punto silla se vuelve una órbita de tipo silla. De esta forma, P_γ sigue teniendo tres puntos fijos hiperbólicos. Un bosquejo cualitativamente equivalente de las órbitas en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ y de la aplicación de Poincaré para $0 < \gamma$ pequeño se

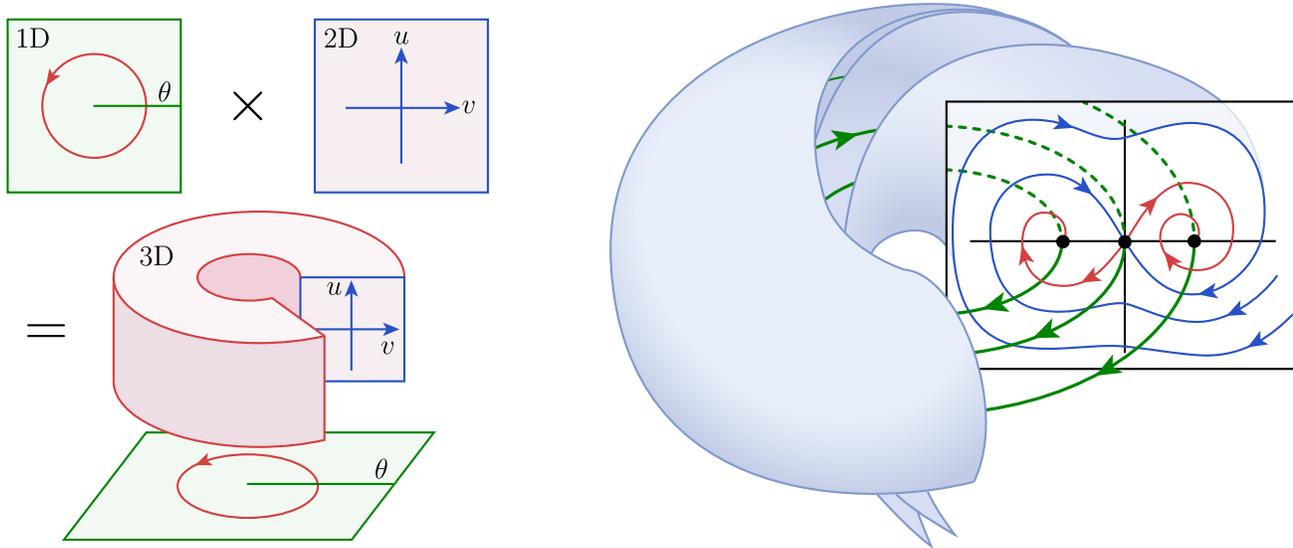


Figura 8.5: Izquierda: Las órbitas de (8.6) viven en un “anillo tridimensional” $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Derecha: Bosquejo esquemático de las soluciones periódicas de (8.6) para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño.

muestra en la figura 8.5.

A medida que γ se incrementa, ocurre una cascada de duplicación de período iniciada en las órbitas periódicas estables —i.e., la misma ruta al caos que en el modelo de Rössler—, la que culmina con la aparición de comportamiento caótico y soluciones aperiódicas.

El cuadro superior izquierdo en la figura 8.6 muestra la proyección de una solución de (8.6) al plano (u, v) en el régimen caótico. Notemos que las autointersecciones de la solución no son tales, sino que son un producto de la proyección de una órbita en un espacio 3D al plano 2D (u, v) . Esta órbita está “visitando” un conjunto caótico que vive en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Para visualizarlo, simplemente tomamos esta misma solución y consideramos su órbita bajo la aplicación de retorno de Poincaré en la sección transversal Σ . La figura que emerge es la del objeto extraño en el cuadro superior derecho de la figura 8.6. Al igual que el atractor de Hénon y el atractor de Rössler, este objeto extraño posee una fina estructura autosimilar o fractal, como se aprecia en las imágenes inferiores de la figura 8.6, la que continua a escalas arbitrariamente pequeñas (pero es visible hasta donde lo permite la resolución de nuestros cálculos numéricos).

La estructura del objeto extraño se debe a la presencia de puntos homoclíni-

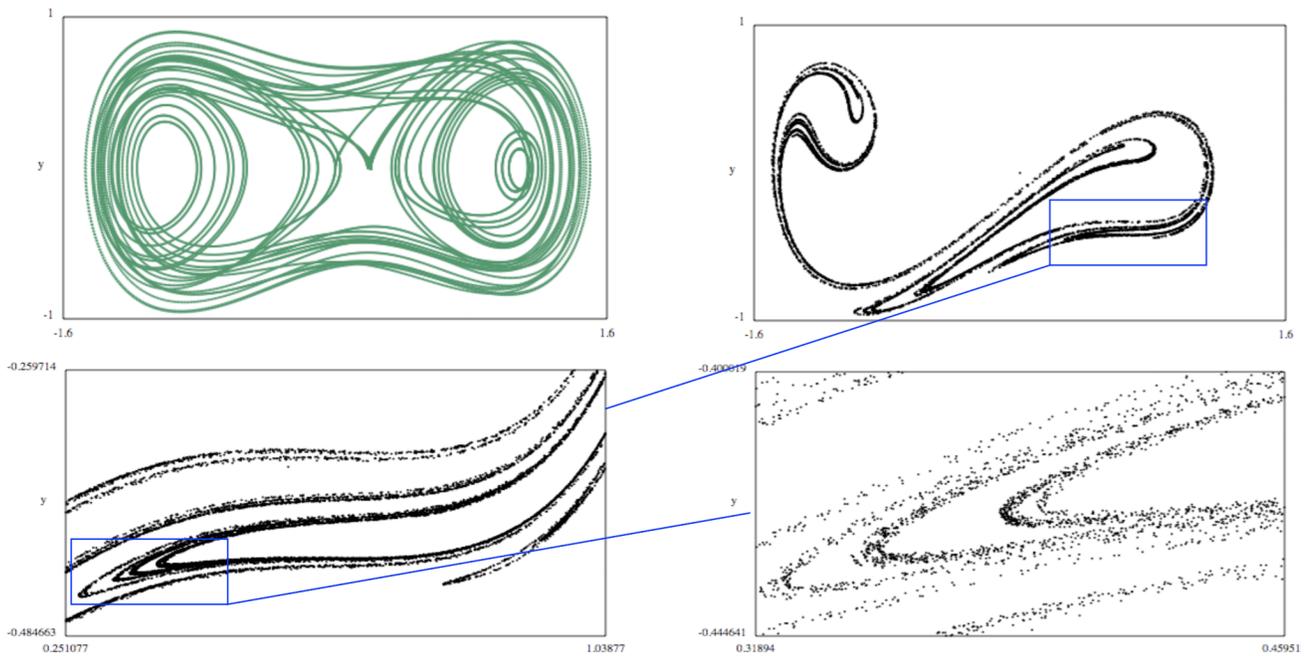


Figura 8.6: Una órbita caótica en la ecuación de Duffing (arriba, izquierda); y el correspondiente atractor extraño de la aplicación de Poincaré (arriba, derecha), junto con ampliaciones (abajo) que muestran su naturaleza fractal. Imagen tomada de P. HOLMES, *The dynamical legacy of Liapunov and Poincaré: Reflections on stability, chaos and randomness*, ASME IDETC/CIE Conference, San Diego, Aug 31–Sept 2, 2009.

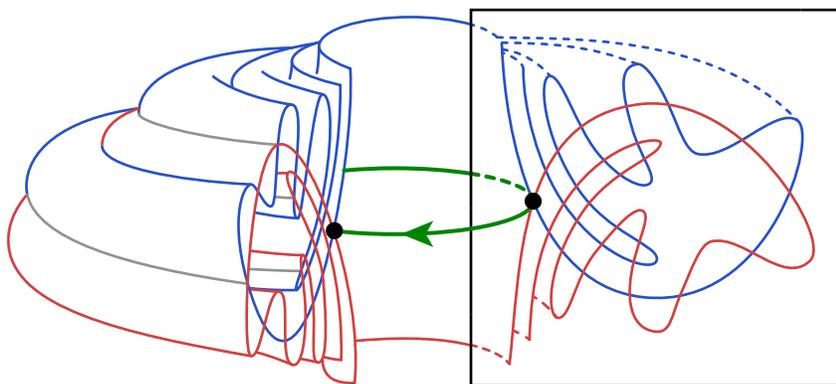


Figura 8.7: Bosquejo esquemático del enredo homoclínico de Poincaré en la sección transversal y la correspondiente organización de variedades invariantes en el espacio 3D.

cos en la aplicación de retorno de (8.6) (ver sección 7.3): un complicado arreglo de las variedades estable e inestable de la órbita periódica silla de (8.6), o equi-

valentemente las del punto silla en la aplicación de Poincaré. Estas variedades forman una intrincada red de (infinitas) intersecciones que da lugar al caos. Un bosquejo de esta estructura homoclínica de Poincaré se muestra en la figura 8.7. La curva roja representa la órbita periódica silla de (8.6). El comportamiento de una órbita vecina es un acercamiento asintótico en espiral a lo largo de la cara “no enredada” de la variedad estable (superficie azul), seguido de un lapso de movimiento caótico, atrapado dentro del “laberinto” de superficies, y finalmente un escape asintótico en espiral a lo largo de la mitad no enredada de la variedad inestable (superficie roja). De esta forma, este “enredo” homoclínico provee un modelo geométrico para el caos.

8.2. Dinámica en toros

Además del plano y el cilindro, otro importante espacio de fase bidimensional es el toro. Es el espacio de fase natural para sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2), \end{cases} \quad (8.7)$$

donde $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$, y donde f_1 y f_2 son funciones periódicas en ambos argumentos.

Por ejemplo, un modelo simple de osciladores acoplados viene dado por

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 + K_1 \sin(\theta_2 - \theta_1), \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 + K_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \end{cases} \quad (8.8)$$

donde θ_1, θ_2 son las *fases* de los osciladores, $\omega_1, \omega_2 > 0$ son sus *frecuencias naturales*, y $K_1, K_2 \geq 0$ son las *constantes de acoplamiento*. La ecuación (8.8) ha sido usada para modelar la interacción entre ritmos circadianos humanos y el ciclo sueño-vigilia.

Una forma intuitiva de pensar en (8.8) es imaginar dos amigos trotando en una pista circular. Aquí, $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ representan sus posiciones en la pista, y ω_1, ω_2 son proporcionales a sus velocidades. Si estuviesen desacoplados, cada uno correría a su propia velocidad y el más rápido adelantaría periódicamente al más lento. Pero como son amigos, quieren correr juntos y deben ajustar sus velocidades

naturales. Si sus velocidades son demasiado diferentes, la sincronización en las fases será imposible y puede que ya no quieran seguir corriendo juntos.

Ahora consideremos (8.8) de manera más abstracta, para ilustrar algunas propiedades generales de flujos en un toro. Para visualizar el flujo, imaginemos dos puntos corriendo alrededor de un círculo a tasas instantáneas $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$. Alternativamente, podemos imaginar un único punto trazando una órbita en un toro con coordenadas $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$; ver figura 8.8.

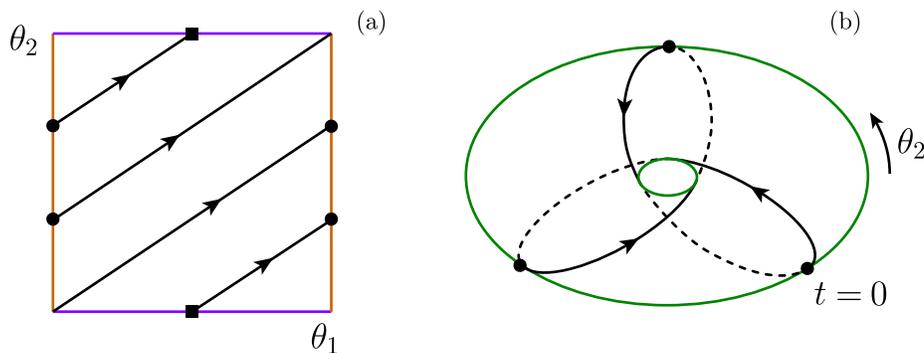


Figura 8.8: Flujo racional en el toro con $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3}{2}$.

Sistema desacoplado

En este caso $K_1 = K_2 = 0$. Luego, (8.8) se reduce a $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\theta}_2 = \omega_2$. Las correspondientes órbitas en el cuadrado de la figura 8.8 son líneas rectas con pendiente constante

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Hay dos casos cualitativamente distintos, dependiendo si la pendiente es un número racional o irracional.

Si la pendiente es **racional**, entonces

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q}$$

para ciertos enteros p, q sin factor común. En este caso, *todas las órbitas son órbitas cerradas* en el toro, pues θ_1 completa p revoluciones en el mismo tiempo

que θ_2 completa q revoluciones. Por ejemplo, la figura 8.8(a) muestra una órbita en el toro con $p = 3, q = 2$. Cuando se grafica esta misma órbita en el toro nos da un *nudo de trébol* como se ve en la figura 8.8(b) desde una vista superior del toro. Sigamos la órbita anudada y contemos el número de revoluciones hechas por θ_2 durante el tiempo en que θ_1 hace una revolución, donde θ_1 es la latitud y θ_2 es longitud. Comenzando en el ecuador exterior en $t = 0$ la órbita se mueve hacia la cima de la superficie, se desliza hacia el orificio, viaja a lo largo del fondo de la superficie, y luego reaparece en el ecuador exterior habiendo recorrido *dos tercios* de una vuelta completa alrededor del toro. Luego, θ_2 hace *dos tercios* de una revolución mientras θ_1 hace una revolución; es decir, $p = 3, q = 2$.

De hecho, las órbitas siempre son anudadas si $p, q \geq 2$ no tienen factores comunes. Las curvas resultantes se llaman *nudos de toro* $p : q$.

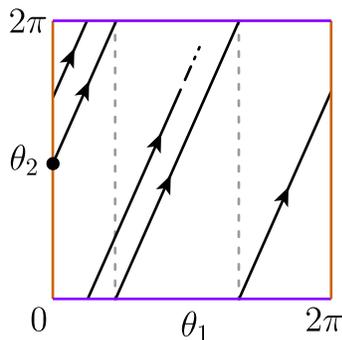


Figura 8.9: Flujo irracional en el toro.

Si la pendiente es **irracional** como en la figura 8.9, entonces el flujo se dice **cuasiperiódico**. Toda órbita da vueltas eternamente en el toro, nunca intersectándose a sí misma y nunca cerrándose. Si una órbita se lograra cerrar, necesariamente realizaría un número entero de revoluciones en ambos θ_1 y θ_2 ; luego, la pendiente sería racional, contrario a nuestra suposición.

Más aún, cuando la pendiente es irracional, cada órbita es **densa** en el toro, es decir, cada órbita pasa arbitrariamente cerca de cualquier punto en el toro.

La cuasiperiodicidad es importante pues es un nuevo tipo de comportamiento a largo plazo. A diferencia de los tipos mencionados anteriormente (equilibrios, órbitas cerradas, incluso caos), la cuasiperiodicidad sólo ocurre en el toro.

Sistema acoplado

Ahora consideremos (8.8) en el caso acoplado donde $K_1, K_2 > 0$. La dinámica se puede descifrar al mirar la *diferencia de fase* $\phi = \theta_1 - \theta_2$. Entonces (8.8) se transforma en

$$\dot{\phi} = \omega_1 - \omega_2 - (K_1 + K_2) \sin \phi. \quad (8.9)$$

El análisis se simplifica si introducimos nuevas variables $\tau = (K_1 + K_2)t, \delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 + K_2}$, y la ecuación (8.9) es equivalente a

$$\phi' = \frac{d\phi}{d\tau} = \delta - \sin(\phi). \quad (8.10)$$

El parámetro adimensional δ es una medida comparativa de la diferencia entre las dos frecuencias, relativa a la intensidad $K_1 + K_2$ de los acoplamientos.

Si $\delta = 0$, $\phi = 0$ es una solución de (8.10) y en este caso, si $\phi = 0$ es estable, los osciladores corren al unísono, i.e., con diferencia de fase cero.

Los equilibrios de (8.10) satisfacen $\delta = \sin(\phi)$. Por lo tanto, los dos equilibrios existen si y solo si $-1 < \delta < 1$, o equivalentemente, si $|\omega_1 - \omega_2| < K_1 + K_2$. La figura 8.10 muestra las líneas de fase de (8.10) para $0 < \delta < 1$ (el caso $-1 < \delta < 0$ es similar). La situación del panel (a) corresponde a $\delta = 0$, con $\phi = 0$ como único equilibrio (estable), y a oscilaciones sincronizadas. En la figura 8.10(b), el equilibrio estable es $\phi_1 \in (0, \pi)$. Al mirar el gráfico de ϕ' vs ϕ , vemos que todas las órbitas de (8.10) se acercan asintóticamente al equilibrio estable. Por lo tanto, en el toro, las órbitas de (8.8) se acercan a una solución de **fases enganchadas** (phase locked, en inglés) en la cual los osciladores están separados por una diferencia de fase constante ϕ_1 . La solución de enganche de fase es *periódica*. De hecho, ambos osciladores corren a una frecuencia constante dada por $\omega^* = \theta_1^* = \theta_2^* = \omega_2 + K_2 \sin \phi_1$. Sustituyendo el valor de $\sin \phi_1$ nos da

$$\omega^* = \frac{K_1 \omega_2 + K_2 \omega_1}{K_1 + K_2}.$$

Ésta se conoce como la *frecuencia de compromiso* pues es un valor promedio (ponderado) entre las frecuencias naturales de los dos osciladores, esto es, $\omega_2 < \omega^* < \omega_1$. La figura 8.11 muestra el retrato de fase en el toro. Las soluciones (periódicas)

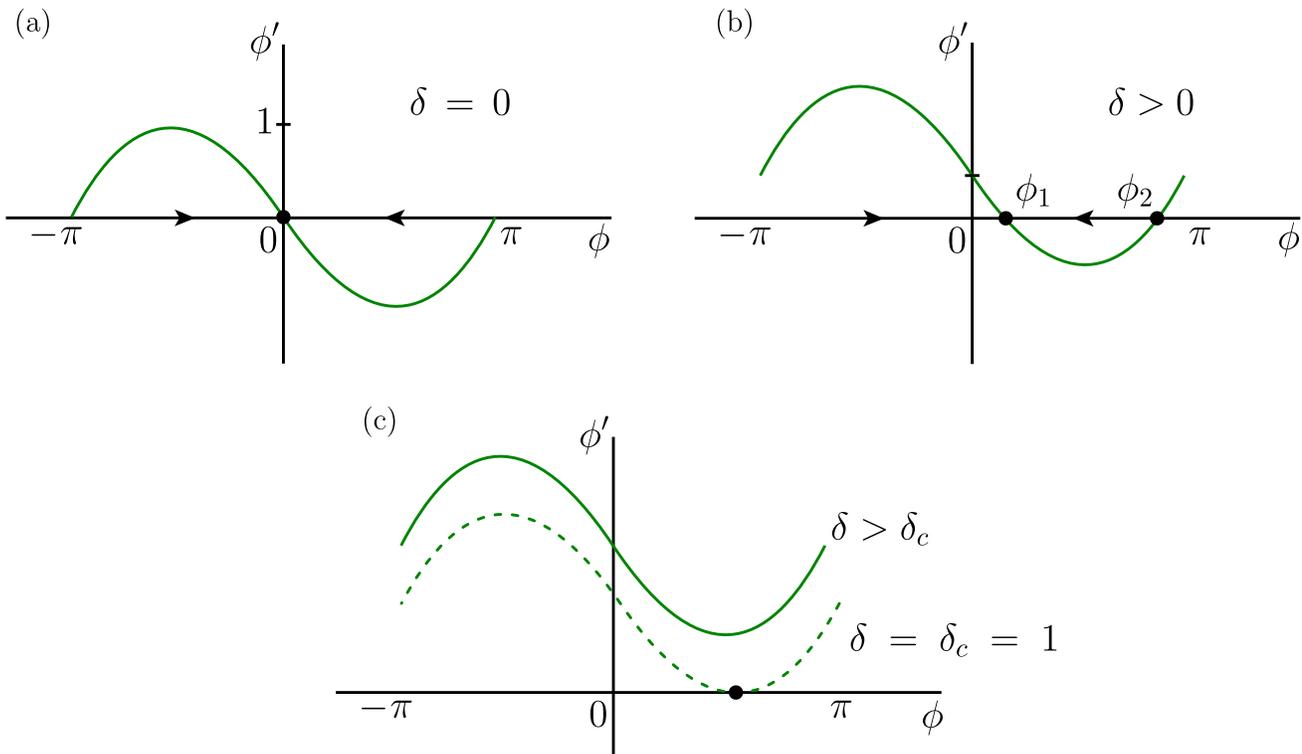


Figura 8.10: Soluciones de equilibrio de la ecuación de la diferencia de fase (8.10) para varios δ representativos. En $\delta = \delta_c = 1$, ocurre una bifurcación silla-nodo.

enganchadas estable e inestable aparecen como líneas diagonales de pendiente 1, pues $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega^*$. La solución estable de (8.8) corresponde a la diferencia de fase ϕ_1 de (8.10) (línea continua), mientras que la solución inestable corresponde a la diferencia de fase ϕ_2 (línea discontinua); compare con la figura 8.10(b).

Si separamos las frecuencias naturales, por ejemplo al desintonizar uno de los osciladores logrando que $|\omega_1 - \omega_2|$ aumente, entonces las soluciones enganchadas se acercan entre sí y colisionan cuando $|\omega_1 - \omega_2| = K_1 + K_2$ (o equivalentemente, cuando $\delta = \delta_c = 1$) en una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas; ver figura 8.10(c). Después de esta colisión, es decir para $|\omega_1 - \omega_2| > K_1 + K_2$ (o $\delta > \delta_c$), uno de los osciladores no puede “mantener el ritmo” del otro y la diferencia de fase simplemente se incrementa hasta que el ciclo vuelve a empezar de nuevo cuando ϕ llega a 2π . Este último caso es conocido como *phase drift*. Dado que $\phi' > 0$ en la figura 8.10(c) y no es constante, esto implica que el *phase drift* se

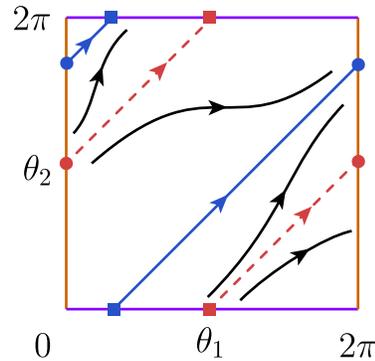


Figura 8.11: Soluciones enganchadas en el toro para los osciladores acoplados.

incrementa pero a una tasa no uniforme. A medida que δ sigue aumentando, el flujo es en general como el del caso desacoplado: Tenemos flujo cuasiperiódico o bien racional, dependiendo de los parámetros. La única diferencia es que ahora las órbitas en el cuadrado con lados identificados son curvas y no líneas rectas.

8.2.1. Ruta al caos por cuasiperiodicidad

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales que modela la interacción de N osciladores acoplados. Supongamos que la dinámica comienza de nuevo con un ciclo o solución periódica. A medida que un parámetro de control del modelo se mueve, aparece una segunda periodicidad (o equivalentemente, una nueva frecuencia) en una bifurcación de toro (Neimarck-Sacker), generando la aparición de un toro invariante 2D. Podemos pensar que el sistema (8.8) modela el flujo restringido a este toro.

Si la razón entre el período del segundo movimiento y el período del primero es un número irracional, entonces el movimiento en el toro es cuasiperiódico. Las órbitas del espacio de estados entonces tienden hacia (o residen en) la superficie de un toro. Bajo ciertas circunstancias, si el parámetro de control cambia aún más, el movimiento se vuelve caótico. Esta ruta también es conocida como el *escenario Ruelle-Takens*. A medida que el parámetro de control varía, uno puede esperar la aparición de una tercera frecuencia. Ahora las órbitas viven en un toro tridimensional (correspondiente al movimiento cuasiperiódico en un espacio de estados con cuatro o más dimensiones). Con cambios adicionales en el parámetro,

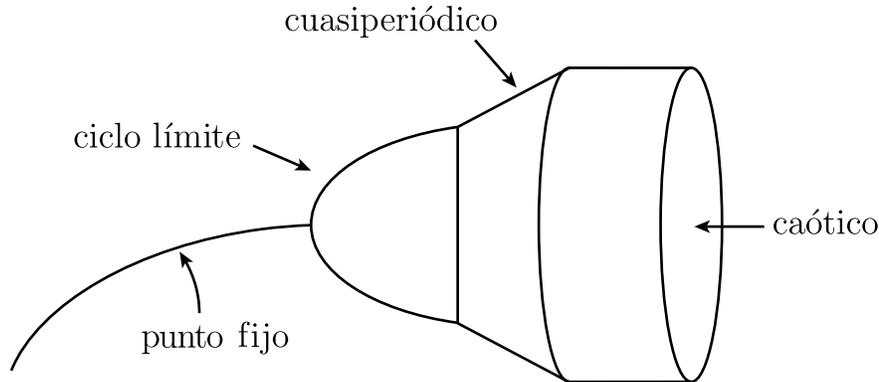


Figura 8.12: Representación esquemática de la evolución de atractores en el espacio de estados para la ruta cuasiperiódica al caos.

el movimiento en el toro puede destruirse y el comportamiento del sistema puede volverse caótico creando un atractor caótico. (Sin embargo, algunos sistemas pueden pasar directamente de un comportamiento con tan solo dos frecuencias al comportamiento caótico). La figura 8.12 ilustra esquemáticamente esta ruta al caos.

Ejemplo 46 Considere un modelo consistente en dos reacciones químicas (cada una a dos variables), las cuales poseen un comportamiento periódico en su estado desacoplado, y están acopladas difusivamente por un parámetro D :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -(x_i^3 - \lambda_i x_i - \mu_i) - k_i y_i - D(x_i - x_j), \\ \dot{y}_i = (x_i - y_i)/\tau_i - D(y_i - y_j), \end{cases} \quad (8.11)$$

con $i, j = 1, 2$, y $i \neq j$. Los valores de parámetros son $\mu_1 = \mu_2 = 3$, $\lambda_1 = 0,02$, $\lambda_2 = 2$, $k_1 = 3,3$, $k_2 = 10$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$. Note que el sistema dinámico resultante está definido en \mathbb{R}^4 . La figura 8.13 muestra distintas soluciones del modelo en una proyección al plano (x_1, y_1) a medida que el sistema pasa por una ruta cuasiperiódica al caos. El panel (a) muestra una órbita periódica en la cual uno de los osciladores pasa por tres ciclos mientras el otro realiza siete oscilaciones. Los paneles (b) y (c) ilustran dinámica cuasiperiódica y un atractor caótico, respectivamente.

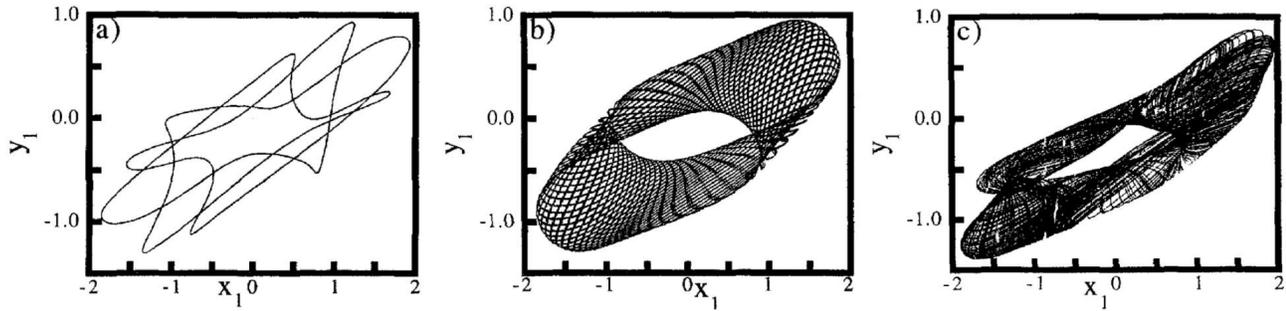


Figura 8.13: Ruta al caos por cuasiperiodicidad en el modelo (8.11). Imagen tomada de I. R. EPSTEIN & J. A. POJMAN, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics: Oscillations, Waves, Patterns, and Chaos*, Oxford University Press, 1998.

Espectro de potencia de Fourier

Dentro de todas sus aplicaciones conocidas, el análisis de Fourier también posee una utilidad para estudiar dinámica no lineal, y en particular, nos permite cuantificar las transiciones al caos por cuasiperiodicidad. Concretamente, al calcular el *espectro de potencia* de una solución podemos estudiar el cambio en su periodicidad o contenido de frecuencia.

Asumiendo que una solución $x(t)$ está definida para $-\infty < t < \infty$, la *transformada de Fourier* $F(\omega)$ de $x(t)$ y su inversa están definidas por las siguientes relaciones

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.12)$$

A partir de estas definiciones, se puede derivar el teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.13)$$

Si $x(t)$ representa un desplazamiento instantáneo, el lado izquierdo de (8.13) es proporcional a la energía total. Dado que el lado derecho debe tener las mismas dimensiones, entonces $|F(\omega)|^2$ representa la energía por unidad de intervalo de frecuencia. Aparte de un factor de normalización apropiado, $S(\omega) \equiv |F(\omega)|^2$ se llama el **espectro de potencia**. Nos entrega información sobre la distribución de energía como función de la frecuencia.

Consideremos nuevamente el ejemplo de N osciladores acoplados en ruta al caos via cuasiperiodicidad. Podemos integrar numéricamente nuestro modelo de osciladores acoplados hasta que se asiente en un movimiento estacionario. Descartamos el transiente inicial de la solución y registramos las coordenadas del comportamiento asintótico como una serie de tiempo o señal. A continuación calculamos el espectro de potencias de Fourier de esta señal a partir de la transformada de Fourier de la serie de tiempo. Como esta señal viene dada en forma discreta, remplazamos la transformada de Fourier continua (8.12) por la transformada de Fourier discreta.

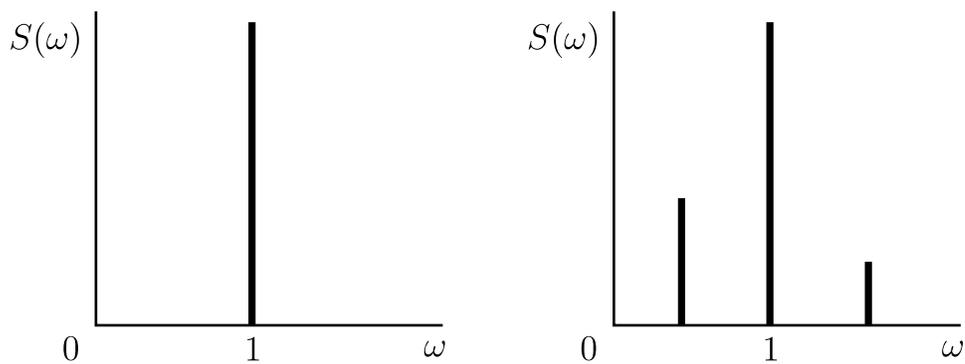


Figura 8.14: Espectro de potencia para período 1 (izquierda) y período 2 (derecha).

Pensemos que estamos en el escenario inicial donde el sistema se asienta en una solución periódica. En este caso, este análisis de Fourier nos mostrará una única frecuencia. Si variamos el parámetro del modelo y la dinámica se vuelve periódica o cuasiperiódica en un toro, o incluso caótica, ¿cómo se verá el espectro de frecuencias asociado? Si la señal es periódica o cuasiperiódica, entonces el espectro de potencias de Fourier consistirá de una secuencia de “espigas” en las frecuencias fundamentales, sus armónicos, y en las frecuencias que sean las sumas y diferencias de las variadas frecuencias. El punto crucial aquí es que el espectro consistirá de un conjunto *discreto* de frecuencias como en la figura 8.14. Para una solución de período (normalizado) $T = 1$, la espiga se ubicará en la frecuencia principal $\omega = 1$. Supongamos que el parámetro de control se incrementa, y resulta en el espectro de potencia de la figura del lado derecho, donde además de la espiga en la frecuencia principal, hay una espiga más pequeña en la frecuencia

subarmónica $\omega/2 = 0,5$; esto indica que la solución tiene período $T = 2$. Notemos que también hay una espiga en $3(\omega/2) = 1,5$, indicándonos que hay algo de energía en el tercer armónico de la frecuencia subarmónica. La aparición de armónicos puede complicar el espectro de potencia, pero solo hay que recordar que para un período n , la espiga de menor frecuencia está en ω/n .

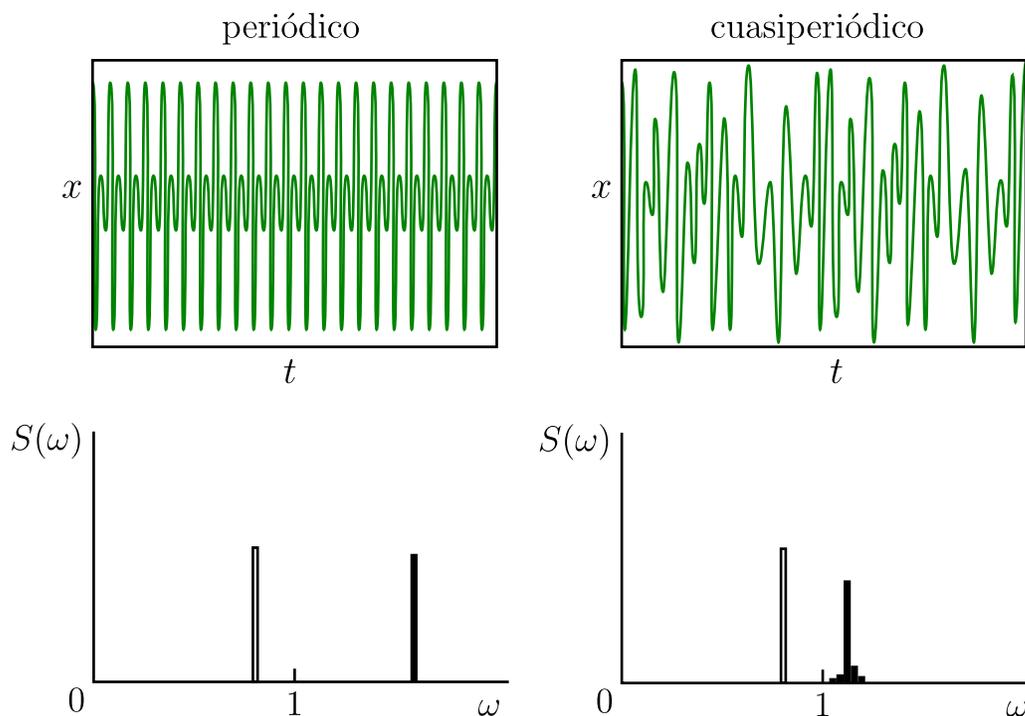


Figura 8.15: A la izquierda la evolución temporal de un sistema periódico con dos frecuencias con $\omega_1 = 2\omega_2$. A la derecha la evolución cuando las dos frecuencias son inconmensurables, $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_2$.

En la figura 8.15 se compara la evolución de un sistema descrito por dos frecuencias en un toro. A la izquierda, las frecuencias son conmensurables, y el comportamiento es obviamente periódico. A la derecha, las frecuencias son inconmensurables y el comportamiento es bastante irregular y nunca vuelve a repetirse exactamente. Sin embargo, una medición del espectro de potencia del comportamiento cuasiperiódico revela claramente que solo hay dos frecuencias presentes.

Sin embargo, si la señal no es ni periódica ni cuasiperiódica (por ejemplo, es caótica), entonces el *espectro de potencia de Fourier será continuo* como el de la figura 8.16. Cuando la solución es caótica, el correspondiente espectro “se

reparte” en todas las frecuencias. Luego, la aparición súbita de un continuo de frecuencias a partir de un espectro discreto, a medida que un parámetro varía, es un indicador de la aparición de dinámica caótica.

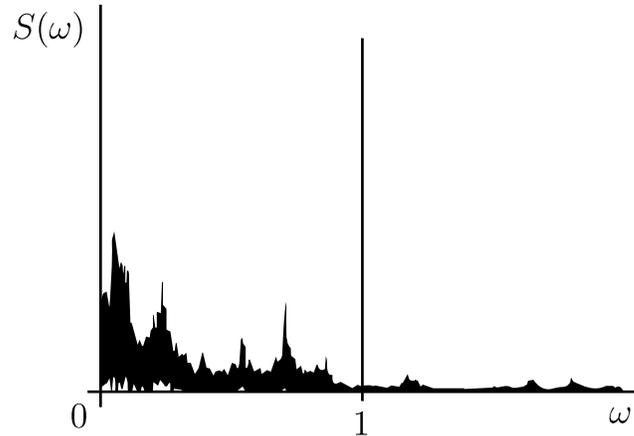


Figura 8.16: Espectro de potencia para un oscilador caótico.

8.2.2. Ecuaciones diferenciales no autónomas en el toro

Para cerrar esta sección, consideremos una ecuación diferencial *escalar no autónoma*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \text{con} \quad f(t+1, x) = f(t, x) = f(t, x+1). \quad (8.14)$$

Este sistema se diferencia de aquellos estudiados en la sección 8.1 en que aquí la función f es periódica tanto en t como en x . Describamos cómo las soluciones de (8.14) se pueden ver como órbitas de un par de ecuaciones diferenciales autónomas en un toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de la forma (8.7). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los períodos son 1; si no, siempre podemos reescalar las variables t y x para que así sea.

Sea $\varphi(t, t_0, x_0)$ una solución de (8.14) con $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Entonces, por la unicidad de soluciones con respecto a las condiciones iniciales y por la periodicidad de f , tenemos las siguientes dos propiedades:

$$\varphi(t+1, t_0, x_0) = \varphi(t, t_0, \varphi(t_0, +1, t_0, x_0)), \quad (8.15)$$

$$\varphi(t, t_0, x_0) + 1 = \varphi(t, t_0, x_0 + 1). \quad (8.16)$$

A continuación convertimos (8.14) en el siguiente par de ecuaciones diferenciales autónomas:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1, \\ \dot{x} = f(\theta, x). \end{cases} \quad (8.17)$$

Las órbitas de (8.17) corresponden a las órbitas de (8.14). La primera ecuación es periódica en θ con cualquier período; podemos considerar que el período es 1. Por otro lado, la relación (8.15) implica que si identificamos θ con $\theta + k$, para cualquier entero k , entonces las órbitas de (8.17) —y luego, las órbitas de (8.14)— pueden ser vistas como curvas suaves sobre el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Usando la relación (8.16), podemos identificar x con $x + k$ para cualquier entero k ; luego las órbitas de (8.17) se vuelven curvas suaves en el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Así, podemos estudiar (8.14) en forma equivalente como (8.17), donde $(\theta, x) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

8.3. Dinámica en círculos

Las ecuaciones diferenciales de la forma (8.7) definidas en toros vistas en la sección anterior también pueden depender de parámetros. Podemos estudiar bifurcaciones de estos flujos mediante la introducción de una sección transversal Σ a \mathbb{T}^2 . La intersección $\mathbb{T}^2 \cap \Sigma$ es un círculo topológico \mathbb{S}^1 . Si cada punto $x \in \mathbb{S}^1$ regresa a \mathbb{S}^1 por medio del flujo definido por (8.7), podemos definir una aplicación de retorno de Poincaré

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

Es fácil comprobar que P y su inversa P^{-1} son diferenciables. Además, un punto fijo de P en \mathbb{S}^1 corresponde a un ciclo de (8.7) contenido en \mathbb{T}^2 . Luego, para estudiar bifurcaciones en un toro invariante hay que conocer bifurcaciones de mapeos del círculo \mathbb{S}^1 . Es conveniente primero dar algunos ejemplos simples para familiarizarnos con aplicaciones del círculo \mathbb{S}^1 . Aquí denotamos un punto en \mathbb{S}^1 por su ángulo $\theta \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}$. Luego, un punto está determinado por cualquier ángulo de la forma $\theta + 2k\pi$ para un entero k .

Ejemplo 47 Sea $f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(2\theta)$ para $0 < \epsilon < 1/2$. Notemos que f tiene puntos fijos en $0, \pi/2, \pi$, y $3\pi/2$.

Calculando las derivadas obtenemos

$$f'(0) = f'(\pi) = 1 + 2\epsilon > 1,$$

mientras que

$$f'(\pi/2) = f'(3\pi/2) = 1 - 2\epsilon < 1.$$

Luego, 0 y π son repulsores y $\pi/2$ y $3\pi/2$ son atractores.

Más generalmente, el mapeo $f(\theta) = \theta + \epsilon(N\theta)$ tiene N puntos fijos atractores y N puntos fijos repulsores dispuestos en forma alternada alrededor del círculo siempre que $0 < \epsilon < 1/N$. (Tarea: complete los detalles.)

Ejemplo 48 (Duplicación de ángulo, parte 1) Sea $f(\theta) = 2\theta$. (Note que $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ en el círculo de manera que este mapeo está bien definido.)

Es fácil probar que $f^n(\theta) = 2^n\theta$, luego θ es un punto periódico de período n si y solo si $2^n\theta = \theta + 2k\pi$ para algún entero k , i.e., si y solo si $\theta = 2k\pi/(2^n - 1)$ donde $0 \leq k \leq 2^n - 2$ es un entero.

Luego, los puntos periódicos de período n para f son las raíces $(2^n - 1)$ -ésimas de la unidad. Se sigue que el conjunto de puntos periódicos es denso en \mathbb{S}^1 . (Tarea: complete los detalles.)

Ejemplo 49 (Duplicación de ángulo, parte 2) Probaremos que $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(\theta) = 2\theta$ es caótica.

Por definición, la distancia angular entre dos puntos se duplica en cada iteración de f . Luego, f es sensible a las condiciones iniciales.

Por otro lado, la transitividad topológica también se obtiene de esta observación pues cualquier arco pequeño en \mathbb{S}^1 es eventualmente expandido por algún f^k hasta cubrir todo \mathbb{S}^1 y, en particular, cualquier otro arco en \mathbb{S}^1 . (Tarea: Complete los detalles!)

Por último, la densidad de los puntos periódicos fue establecida en el ejemplo anterior.

Ejemplo 50 (Traslaciones del círculo, parte 1) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$. Los mapeos T_λ tienen comportamientos muy diferentes dependiendo de la racionalidad o irracionalidad de λ . Si $\lambda = p/q$, donde p y q son enteros, entonces $T_\lambda^q(\theta) = \theta + 2\pi p = \theta$, luego todos los puntos de \mathbb{S}^1 son periódicos.

Por el contrario, si λ es irracional, cada órbita de T_λ es densa en \mathbb{S}^1 . La razón es la siguiente. Sea $\theta \in \mathbb{S}^1$. Los puntos en la órbita de θ son todos distintos pues si $T_\lambda^n(\theta) = T_\lambda^m(\theta)$, tendríamos $(n - m)\lambda \in \mathbb{Z}$, luego $n = m$.

Por otro lado, cualquier conjunto de puntos en el círculo debe tener un punto límite. Luego, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario y dado cualquier $\theta > 0$, deben existir enteros n y m para los cuales $|T_\lambda^n(\theta) - T_\lambda^m(\theta)| < \epsilon$. Sea $k = n - m$. Entonces $|T_\lambda^k(\theta) - \theta| < \epsilon$. Ahora, notemos que T_λ preserva longitudes en \mathbb{S}^1 . Por lo tanto, T_λ^k mapea el arco $[\theta, T_\lambda^k(\theta)]$ al arco $[T_\lambda^k(\theta), T_\lambda^{2k}(\theta)]$ el cual tiene longitud menor a ϵ . En particular, se sigue que los puntos $\theta, T_\lambda^k(\theta), T_\lambda^{2k}(\theta), \dots$ particionan \mathbb{S}^1 en arcos de longitud menor que ϵ . Como ϵ era arbitrario, esto completa la demostración. (Tarea: complete los detalles.)

En resumen, dependiendo de la naturaleza de λ , la dinámica de T_λ es una versión 1D del flujo periódico o cuasiperiódico en sistemas definidos en el toro vistos en la sección anterior.

Ejemplo 51 (Traslaciones del círculo, parte 2) Relacionado con el mismo ejemplo anterior, una rotación irracional del círculo es topológicamente transitiva pero no es sensible a las condiciones iniciales, pues todos los puntos permanecen a la misma distancia después de cada iteración.

8.3.1. Número de rotación y lenguas de Arnold

Volvamos de nuevo al problema de determinar bifurcaciones de sistemas de la forma (8.7) definidos en toros y su relación con aplicaciones de Poincaré en el círculo. Para facilitar la comprensión de esta exposición, denotemos como $(\psi, \varphi) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ las coordenadas angulares canónicas en el toro. Si tomamos la sección transversal

$$\Sigma = \{(\psi, \varphi) \in \mathbb{T}^2 : \psi = 0\},$$

entonces $\mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2 \cap \Sigma$ corresponde a un círculo topológico.

Nos interesa caracterizar la dinámica del mapeo de Poincaré $P : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ inducido por (8.7). Sea $\gamma \in \mathbb{T}^2$ una órbita periódica que comienza en $(0, \varphi_0) \in S$. Por hipótesis, γ regresa a \mathbb{S}^1 en algún punto $(2\pi, P(\varphi_0)) = (0, P(\varphi_0)) \in \mathbb{S}^1$. Además, $P'(\varphi) > 0$, pues las órbitas no se pueden intersectar. Luego, P preserva la orientación en \mathbb{S}^1 .

Si consideramos la diferencia $a(\varphi) = P(\varphi) - \varphi$, definimos el **número de rotación** de P como

$$\rho(P) = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(\varphi) + a(P(\varphi)) + \dots + a(P^{k-1}(\varphi))}{k}. \quad (8.18)$$

Se puede demostrar que el límite anterior existe y es independiente de la elección de $\varphi \in \mathbb{S}^1$. El número $\rho(P)$ caracteriza el ángulo promedio en el cual P rota los puntos del círculo \mathbb{S}^1 . Intuitivamente, con argumentos similares a los ocupados en este capítulo, se puede argumentar que $\rho(P)$ es racional si y solo si P posee una órbita periódica. Y si P es de clase C^2 , entonces $\rho(P)$ es irracional si y solo si toda órbita de P es densa en \mathbb{S}^1 .

Por otro lado, el número de rotación $\rho(P)$ es una función continua de los parámetros de P (y por ende, función continua de los parámetros del campo de vectores (8.7)). En ese sentido, si $\rho(P)$ es irracional, una pequeña perturbación en el campo de vectores debería ser capaz de crear algunas órbitas cerradas, posiblemente con períodos largos. Sin embargo, en presencia de órbitas periódicas, $\rho(P)$ se vuelve racional. Más aún, si estas órbitas periódicas son hiperbólicas, entonces deben persistir bajo pequeñas perturbaciones y el número de rotación permanece constante. Esto sugiere que en las aplicaciones, es más probable que encontremos números de rotación racionales, a pesar de la “omnipresencia” de los irracionales.

Lenguas de Arnold

Consideremos la aplicación

$$x \mapsto F(x; \omega, \epsilon) = \omega + x + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) \pmod{1}, \quad (8.19)$$

en donde los puntos 0 y 1 del intervalo unitario están identificados para que (8.19) sea un mapeo del círculo. La aplicación (8.19) se conoce como *mapeo estándar o canónico del círculo*, pues ha jugado un rol ejemplar (algo así como una “forma normal”) en el estudio teórico y numérico de aplicaciones del círculo. El mapeo del ejemplo 47 es una versión “reescalada” de (8.19) en el caso particular $\omega = 0$.

Para $0 \leq \epsilon \leq 1$, el mapeo (8.19) es un difeomorfismo del círculo pues

$$F(x + 1; \omega, \epsilon) = F(x; \omega, \epsilon) + 1 \quad \text{y} \quad F_x(x; \omega, \epsilon) > 0.$$

En $\epsilon = 1$, es un homeomorfismo, y para $\epsilon > 1$, ya no es uno-a-uno.

La noción del número de rotación definida en (8.18) se puede generalizar para homeomorfismos del círculo, i.e., para mapeos que no están definidos como una aplicación de retorno de Poincaré. De hecho, cuando $0 \leq \epsilon \leq 1$, el número de rotación de (8.19) puede definirse en forma equivalente como el siguiente límite:

$$\rho(\omega, \epsilon) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_0; \omega, \epsilon)}{n}, \quad (8.20)$$

donde n es un entero y los valores de las iteraciones de x_0 son usados sin (mod) 1. Aquí resulta conveniente denotar explícitamente la dependencia de $\rho = \rho(\omega, \epsilon)$ en función de los parámetros de (8.19). Se puede probar que los resultados válidos para mapeos de Poincaré también son ciertos con esta definición del número de rotación. A saber, si F es de clase C^2 , entonces $\rho(\omega, \epsilon)$ es racional si y solo si F posee una órbita periódica de algún período; y $\rho(\omega, \epsilon)$ es irracional si y solo si toda órbita de F es densa en \mathbb{S}^1 . Cuando $\epsilon > 1$, el número de rotación no está definido pues el límite anterior ya no existe.

Cuando $\epsilon = 0$, (8.19) es simplemente una rotación alrededor del círculo por un ángulo ω , equivalente al mapeo de los ejemplos 50 y 51. En el otro extremo, cuando $\omega = 0$ y $\epsilon \neq 0$, hay dos puntos fijos en $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. Ambos son hiperbólicos y el primero es inestable mientras que el segundo es atractor siempre que $0 < \epsilon < 1$.

Para cada $\epsilon = \bar{\epsilon}$ fijo, con $0 < \bar{\epsilon} \leq 1$, uno puede probar las siguientes propiedades de $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$:

- $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ es una función no decreciente y continua de ω ;
- Para cada número racional p/q , existe un intervalo $I_{p/q}$ con interior no vacío, tal que para todo $\omega \in I_{p/q}$ tenemos $\rho(\omega, \bar{\epsilon}) = p/q$;
- Para cada número irracional α , existe un único ω tal que $\rho(\omega, \bar{\epsilon}) = \alpha$.

Un gráfico típico de $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ para $0 < \bar{\epsilon} \leq 1$ fijo se muestra en la figura 8.17, donde se pueden apreciar las propiedades anteriores. Este gráfico ha sido denominada como la “escalera del diablo” (*devil’s staircase* en inglés) y posee propiedades fractales o de autosimilaridad pues está relacionado con el conjunto de Cantor

estándar de la siguiente manera: Esta función es constante en todos los intervalos eliminados del conjunto de Cantor. Por ejemplo, si $\omega \in [1/3, 2/3]$, entonces $\rho(\omega, \bar{\epsilon}) = 1/2$. Si $\omega \in [1/9, 2/9]$, entonces $\rho(\omega, \bar{\epsilon}) = 1/4$, si $\omega \in [7/9, 8/9]$, entonces $\rho(\omega, \bar{\epsilon}) = 3/4$. De la figura 8.17 y de las propiedades de $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ vemos que esta función no es diferenciable en los puntos del conjunto de Cantor, ¡pero tiene derivada cero en todos los demás puntos! Pero dado que un conjunto de Cantor tiene medida cero, esta función tiene derivada cero prácticamente en todas partes, ¡y aún así logra crecer desde 0 a 1 al “subir” en los puntos del conjunto de Cantor!

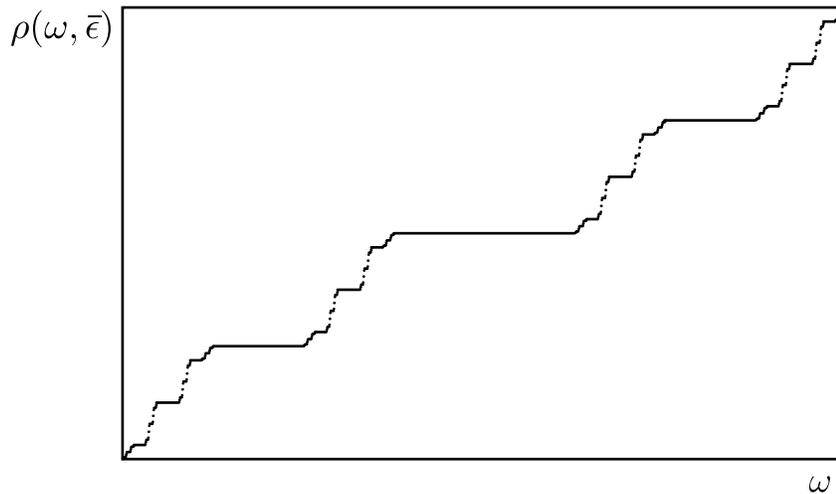


Figura 8.17: La “escalera del diablo” — El gráfico del número de rotación $\rho(\omega, \bar{\epsilon})$ como función de ω para $0 < \bar{\epsilon} \leq 1$ fijo.

En la figura 8.18, mostramos esquemáticamente algunos de los ingredientes importantes del diagrama de bifurcación del mapeo estándar (8.19) en el plano de parámetros (ω, ϵ) . A partir de cada número racional p/q en el eje ω , se origina una cuña con un agudo ensanchamiento. Estas cuñas poseen interior no vacío en el cual el número de rotación es constante $\rho(\omega, \epsilon) = p/q$. Además, ninguna de estas cuñas con número de rotación racional se intersecta cuando $0 \leq \epsilon \leq 1$. Estas cuñas se conocen como **lenguas de Arnold**. Desde cada número irracional en el eje ω , sin embargo, se origina una curva continua (sin interior) y que se extiende a $\epsilon = 1$.

La dinámica del mapeo estándar dentro de cada lengua de Arnold es bastante simple. Miremos, por ejemplo, la cuña que emerge desde el origen. Dado que

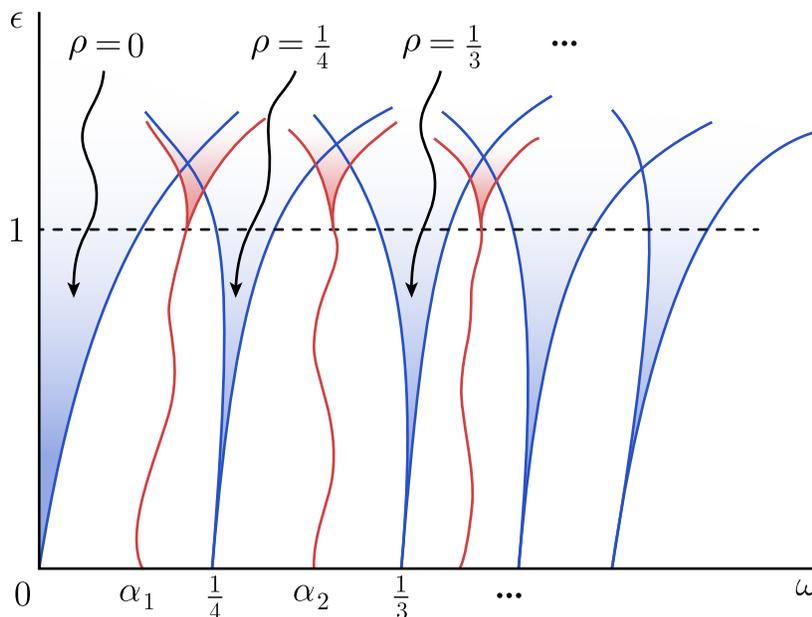


Figura 8.18: Diagrama de bifurcación del mapeo estándar. Dentro de cada cuña (o lengua de Arnold) el número de rotación es racional. Las curvas rojas emanan de números irracionales en el eje ω .

$\rho(\omega, \epsilon) = 0 = 0/1$ en esta cuña, el mapeo debe tener un punto fijo. Efectivamente, para $\epsilon \neq 0$, los puntos fijos de (8.19) vienen dados por

$$\sin(2\pi x) = \frac{-2\pi\omega}{\epsilon}.$$

Si fijamos ϵ e incrementamos ω desde 0, a partir de la ecuación anterior, vemos que dos puntos fijos (uno estable y otro inestable) eventualmente colisionan y desaparecen en una bifurcación silla-nodo. Cuando este evento ocurre, nos salimos de la cuña $0/1$ y las órbitas en \mathbb{S}^1 se vuelven aperiódicas y densas. Un fenómeno similar ocurre en cada una de las otras cuñas, pero el rol de los puntos fijos es reemplazado por el de los puntos periódicos con períodos apropiados.

Para $\epsilon > 1$, la dinámica de (8.19) se vuelve más bien complicada. La dinámica cualitativa no se puede capturar por la racionalidad o irracionalidad de un solo número (como ocurría si $0 \leq \epsilon \leq 1$). En este caso, el límite en (8.20) no es único, sino que toma valores en un intervalo de números reales. En consecuencia, si intentamos extender el diagrama de bifurcación por sobre la línea $\epsilon = 1$, notamos que las cuñas racionales se traslapan y aparecen nuevas cuñas —que emanan hacia

$\epsilon > 1$ — a partir de números de rotación irracionales. Esto señala la presencia de órbitas muy complicadas y dinámica caótica.

Dentro de toda esta complejidad, sin embargo, hay varias “constantes universales” que marcan la transición al caos para una clase amplia de mapeos, incluyendo el mapeo estándar. Dado que estas constantes son independientes de la forma concreta del mapeo, pueden ser utilizables en aplicaciones, algo muy similar a la constante de Feigenbaum para mapeos del intervalo; ver capítulo 5. A continuación describimos una de esas constantes universales. Consideremos el número irracional $(\sqrt{5} - 1)/2$, la *proporción áurea*, y su expansión en fracciones continuas

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Al truncar esta expansión en cada nivel obtenemos una secuencia de números racionales p_n/q_n la cual converge a $(\sqrt{5}-1)/2$. Los enteros p_n y q_n se conocen como los *números de Fibonacci* y satisfacen las relaciones de recurrencia $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$ y $p_{n+1} = q_{n-1}$ con valores iniciales $p_0 = 0$, $q_0 = 1$. Ahora, sea ω_∞ el valor del parámetro ω en (8.19) tal que $\rho(\omega_\infty, 1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Y para cada p_n/q_n denotemos como ω_n al valor de ω más cercano a ω_∞ tal que $\rho(\omega_n, 1) = p_n/q_n$; ver figura 8.19.

Entonces, se puede comprobar numéricamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_{n+1} - \omega_n} \approx -2,834 \dots$$

Se ha probado que este número es el mismo para una amplia clase de mapeos del círculo en sus puntos de transición al caos.

8.4. Ejercicios

1. Considere el campo de vectores en el cilindro $(y, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ dado por $\dot{y} = ay$, $\dot{\theta} = 1$. Defina un mapeo de Poincaré apropiado y encuentre una fórmula para él. Demuestre que el sistema tiene una órbita periódica. Clasifique su estabilidad para todos los valores de $a \in \mathbb{R}$.

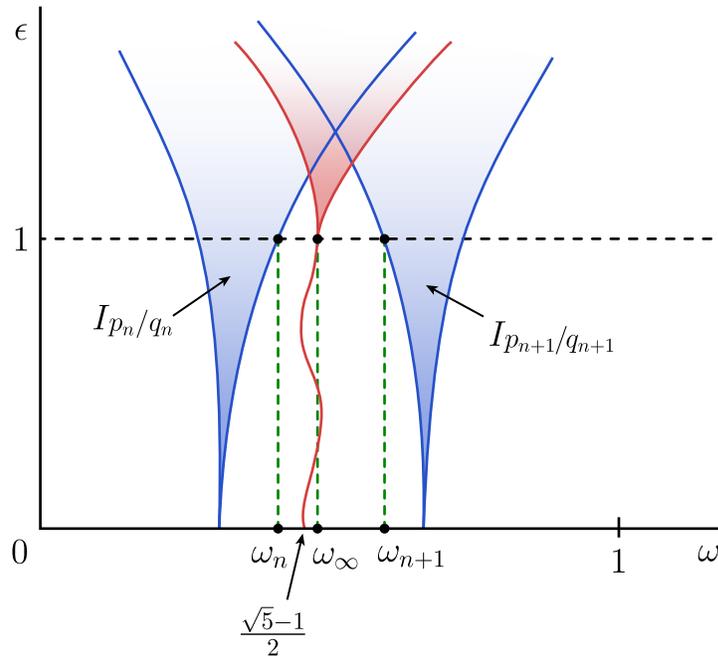


Figura 8.19: Construyendo una constante universal para el mapeo estándar del círculo.

2. Sea $(r, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{S}^1$ y considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 + a \cos \theta - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

donde $|a| < 1$.

- a) Demuestre que el círculo $r = 0$ es una órbita periódica con período 2π .
- b) Demuestre que los multiplicadores de Floquet de $r = 0$ son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{2\pi}$.
Ayuda: Muestre que el sistema linealizado cerca de $r = 0$ tiene soluciones de la forma $(0, \delta\theta(t))$ y $(\delta r(t), 0)$.
- c) Demuestre que hay dos círculos $r = r_-$ y $r = r_+$ tales que si $0 < r < r_-$ entonces $\dot{r} > 0$; y si $r > r_+$ entonces $\dot{r} < 0$. Luego la región $N = \{(r, \theta) : r_- < r < r_+\}$ es una región atrapadora. Nuestro próximo objetivo es probar que el conjunto atractor en N es una órbita periódica.
- d) Sea S el rayo $\{(r, 0), r > 0\}$. Argumente que S es una sección global, es

decir, el campo de vectores es transversal en todos los puntos de S . Sea $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ el mapeo de Poincaré en S .

- e) Supongamos que la órbita del punto $(r_L, 0)$ cumple que $0 < P(r_L) < r_-$. Argumente que $P(r_L) > r_L$. Alternativamente, suponga que la órbita del punto $(r_H, 0)$ cumple que $P(r_H) > r_+$. Entonces argumente que se debe tener $P(r_H) < r_H$.
- f) Aplique el teorema del valor intermedio a $P(r)$ para probar que existe un punto $(r^*, 0)$ con $r_L < r^* < r_H$ cuya órbita es periódica.
- g) Demuestre que los multiplicadores de Floquet de esta nueva órbita cerrada son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = e^{-4\pi}$ y, en consecuencia, este ciclo es asintóticamente estable.

Ayuda: Para calcular la integral $\int_0^{2\pi} r^2(t) dt$ use la ecuación diferencial para tener $r^2 = 1 + a \cos \theta - \frac{\dot{r}}{r}$.

3. Estudie las órbitas del flujo definido por la ecuación diferencial $\dot{x} = \sin(2\pi t)$. ¿Cuántas soluciones periódicas existen? ¿Qué se puede decir de su estabilidad?
4. Considere la ecuación diferencial 1-periódica $\dot{x} = -x + \cos(2\pi t)$. Determine el comportamiento en el largo plazo de las soluciones.
5. Considere la ecuación diferencial 1-periódica $\dot{x} = -x + \cos(2\pi t) - 2\pi \sin(2\pi t)$. Determine el comportamiento en el largo plazo de las soluciones.
6. Sea $\varphi(t, 0, x_0)$ la solución de una ecuación 1-periódica $\dot{x} = f(t, x)$ con $\varphi(0, 0, x_0) = x_0$.
- a) Demuestre que $\partial\varphi(t, 0, x_0)/\partial x_0$ es la solución del siguiente problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal:

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, 0, x_0))z, \quad z(0) = 1,$$

es decir,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \exp \left[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s, 0, x_0)) ds \right].$$

- b) Si P es el mapeo de Poincaré asociado, demuestre que la derivada de P viene dada por

$$P'(x_0) = \exp \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, 0, x_0)) dt \right].$$

7. Verifique que la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x^2 - \frac{1}{4\pi^2} \cos^4(2\pi t) - \sin(4\pi t)$$

posee la solución 1-periódica $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \cos^2(2\pi t)$ tal que $\varphi(0) = 1/2\pi$. Muestre que esta solución es asintóticamente estable. Existe otra solución 1-periódica que es asintóticamente estable, ¿puedes hallarla explícitamente? ¿Hay otras soluciones 1-periódicas?

8. Verifique que la ecuación diferencial

$$\dot{x} = -x^3 - 2x + \sin^3(2\pi t) - 2\sin(2\pi t) + 2\pi \cos(2\pi t)$$

posee una solución 1-periódica $\varphi(t) = \sin(2\pi t)$ tal que $\varphi(0) = 0$. Muestre que esta solución es inestable. ¿Cuántas soluciones 1-periódicas puedes garantizar?

9. Considere la ecuación diferencial escalar autónoma $\boxed{\dot{x} = dx/dt = f(x)}$ con un punto de equilibrio x^* . Notemos que f puede considerarse (trivialmente) una función periódica en t de cualquier período arbitrario $T > 0$, en particular $T = 1$. Luego, cuando esta misma ecuación diferencial es vista (trivialmente) como un ecuación diferencial no-autónoma periódica en t de período 1, el punto de equilibrio x^* de la ecuación autónoma se vuelve una solución periódica de período 1 de la ecuación no-autónoma. Demuestre que el mapeo de Poincaré $P(x)$ de la ecuación diferencial no-autónoma de período 1 en t satisface $P(x^*) = x^*$ y $P'(x^*) = \exp(f'(x^*))$.

Sugerencia: Considere la ecuación variacional cerca de $x(t) = x^$.*

10. Considere la ecuación diferencial no-autónoma

$$\dot{x} = dx/dt = a_0 + c_0 x^2 + G(\mu, t, x),$$

donde μ es un parámetro escalar, a_0 y c_0 son constantes satisfaciendo $a_0 c_0 < 0$, y G es una función continua y periódica de período 1 en t con $|G(\mu, t, x)| \leq |\mu|$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) Demuestre que existe un $\mu_0 > 0$ tal que, para todo $|\mu| < \mu_0$, existen exactamente dos soluciones periódicas $\psi_1(\mu, t)$ y $\psi_2(\mu, t)$ de período 1 en t , con la propiedad de $\psi_1(0, t) = \sqrt{-a_0/c_0}$ y $\psi_2(0, t) = -\sqrt{-a_0/c_0}$.

b) Demuestre también que estas soluciones 1-periódicas son hiperbólicas y que ψ_1 es inestable y ψ_2 es asintóticamente estable si $c_0 > 0$.

Sugerencia: Use las propiedades del flujo cuando $\mu = 0$ y la pregunta anterior.

11. Considere el sistema $\dot{x} + x = F(t)$, donde $F(t)$ es una función diferenciable, T -periódica. ¿Es verdad que el sistema necesariamente posee una solución T -periódica $x(t)$? Si es así, demuéstrela; si no, encuentre una F que sirva de contraejemplo.

12. (Sistema sobreamortiguado forzado por onda cuadrada) Considere un oscilador lineal sobreamortiguado (por ejemplo, un circuito RC) forzado por una onda cuadrada. El sistema se puede adimensionalizar a $\dot{x} + x = F(t)$, donde $F(t)$ es una onda cuadrada de período T . Más específicamente, supongamos que

$$F(t) = \begin{cases} +A, & 0 < t < T/2, \\ -A, & T/2 < t < T, \end{cases}$$

para $t \in (0, T)$, y luego $F(t)$ se repite periódicamente para todo t . El objetivo es mostrar que todas las trayectorias del sistema se acercan a una única solución periódica. Podemos intentar resolver la EDO y obtener $x(t)$, pero el análisis podría volverse un poco complicado. Por ello, usamos un enfoque basado en el mapeo de Poincaré: La idea es “observar” y registrar el sistema una vez por ciclo.

a) Sea $x(0) = x_0$. Demuestre que $x(T) = x_0 e^{-T} - A(1 - e^{-T/2})^2$.

b) Demuestre que el sistema posee una única solución periódica y que satisface $x_0 = -A \tanh(T/4)$.

- c) Interprete los límites de $x(T)$ para $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$. Explique por qué son plausibles.
- d) Sea $x_1 = x(T)$ y defina el mapeo de Poincaré P por $x_1 = P(x_0)$. Obtenga la gráfica de $P(x)$ vs x .
- e) Usando un diagrama de telaraña demuestre que P tiene un punto fijo globalmente estable.
13. Considere el flujo en el toro \mathbb{T}^2 dado por $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, donde ω_1/ω_2 es irracional. Demuestre que cada órbita es densa, es decir, dados cualquier punto p en el toro, cualquier condición inicial q , y cualquier $\epsilon > 0$, existe un $t < \infty$ tal que la órbita que empieza en q pasa a una distancia ϵ de p . Concluya que el conjunto atractor es todo \mathbb{T}^2 .
14. Considere el sistema

$$\dot{\theta}_1 = E - \sin \theta_1 + K \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad \dot{\theta}_2 = E + \sin \theta_2 + K \sin(\theta_1 - \theta_2),$$

donde $E, K \geq 0$.

- a) Encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio.
- b) Muestre que si E es suficientemente grande, el sistema tiene órbitas periódicas en el toro. ¿Qué tipo de bifurcación es la que crea las soluciones periódicas?
- c) Encuentre la curva de bifurcación en el plano (E, K) en la cual se crean estas órbitas periódicas.
15. En un paper sobre sistemas de osciladores neuronales, Ermentrout & Kopell (1990) ilustraron la noción de “muerte de un oscilador” con el siguiente modelo:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1,$$

donde $\omega_1, \omega_2 \geq 0$.

- a) Bosqueje todos los retratos de fase cualitativamente **diferentes** que aparecen a medida que ω_1, ω_2 varían.

- b) Encuentre las curvas en el plano de parámetros (ω_1, ω_2) a lo largo de las cuales ocurren bifurcaciones, y clasifique estas bifurcaciones.
- c) Identifique las regiones del plano (ω_1, ω_2) en las cuales se tienen cada uno de los retratos de fase de (3.1).
16. Usando un computador, grafique la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \sin(\omega t)$ para: (a) $\omega = 3$, (b) $\omega = 2/3$, (c) $\omega = 5/3$, (d) $\omega = \sqrt{2}$, (e) $\omega = \pi$, (f) $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.
17. Considere un par de osciladores armónicos desacoplados descritos por el sistema 4-dimensional $\ddot{x} + x = 0$, $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$. Demuestre que si $x = A(t) \sin \theta(t)$, $y = B(t) \sin \phi(t)$, entonces $\dot{A} = \dot{B} = 0$ y $\dot{\theta} = 1$, $\dot{\phi} = \omega$. Explique por qué esto implica que las órbitas en el espacio de fase 4-dimensional están típicamente confinadas a toros 2-dimensionales. ¿Cómo se relacionan las curvas de la pregunta anterior con las órbitas de este sistema?
18. Pruebe que un difeomorfismo que preserva orientación en \mathbb{S}^1 debe tener dos puntos fijos.
19. Demuestre que el mapeo $f(\theta) = 2\theta$ es caótico en \mathbb{S}^1 .
20. Encuentre el número de rotación del campo de vectores no-autónomo $\dot{x} = \cos(2\pi t)$ y describa su dinámica.
21. Sea P la aplicación de retorno de Poincaré de $\dot{x} = F(x, t, \lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro, y F es una función de clase C^2 y periódica en t de período 1. Suponga que todos los puntos fijos de P son hiperbólicos para $\lambda = 0$. Demuestre que el número de rotación $\rho(f)$ es constante para $|\lambda|$ pequeño.
22. Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un difeomorfismo que preserva orientación. Ocupando (8.20) demuestre que este límite, si existe, no depende de la elección de x_0 .
23. Suponga que f y g son difeomorfismos en \mathbb{S}^1 que preservan orientación. Pruebe que $\rho(f) = \rho(g^{-1} \circ f \circ g)$.
24. Considere la aplicación $\theta \mapsto \theta + 2\pi\lambda$, con $\theta \in \mathbb{S}^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Encuentre el número de rotación $\rho(\lambda)$ para los distintos valores de λ .

25. Considere la ecuación escalar no-autónoma $\dot{x} = (1 - \omega) - 2\gamma \sin(2\pi t)$, donde $\omega \in [0, 1]$ y $\gamma \geq 0$.
- a) Demuestre que esta ecuación se puede resolver en forma exacta (analítica).
 - b) Use esta solución para mostrar que, para $\gamma > (1 - \omega)$, el mapeo de Poincaré asociado posee dos puntos fijos hiperbólicos.
 - c) Demuestre que el número de rotación $\rho(\gamma) = 1$ para $2\gamma \geq (1 - \omega)$.
 - d) Describa la bifurcación que ocurre en $2\gamma = (1 - \omega)$.

Capítulo 9

El atractor caótico de Lorenz

En 1963 Edward Lorenz introdujo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (9.1)$$

Este campo de vectores es una versión simplificada de un sistema de EDPs que modela la velocidad de un fluido y perturbaciones de la temperatura en una capa bidimensional calentada desde abajo. La intención de Lorenz era modelar el comportamiento del aire en la atmósfera, y en último término, el tiempo atmosférico. En (9.1) $(x(t), y(t), z(t))$ representan amplitudes reescaladas de las variables originales, y t es una escala de tiempo reescalada. Los parámetros del modelo son: σ (Número de Prandtl), el cual modula la competencia entre difusiones viscosas y térmicas; r (Número de Rayleigh), que simboliza el calor aplicado —este parámetro aparece frecuentemente en mecánica de fluidos cuando una capa de fluido es calentada desde abajo—; b , el cual es un factor geométrico que resulta de obtener el sistema adimensional.

Para los valores “clásicos” $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$, el sistema (9.1) exhibe soluciones *caóticas*:

- oscilan en forma irregular, sin repetirse nunca (i.e., son aperiódicas),
- pero siempre permaneciendo en una región acotada del espacio de fase,
- convergen hacia un conjunto complicado, un “atractor extraño;”

- además, dos condiciones iniciales cercanas poseen órbitas que, eventualmente, se separan en forma exponencial (i.e., hay sensibilidad a las condiciones iniciales);
- y cada órbita parece cubrir todo el atractor extraño.

Puedes ver una animación que muestra la formación de este atractor en el siguiente video: <http://youtu.be/97ryBYOTQ0o>. El atractor extraño no es un punto de equilibrio, ni una órbita periódica, ni siquiera es una superficie. Es un fractal. ¿Cómo llegó Lorenz a esa conclusión?

9.1. Propiedades del sistema de Lorenz

El sistema (9.1) posee los siguientes equilibrios:

- $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$,
- $p^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, para $r > 1$.

Además, presenta una simetría con respecto al eje z : Al reemplazar $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, las ecuaciones no cambian. Luego, si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución, también lo es $(-x(t), -y(t), z(t))$. En consecuencia, todas las soluciones son, o bien, simétricas o poseen una contraparte simétrica.

Consideremos $b = 8/3$ y $\sigma = 10$ fijos. En lo que sigue moveremos el parámetro r hasta $r = 28$ y más allá...

9.1.1. El sistema de Lorenz es disipativo

El primer paso para entender la estructura del atractor de Lorenz y el flujo caótico de las órbitas en él, es el hecho de que este objeto no posee volumen, es decir, no es un cuerpo tridimensional en \mathbb{R}^3 . La razón es que los volúmenes en el espacio de fase se contraen bajo el flujo inducido por (9.1). Veamos por qué.

Sea $S(t)$ una superficie cerrada que encierra un volumen $V(t)$ en el espacio de fase. Por ejemplo, $S(t)$ podría estar formada de condiciones iniciales para órbitas. Después de un tiempo dt , S evoluciona a una nueva superficie $S(t + dt)$. ¿Cuál es el volumen $V(t + dt)$?

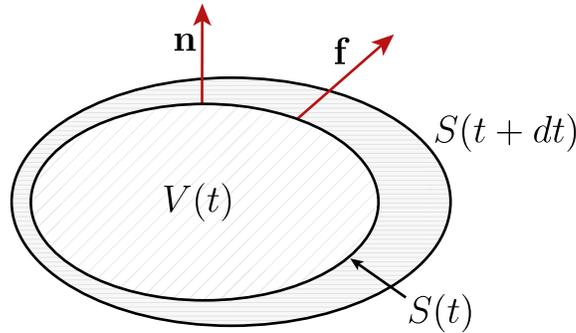


Figura 9.1: Evolución de un elemento de volumen en el sistema de Lorenz.

Sea \mathbf{n} el vector normal unitario a S y denotemos como \mathbf{f} al campo de vectores dado por (9.1). Luego, \mathbf{f} es la velocidad instantánea de los puntos. Entonces, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ es la componente de la velocidad perpendicular a S . En un tiempo dt , un área dA barre un volumen $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt dA$; ver figura 9.2.

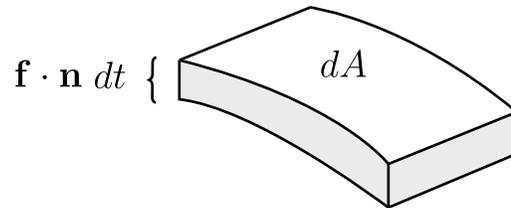


Figura 9.2: Elemento de volumen en el sistema de Lorenz.

Luego,

$$V(t + dt) = V(t) + \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt dA.$$

Entonces

$$\dot{V} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV.$$

Sustituyendo por (9.1):

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}[\sigma(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y}[rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z}[xy - bz] = -\sigma - 1 - b < 0.$$

Luego obtenemos la EDO $\dot{V} = -(\sigma + 1 + b)V < 0$, con solución

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}.$$

Por lo tanto, *volúmenes en el espacio de fase se achican exponencialmente rápidamente*. Como consecuencia, las órbitas convergen a un conjunto atractor de volumen cero. ¿Cuál es ese conjunto atractor? ¿Son puntos de equilibrio?

CONSECUENCIAS:

- No hay soluciones cuasiperiódicas:

Si las hubiera, dicha órbita tendría que estar sobre la superficie de un toro, “fluyendo” indefinidamente sin llegar a cerrarse. Luego, el toro sería invariante bajo el flujo. Entonces, el volumen dentro del toro sería constante en el tiempo, lo cual contradice la propiedad de contracción de volumen.

- No existen puntos de equilibrio ni ciclos repulsores:

Supongamos que encerramos un objeto repulsor con una superficie cerrada de condiciones iniciales (ej, una esfera alrededor del punto de equilibrio o un tubo delgado alrededor de una órbita periódica). Después de un lapso de tiempo, la superficie se habrá expandido pues las correspondientes órbitas son repelidas. Luego, el volumen dentro de la superficie se incrementaría. Esto es claramente una contradicción.

9.1.2. Bifurcaciones locales en el sistema de Lorenz

El origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ es un equilibrio para todos los valores de parámetros. La linealización de (9.1) en $\mathbf{0}$ viene dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y, \\ \dot{z} = -bz, \end{cases}$$

La ecuación en z es desacoplada. Luego, $z(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Por otro lado, las direcciones x e y son gobernadas por el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con traza $\tau = -\sigma - 1 < 0$ y determinante $\Delta = \sigma(1-r)$. Si $r < 1$: $\mathbf{0}$ es un atractor. De hecho, podemos probar que el origen es un atractor global para $r < 1$ con ayuda de la función de Lyapunov $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$ (Tarea). Si $r > 1$: $\mathbf{0}$ es un punto silla, pues $\Delta < 0$. Más aún, posee variedades estable e inestable con dimensiones $\dim W^s(\mathbf{0}) = 2$, $\dim W^u(\mathbf{0}) = 1$.

Lo que ocurre en $r = 1$ es una bifurcación pitchfork. Para $r > 1$, aparecen dos nuevos equilibrios simétricos $p^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Estos puntos son atractores inmediatamente después de la bifurcación, es decir, para valores de r ligeramente mayores a 1, obteniendo un diagrama de bifurcación parcial como el de la figura siguiente.

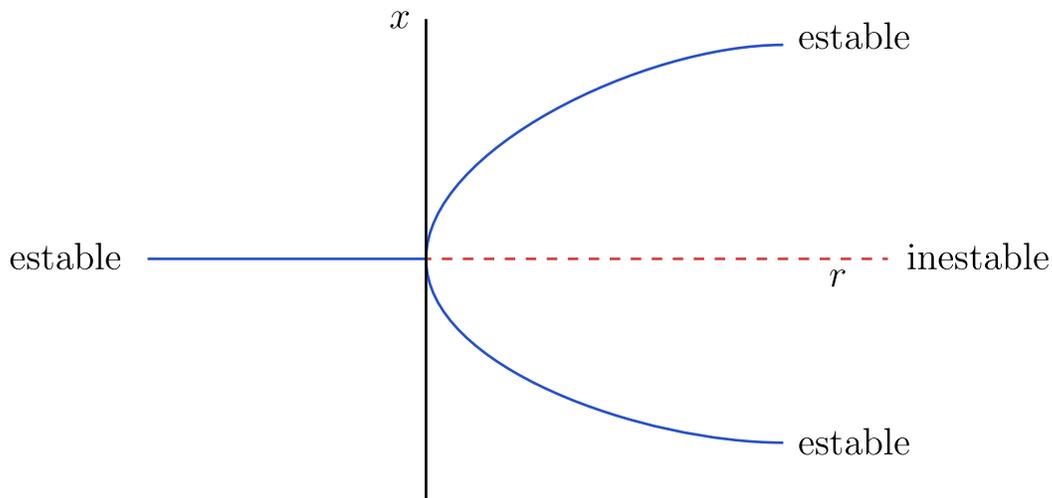


Figura 9.3: Diagrama de bifurcación de la bifurcación pitchfork en el origen del modelo de Lorenz para $r = 1$.

Podemos detallar aún más la estabilidad de p^+ y p^- . Estos equilibrios son hiperbólicos y atractores para

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \approx 24,74,$$

donde se tiene $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$. Para $r = r_H$, p^+ y p^- no son hiperbólicos, pues $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, $\lambda_3 < 0$, y ambos pasan por una bifurcación de Hopf. En cambio, si $r > r_H$, p^+ y p^- son equilibrios silla-focos hiperbólicos, i.e., $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, $\lambda_3 < 0$. Las bifurcaciones de Hopf en p^+ y p^- son subcríticas. Esto implica que existen

dos ciclos de tipo silla (inestable) Γ^+ y Γ^- para $r < r_H$, alrededor de p^+ y p^- , respectivamente. A medida que $r \rightarrow r_H^-$, los ciclos Γ^\pm se achican alrededor de p^\pm .

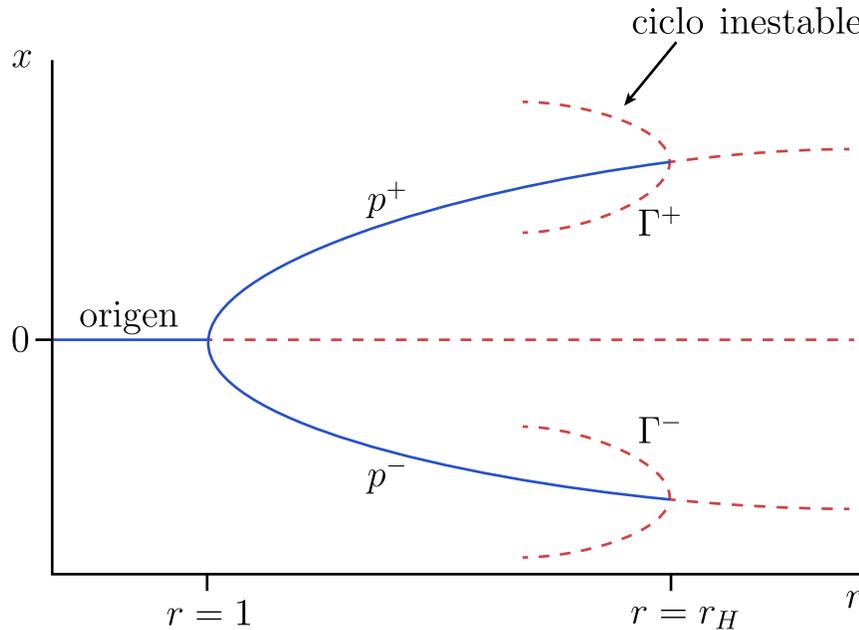


Figura 9.4: Diagrama de bifurcación parcial del modelo de Lorenz.

9.1.3. Bifurcaciones globales y ruta al caos

¿Existen los ciclos Γ^+ y Γ^- **para todo** $r < r_H$? Ambos ciclos de tipo silla poseen variedades estable con $\dim W^s(\Gamma^\pm) = 2$. Las órbitas en estas variedades convergen a Γ^+ y Γ^- , respectivamente. Pero $\mathbf{0}$ es un atractor global para $r < 1$. Por lo tanto, los ciclos silla Γ^+ no pueden existir para $r < 1$. *Algo* debe ocurrir para algún valor $r = r^* \in]1, r_H[$. Este *algo* es una bifurcación homoclínica en $r_{hom} \approx 13,926$. El diagrama de bifurcación parcial que emerge es como el de la figura 9.5.

La secuencia de eventos al incrementar r es la siguiente:

- (a) Para $1 < r < r_{hom} < r_H$: El origen $\mathbf{0}$ es silla, p^\pm son atractores; ver figura 9.6(a).

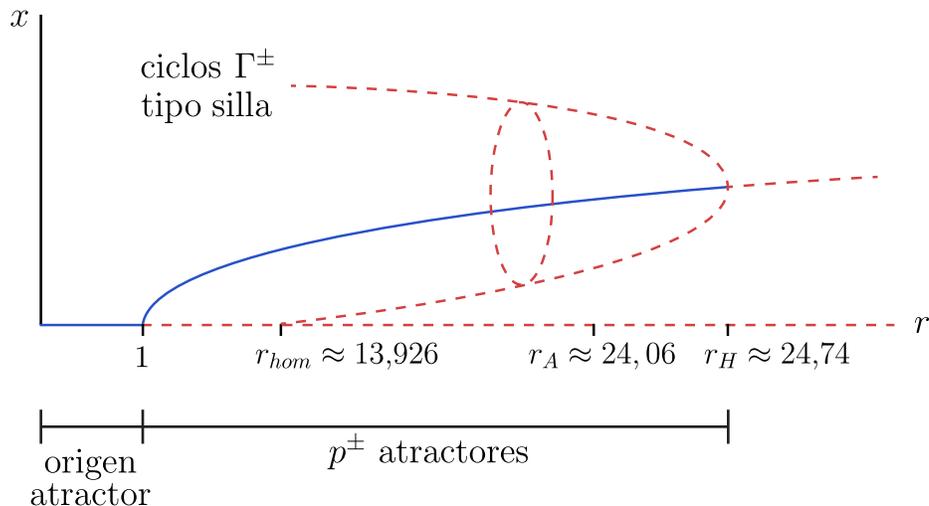


Figura 9.5: Diagrama de bifurcación parcial del modelo de Lorenz.

- (b) Para $r = r_{hom} < r_H$: Se forman 2 órbitas homoclínicas (simétricas entre sí) que se conectan a $\mathbf{0}$. Luego $W^u(\mathbf{0}) \cap W^s(\mathbf{0}) \neq \emptyset$; ver figura 9.6(b).
- (c) Para $r_{hom} < r < r_H$: Tenemos los 2 ciclos Γ^\pm de tipo silla. Además las ramas de $W^u(\mathbf{0})$ se intercambian de ω -límite en $r = r_{hom}$; ver figura 9.6(c).

Recordemos que nos interesa seguirle la pista al conjunto atractor que exista en el espacio de fase a medida que el parámetro r va aumentando. Para $r < 1$ hay un único atractor en el origen $\mathbf{0}$. Si $1 < r < r_H$ hay dos equilibrios atractores en los puntos p^+ y p^- . ¿Y para $r_H < r$, cuál es el atractor? No puede ser el infinito, pues todas las órbitas penetran en un elipsoide invariante. Por otro lado, Lorenz dio un argumento convincente para asegurar que cualquier ciclo debe ser inestable para $r > r_H$, por lo que no hay órbitas periódicas estables. Más aún, recordemos que el sistema es disipativo, por lo tanto, el conjunto atractor (sea lo que sea) tiene volumen cero.

La bifurcación homoclínica que ocurre para $r = r_{hom}$ marca la aparición de dinámica caótica. Una versión simplificada de la secuencia de eventos que lleva a la creación del atractor caótico de la mariposa de Lorenz es la siguiente.

Existen ciertos valores r_{het} y r_A con $r_{hom} < r_{het} < r_A < r_H$ tal que:

- Para $r_{hom} < r < r_{het}$ tenemos dos órbitas periódicas (simétricas) de tipo

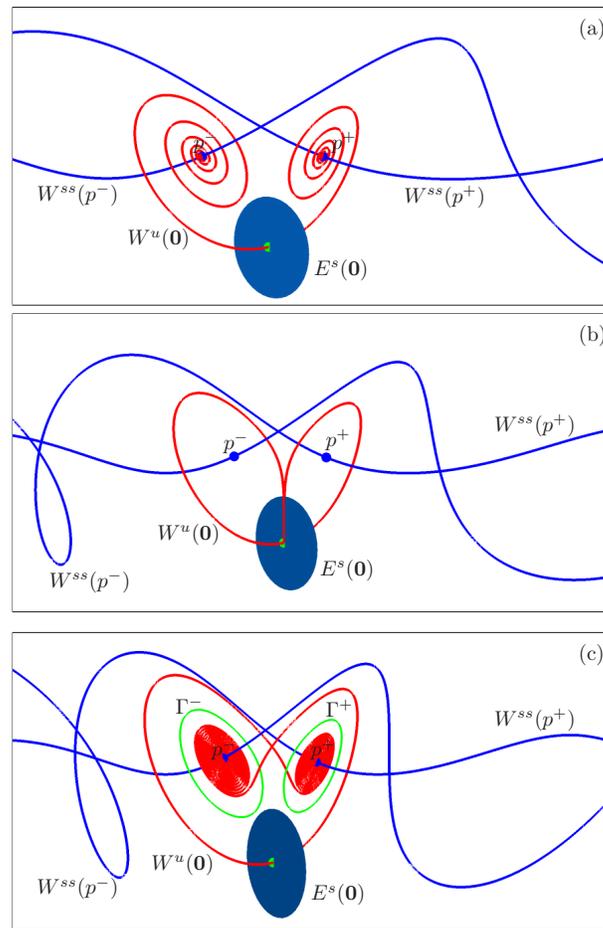


Figura 9.6: Bifurcación homoclínica en el modelo de Lorenz para $r_{hom} \approx 13,926$. Imagen tomada de AGUIRRE, DOEDEL, KRAUSKOPF & OSINGA, *Investigating the consequences of global bifurcations for two-dimensional invariant manifolds of vector fields*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 29 (2011), p. 1309-1344.

silla. La variedad inestable $W^u(\mathbf{0})$ del origen converge a los equilibrios p^\pm (ver figura 9.7(a).).

- Para $r = r_{het}$ ocurre una bifurcación heteroclínica: $W^u(\mathbf{0})$ converge a Γ^\pm , formándose una conexión heteroclínica entre el origen y cada uno de los ciclos (ver figura 9.7(b).).
- Para $r_{het} < r < r_A$: se tiene el fenómeno de *preturbulencia*: aparece un conjunto invariante extraño, pero que no es un atractor, sino un conjunto silla caótico (ver figura 9.7(c).). Para valores de r entre r_{het} y r_A , el conjunto

invariante extraño consiste en un número infinito (numerable) de órbitas periódicas, un número infinito (no-numerable) de órbitas aperiódicas, y un número infinito (no-numerable) de órbitas que convergen a $\mathbf{0}$. Todas estas órbitas son (individualmente) no-estables.

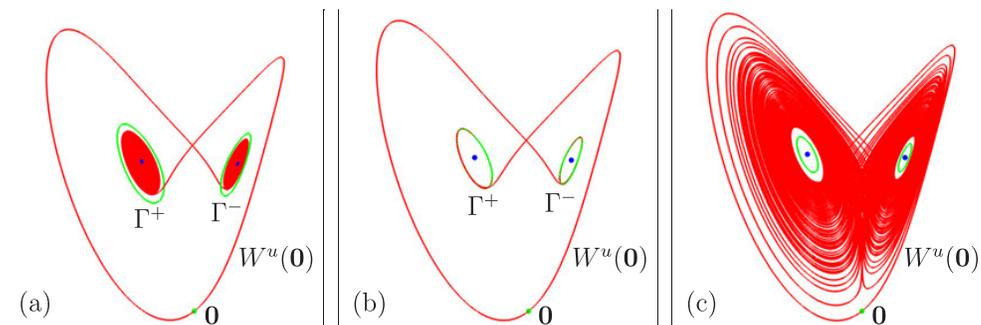


Figura 9.7: Transición hacia el régimen de preturbulencia en el sistema de Lorenz. Imagen tomada de DOEDEL, KRAUSKOPF & OSINGA, *Global bifurcations of the Lorenz manifold*, *Nonlinearity* 19 (2006), p. 2947-2972.

Una órbita pre-turbulenta típica muestra *caos transiente*: se comporta erráticamente “visitando” al conjunto invariante caótico durante un intervalo de tiempo finito antes de converger a p^+ o p^- como en la figura 9.8 (No olvidemos que estos equilibrios siguen siendo atractores para estos valores de parámetro, i.e., estos eventos ocurren “antes” de la bifurcación de Hopf subcrítica). Sea $T(r)$ = el tiempo que le toma a una órbita típica “visitar” al conjunto invariante caótico antes de converger a alguno de los puntos atractores p^\pm . A medida que r se incrementa, el tiempo $T(r)$ que le toma a una órbita en “escapar” del comportamiento caótico transiente también aumenta. En promedio de todas las órbitas que visitan al conjunto invariante extraño se tiene:

$$T(r) \longrightarrow \infty, \quad \text{cuando } r \rightarrow r_A \approx 24,06.$$

Luego, para $\boxed{r = r_A}$, **la silla caótica se convierte en un atractor caótico**.

Una órbita típica para valores de r inmediatamente mayores a r_A presenta un transiente inicial, seguido de una aproximación al atractor extraño. Una vez conseguida la convergencia al atractor caótico, se tiene una “oscilación” irregular, la cual persiste para $t \rightarrow \infty$, pero nunca se repite exactamente: Es un movimiento

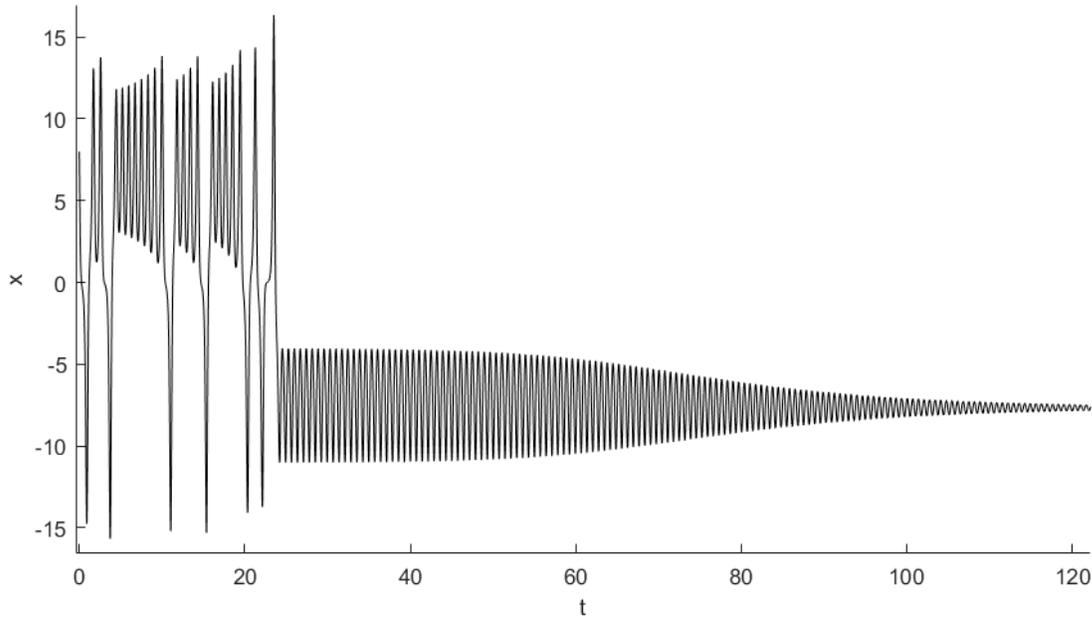


Figura 9.8: Serie temporal de la variable x de una órbita pre-turbulenta en el modelo de Lorenz.

aperiódico; ver figura 9.9. Por otro lado, todavía hay órbitas que convergen a p^\pm , los cuales aún son atractores. A medida que r se incrementa, el sistema pasa por una secuencia de “explosiones homoclínicas” que generan nuevos conjuntos invariantes extraños.

En resumen, la ruta al caos que lleva a la creación del atractor de Lorenz puede describirse mediante el diagrama de bifurcación de la figura 9.10:

- Para $r = r_{hom} \approx 13,926$: Ocurre la primera explosión homoclínica.
- Entre $r_{hom} < r < r_A \approx 24,06$: Existen dos órbitas periódicas Γ^\pm de tipo silla; el origen $\mathbf{0}$ es un punto silla; p^\pm son equilibrios atractores. Además tenemos caos transiente.
- Para $r = r_A$: Aparición del atractor extraño.
- Para $r > r_H \approx 24,74$: Los ciclos Γ^\pm ya no existen al haber desaparecido en una bifurcación de Hopf subcrítica; el origen $\mathbf{0}$ es un punto silla; los equilibrios p^\pm son ambos de tipo silla-foco. El único conjunto atractor que queda

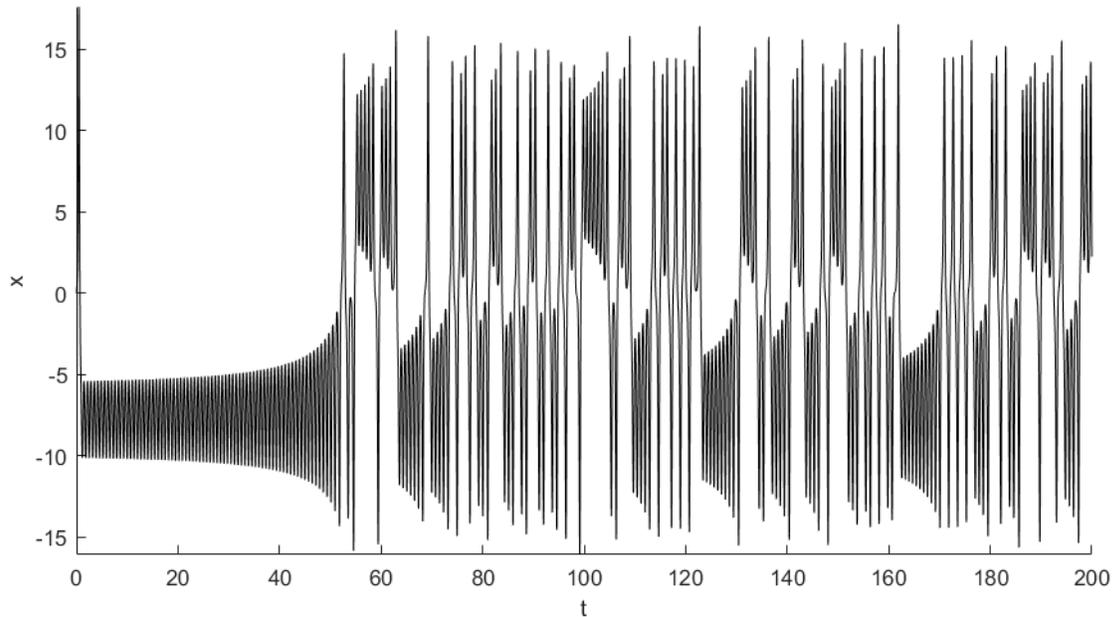


Figura 9.9: Serie temporal de la variable x de una órbita que converge al atractor caótico de Lorenz.

es el Atractor de Lorenz.

9.2. Estructura del atractor de Lorenz

En un cierto rango de parámetros $r > r_A$, no hay puntos de equilibrio atractores ni ciclos atractores. En sus estudios numéricos, Lorenz no pudo seguir usando herramientas estándar y se enfrentó a lo que parecía una paradoja: Todas las órbitas permanecen confinadas en una región acotada ...y son eventualmente atraídas a un conjunto de volumen cero, un atractor extraño \mathcal{A} . ¿Cómo es \mathcal{A} ? ¿Y cómo se mueven las órbitas una vez que llegan a \mathcal{A} ?

Lorenz fijó los valores de parámetros en $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28 > r_H$ e integró numéricamente desde una condición inicial cercana a $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Lorenz sabía que algo raro tenía que ocurrir, pero tuvo que tener cuidado de interpretar correctamente los cálculos numéricos. Esto era a comienzos de los años 60! Al graficar las series de tiempo de sus soluciones emergieron comportamientos como el de la figura 9.9, en donde ploteamos solamente la coordenada x versus t . Inicialmente

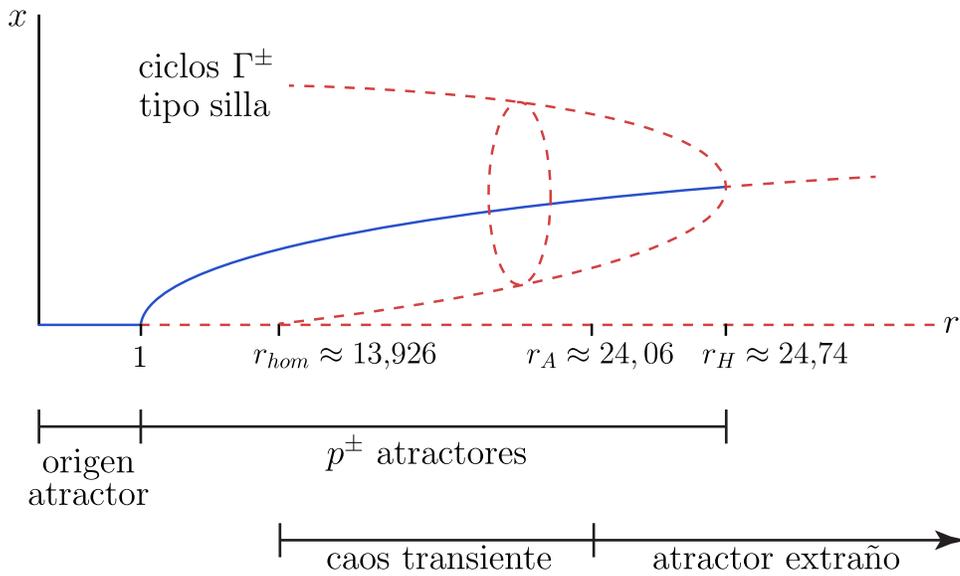


Figura 9.10: Diagrama de bifurcación parcial del modelo de Lorenz.

se observan oscilaciones con una amplitud creciente, seguidas por cambios de signo en x , y luego más oscilaciones a intervalos irregulares. Estas oscilaciones irregulares persisten para $t \rightarrow \infty$ y nunca se vuelven a repetir.

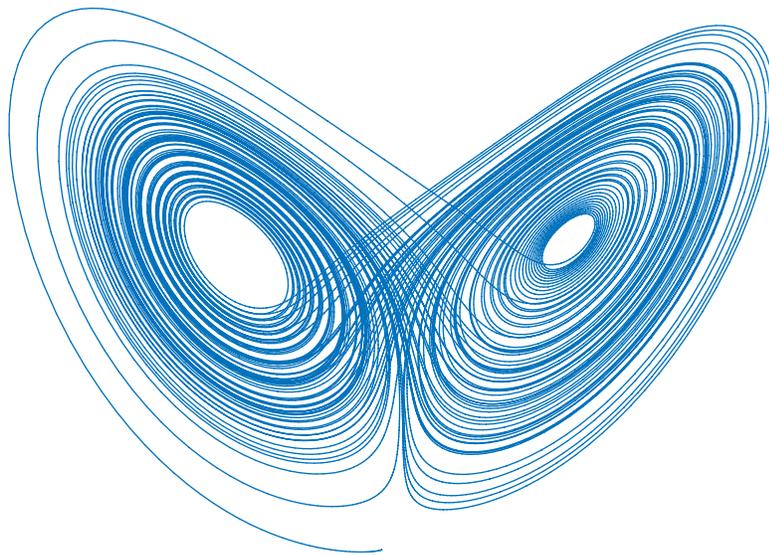


Figura 9.11: Una órbita en el atractor de Lorenz en el espacio tridimensional (x, y, z) .

Al visualizar la misma órbita en el espacio de fase tridimensional aparece la “mariposa” de Lorenz; ver figura 9.11. La órbita cruza de un “ala” a la otra indefinidamente sin abandonar nunca el atractor. El número de vueltas alrededor de p^+ o p^- antes de cambiar de “ala” posee características de variable aleatoria. Esto sucede pues después de la explosión homoclínica se crean un número infinito de objetos de tipo silla; luego, las órbitas son repelidas desde un objeto inestable a otro como en un juego de *pinball*. Además, como el sistema es disipativo, las órbitas están confinadas (en el largo plazo) a un conjunto acotado de volumen cero. Sin embargo, permanecen para siempre en este conjunto sin autointersectarse ni intersectar a otras órbitas. Como consecuencia, el atractor extraño \mathcal{A} presenta las mismas características de comportamiento caótico estudiadas en el capítulo 5:

- **Transitividad:** Las órbitas recorren todo \mathcal{A} como si se “esparcieran” eternamente por toda la mariposa de Lorenz.
- **Sensibilidad a las condiciones iniciales:** Soluciones cercanas se separan exponencialmente rápido; ver de nuevo <http://youtu.be/97ryBYOTQ0o>.
- En particular, lo anterior implica que el conjunto de órbitas periódicas contenidas en \mathcal{A} son densas en \mathcal{A} .

Cada órbita en \mathcal{A} da un número finito de vueltas alrededor de una rama (o ala), y luego cambia a la otra rama. Y repite de nuevo el mismo proceso... infinitas veces. Luego, el atractor \mathcal{A} está formado por dos superficies que se fusionan en la parte baja. Lorenz habló de una superficie “ramificada” S . El borde de esta superficie está formado por la variedad inestable del origen, esto es, $\partial S \subset W^u(\mathbf{0})$. Sin embargo, el hecho de que S conste de dos láminas que se fusionan en la parte baja presenta un dilema, pues debe haber unicidad de soluciones: Las órbitas no pueden cruzarse ni unirse! La explicación que dio Lorenz fue que las dos superficies se unen sólo *en apariencia*. La “ilusión” se debe a la fuerte contracción de volumen del flujo y por baja resolución numérica.

Reemplacemos el flujo reversible 3D de (9.1) por un *semiflujo* en S , es decir, las soluciones se definen para $t > 0$ solamente. Una semiórbita positiva arbitraria en S eventualmente debe llegar al intervalo de ramificación $[-a, a]$ de la figura 9.12. En ese momento, la órbita “escoge” a cuál rama irá a continuación: si se queda

en la misma rama o si cambia a la otra. Además, esta solución se mueve (caóticamente) desde una rama a otra a medida que viaja por el atractor sin intersectarse con otras ni consigo misma (por la propiedad de unicidad de soluciones). Este comportamiento también es el mismo **para cualquier otra órbita** en \mathcal{A} . Luego, la superficie S debe estar formada por un número infinito no-numerable de capas o láminas, al cual Lorenz llamó “*un complejo infinito de superficies.*” En resumen, el atractor de Lorenz \mathcal{A} es un conjunto de puntos con volumen cero pero área infinita; una estructura de superficies que se “acumulan” en sí mismas. De hecho, el atractor de Lorenz es un fractal cuya dimensión (no entera) es $\dim \mathcal{A} \approx 2,05$. Hay varias maneras de definir la dimensión fractal de un objeto y están disponibles en muchos textos. Busca tu favorita! Nosotros mencionaremos brevemente las más comunes en la sección 9.3.4.

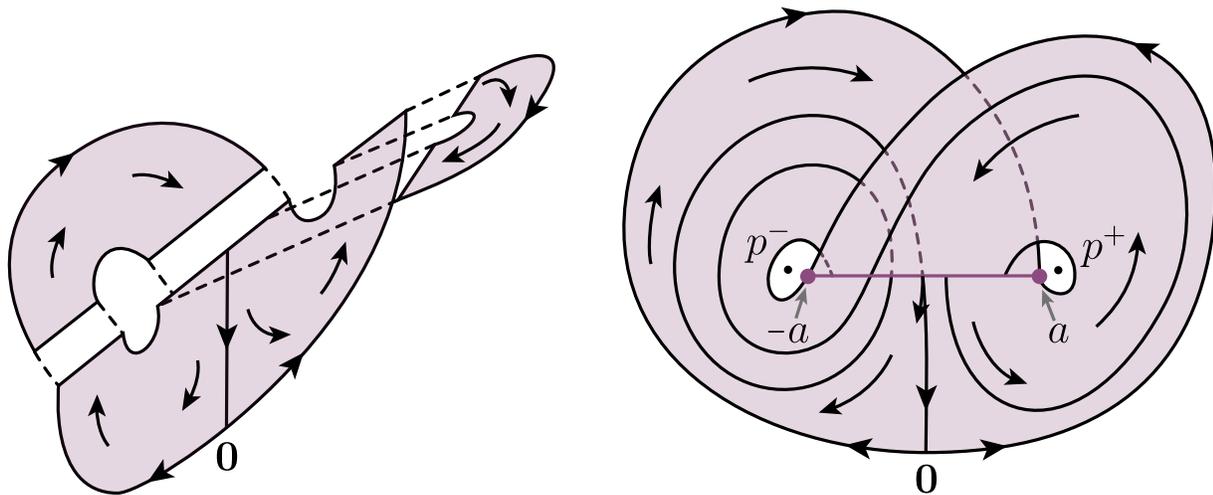


Figura 9.12: Bosquejo cualitativo de la estructura geométrica del atractor de Lorenz.

9.3. Exploración: Cuantificando el caos en sistemas continuos

¿Qué tan caótico es un comportamiento caótico? Hay varias maneras de dar una respuesta cuantitativa a esa pregunta. Existen varias razones para querer cuantificar el comportamiento caótico: Nos puede ayudar a distinguir si un sistema

es realmente caótico o si es simplemente ruido; nos puede ayudar a determinar cuántas variables son necesarias para modelar la dinámica del sistema; cambios en los valores del cuantificador pueden estar relacionados con cambios importantes en el comportamiento dinámico del sistema, etc. Con el modelo de Lorenz (9.1) como ejemplo inspirador, en esta sección revisaremos algunas de las principales maneras de cuantificar una dinámica caótica en un sistema a tiempo continuo.

9.3.1. Exponentes de Lyapunov

Similarmente a lo estudiado en sistemas a tiempo discreto, podemos cuantificar la sensibilidad a las condiciones iniciales en el atractor de Lorenz al medir la tasa (promedio) en que dos órbitas cercanas se alejan una de la otra. Sea $\mathbf{x}(t)$ un punto en una órbita en el atractor en el instante t . Si $\delta(t) > 0$ es un desplazamiento suficientemente pequeño, entonces $\mathbf{x}(t) + \delta(t)$ es un punto cercano a $x(t)$ en el instante t (ver figura 9.13); podemos considerar, por ejemplo, que $\|\delta_0\| = 10^{-15}$, donde $\delta_0 = \delta(0)$. En el caso del sistema de Lorenz (9.1), se puede comprobar que $\delta(t)$ crece exponencialmente de la forma $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t}$, donde $\lambda = 0,9$. Luego, órbitas vecinas se separan exponencialmente rápido. Al graficar $\ln \|\delta(t)\|$ vs t obtenemos una curva parecida a una recta con pendiente $\lambda > 0$. Esta curva tiene altibajos pues la divergencia exponencial varía a lo largo del atractor. La divergencia tiene un máximo cuando la separación es comparable con el “diámetro” del atractor. El número λ es el **exponente de Lyapunov**.

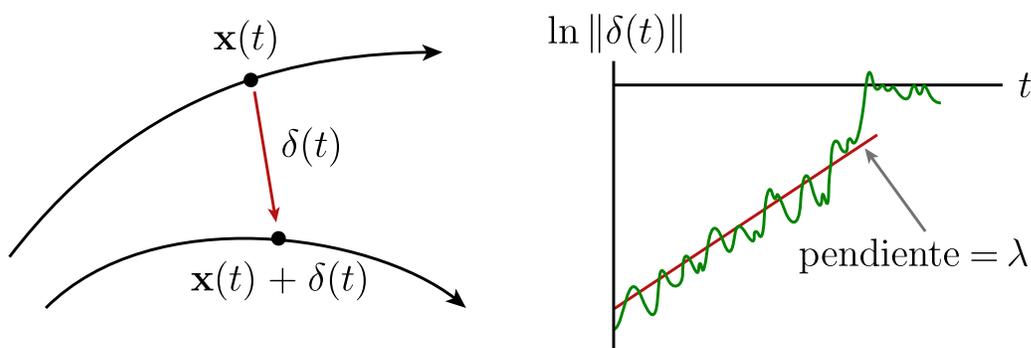


Figura 9.13: Exponentes de Lyapunov en un sistema a tiempo continuo.

Caso general

Los exponentes de Lyapunov pueden definirse en un contexto más general. Por ejemplo, consideremos el campo de vectores

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ la órbita que pasa por el punto $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Consideremos la linealización del flujo a lo largo de $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, la cual viene dada por

$$\dot{\mathbf{u}} = Df(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n. \quad (9.2)$$

Esta ecuación lineal no-autónoma gobierna la evolución en el tiempo de pequeñas perturbaciones $\mathbf{u}(t)$ a la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ de la forma $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) + \mathbf{u}(t)$. Además, al ser (9.2) un sistema lineal, posee una matriz fundamental de soluciones, la que llamaremos $X(t; \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$. Si $\mathbf{v} \neq 0$ es un vector unitario en \mathbb{R}^n , definimos el *coeficiente de expansión* a lo largo de la órbita de \mathbf{x}_0 en la dirección dada por \mathbf{v} como

$$\mu_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \|X(t; \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))\mathbf{v}\|.$$

Note que $\mu_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})$ es simplemente la magnitud de una solución particular de (9.2). Este coeficiente mide qué tan grande es la tendencia de las soluciones (en una aproximación lineal) a desviarse en la dirección del vector \mathbf{v} en cada punto de la solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ (parametrizada por t) del sistema original $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$. Luego, el **exponente de Lyapunov** en la dirección \mathbf{v} a lo largo de la órbita de \mathbf{x}_0 queda definido por

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mu_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}),$$

es decir, como un promedio temporal (en el largo plazo) del logaritmo del coeficiente de expansión.

En general, para un sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, podemos definir n exponentes de Lyapunov distintos, dados por las n direcciones linealmente independientes en una base de \mathbb{R}^n .

Demostremos una interpretación de esta cantidad $\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})$ con la ayuda, de nuevo, del modelo de Lorenz (9.1). Consideremos una esfera infinitesimal de condiciones iniciales en $t = 0$. Para $0 < t \ll 1$, podemos esperar que esta esfera se deforme en

todas las direcciones en un elipsoide infinitesimal. Para tiempos mayores $t \gg 1$, el diámetro del elipsoide es controlado por el exponente de Lyapunov $\lambda(\mathbf{v})$ “más positivo”. Luego, basta que tan solo uno de los n exponentes de Lyapunov sea positivo para que exista una expansión a una tasa exponencial en alguna dirección a lo largo de la órbita considerada del sistema. En el caso del atractor de Lorenz, el valor de λ obtenido es el exponente de Lyapunov positivo *más grande*.

Este hecho trae consecuencias importantes. Si en $t = 0$ tenemos dos mediciones iniciales (i.e., condiciones iniciales) cercanas con un error $\|\delta_0\|$, entonces para $t > 0$ la discrepancia crece a una tasa $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\|e^{\lambda t}$. En particular, si $a > 0$ es la tolerancia para hacer predicciones —i.e., nuestra predicción del futuro es aceptable solo si $\|\delta(t)\| \leq a$ —, entonces definimos el *horizonte de tiempo* como el instante $t_{horizon}$ tal que nuestra predicción falla para $t > t_{horizon}$. En particular, se tiene

$$t_{horizon} \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \log \frac{a}{\|\delta_0\|}\right).$$

Por lo tanto, no importa qué tan chica sea la discrepancia inicial δ_0 , no podremos predecir por un tiempo más largo que unos múltiplos de $1/\lambda$. Por esta razón, la existencia de (al menos) un exponente de Lyapunov positivo es evidencia de que el sistema posee sensibilidad a las condiciones iniciales.

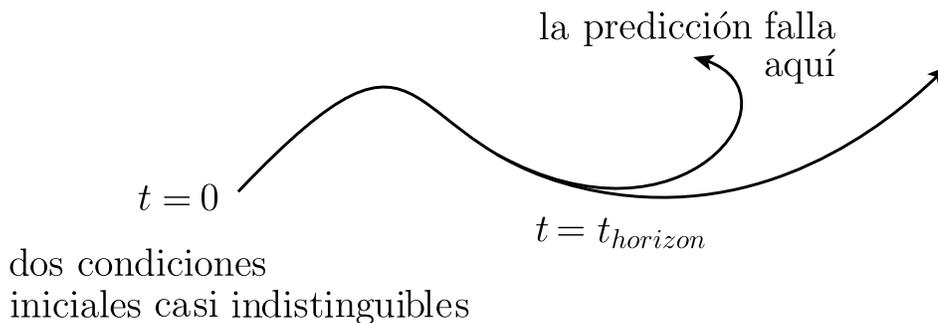


Figura 9.14: Horizonte de tiempo para hacer predicciones en un sistema con sensibilidad a las condiciones iniciales.

Hasta aquí, nuestro exponente de Lyapunov ha sido calculado para una sola órbita que comienza en un punto \mathbf{x}_0 . Si calculamos el exponente de Lyapunov para un conjunto de puntos iniciales (o órbitas) y luego promediamos estos resultados,

definimos el **exponente de Lyapunov promedio** para el sistema. En muchos casos, este valor promedio es considerado como *el* exponente de Lyapunov del sistema.

9.3.2. El mapeo de Lorenz

Volvamos de nuevo al modelo de Lorenz (9.1). Al estudiar detenidamente el comportamiento de las soluciones en el atractor extraño, Lorenz observó que una “órbita cambia de espiral sólo después de sobrepasar una distancia crítica del centro y esto determina el punto en el cual se entra a la siguiente espiral. A su vez, esto determina el número de circuitos que se ejecutan antes de volver a cambiar de espiral.” Esto le dio la idea para una *codificación* de una órbita: Una propiedad de un “circuito” dado predice la misma propiedad en el siguiente “circuito.” Por ejemplo, si z_n es el n -ésimo máximo local de la variable $z(t)$, Lorenz observó que el valor de z_n predice el siguiente máximo local z_{n+1} . ¿Cómo es esto posible?

Lorenz integró numéricamente por largo tiempo t y midió los máximos locales de $z(t)$. Obtuvo un gráfico z_{n+1} vs z_n como el de la figura 9.15. En ella, los datos parecen coincidir con una curva $z_{n+1} = f(z_n)$, la cual se conoce como **Mapeo de Lorenz**. De esta manera, Lorenz pudo extraer orden del caos a partir de una serie temporal

$$\tau = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_N\}.$$

Observemos que el gráfico de $f(z_n)$ en rigor no es una curva. Tiene un grosor muy pequeño. Luego, $f(z)$ no es una función bien definida. Sin embargo, el tratarla como curva resulta conveniente, pues nos entrega información aproximada sobre el comportamiento de una órbita, con tan solo observar una sola variable (y no las tres). Por otro lado, notemos que el mapeo de Lorenz no es un mapeo de Poincaré. Si así fuera, este mapeo tomaría un punto en una superficie transversal 2D, especificado por 2 coordenadas, y nos diría cómo esas dos coordenadas cambian después del primer retorno a la misma superficie. Sin embargo, el mapeo de Lorenz caracteriza la órbita por sólo un número, no dos. En consecuencia, este enfoque funciona sólo si el atractor es muy “delgado”, o sea, cercano a algo bidimensional.

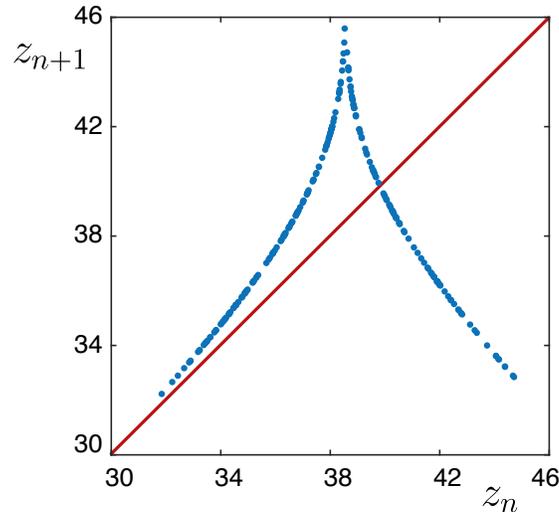


Figura 9.15: Gráfica del mapeo de Lorenz z_{n+1} vs z_n .

9.3.3. Reconstrucción del espacio de fase a partir de series de tiempo

El mapeo de Lorenz visto en la sección 9.3.2 es útil pues nos muestra que podemos extraer una relación para la evolución de la variable z sin conocer cómo se comportan las otras dos variables x e y del sistema de Lorenz (9.1). Esto sugiere plantearnos el siguiente problema general: Supongamos que en un experimento solamente contamos con una única variable observable en el atractor $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, la cual es observada en N ocasiones. Es decir, de las d cantidades x_1, \dots, x_d asociadas al sistema dinámico, solamente podemos tomar (a lo más) N mediciones en el tiempo de una de ellas, digamos, la j -ésima coordenada x_j . Típicamente, este escenario ocurre cuando no conocemos las ecuaciones explícitas que dan origen a la dinámica observada ni la regla de evolución que gobierna la variación de las cantidades x_1, \dots, x_d en el tiempo. En tal caso, es muy probable que ni siquiera conozcamos la dimensión d del espacio de fase, es decir, no sabemos cuántas ni cuáles variables $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ están interrelacionadas de manera subyacente por el (desconocido) sistema dinámico. Por lo tanto, la dimensión d pasa a ser un nuevo parámetro desconocido del problema.

Llamemos τ a la serie de tiempo medida de la variable x_j , y por simplicidad

de notación denotemos las entradas de la serie como

$$\tau = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_N\}, \quad q_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Pregunta: Si no sabemos cómo modelar el sistema bajo consideración o si no conocemos las ecuaciones que gobiernan la evolución de la cantidad estudiada, ¿podemos decir algo útil sobre el sistema analizando la serie temporal τ ?

Ejemplo 52 ¿Cuál de las series temporales τ_1, τ_2 y τ_3 de la figura 9.16 proviene de un sistema caótico? A primera vista, las tres series lucen erráticas, aperiódicas, sin ningún patrón aparente y virtualmente aleatorias. ¿Cómo distinguir cuál representa una variable aleatoria y cuál proviene de un sistema determinístico caótico? Inspirados en el mapeo de Lorenz de la sección 9.3.2, podemos responder la pregunta graficando q_k vs q_{k+1} para cada serie. Esto corresponde a mirar la dinámica de los vectores (q_k, q_{k+1}) en un espacio de fase bidimensional. Las series de tiempo de la figura 9.16 fueron calculadas a partir de:

- (a) τ_1 : Un generador de números aleatorios. Los pares (q_k, q_{k+1}) se distribuyen aleatoriamente en el plano formando una “nube” de puntos sin ninguna estructura.
- (b) τ_2 : El mapeo logístico con $r = 4$. Los pares (q_k, q_{k+1}) se ordenan a lo largo de la parábola $q_{k+1} = 4q_k(1 - q_k)$.
- (c) τ_3 : El mapeo de Hénon. Los pares (q_k, q_{k+1}) forman el atractor de Hénon.

Al graficar (q_k, q_{k+1}) se revela claramente la estructura dinámica subyacente de cada serie. Este método se llama **reconstrucción de atractores** o **reconstrucción del espacio de fase** a partir de una serie de tiempo.

En el ejemplo anterior miramos vectores (q_k, q_{k+1}) en un espacio de fase bidimensional, es decir, vectores de longitud 2. En general, dada una serie temporal $\tau = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_N\}$, uno debe considerar vectores más largos

$$(q_k, q_{k+T}, q_{k+2T}, \dots, q_{k+(m-1)T})$$

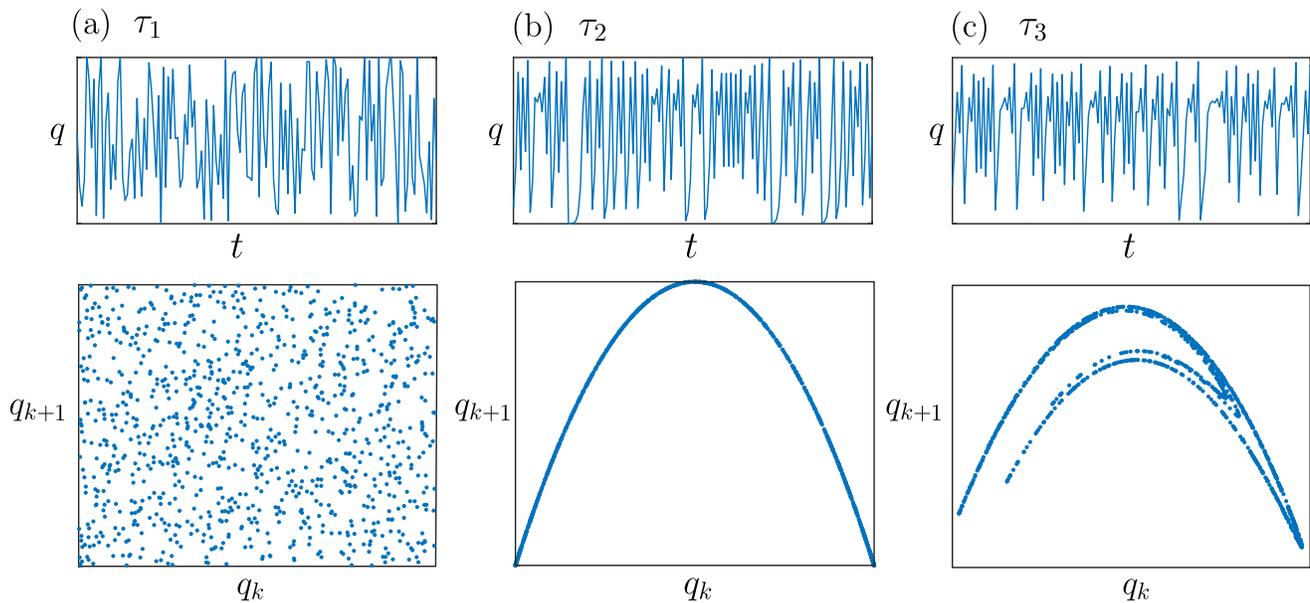


Figura 9.16: Reconstrucción del espacio de fase a partir de una serie de tiempo de (a) un generador de números aleatorios, (b) el mapeo logístico con $r = 4$, (c) mapeo de Hénon.

de longitud m , donde dejamos un espacio de tiempo T —llamado *retraso* o *retardo*— entre puntos consecutivos. Si m es suficientemente grande, y si T es escogido apropiadamente, entonces si los datos están tomados de una órbita en un atractor caótico, al plotear estos vectores $(q_k, q_{k+T}, q_{k+2T}, \dots, q_{k+(m-1)T})$ en el espacio m -dimensional, veremos una aproximación del atractor caótico. En la práctica uno debe “jugar” con m y T hasta que uno “vea algo”. Afortunadamente, contamos con un resultado formal que nos asegura que cualquier atractor de un sistema dinámico se puede *incrustar* mediante este método en un espacio de fase suficientemente grande (i.e., m apropiadamente grande). Este resultado se conoce como el *Teorema de Incrustación* de Takens, cuyo artículo “*Detecting strange attractors in turbulence*” [20], contiene la demostración formal y es uno de los papers más citados en matemática!

En resumen, este método nos permite reconstruir geoméricamente un atractor caótico de un sistema dinámico a partir de la serie de tiempo de una única variable observada. Además, nos entrega información sobre el número de variables necesarias para modelar este sistema (cuyas ecuaciones probablemente sean desconocidas).

Ejemplo 53 Supongamos que no conocemos las ecuaciones de Lorenz. El método de incrustación nos permite reconstruir el atractor extraño a partir de una **única variable observada**, digamos x . ¿Cómo podemos reconstruir el espacio de fase del sistema de Lorenz si no conocemos las otras dos variables? Una respuesta intuitiva es que todas las variables de un sistema dinámico están genéricamente conectadas a través de las ecuaciones mismas (aunque no las conozcamos explícitamente), es decir, las variables se influyen entre sí. Si en el instante t sólo tenemos el valor de la variable x , entonces otra medición de x en un tiempo futuro $t + T$ contendrá implícitamente información sobre las variables y y z .

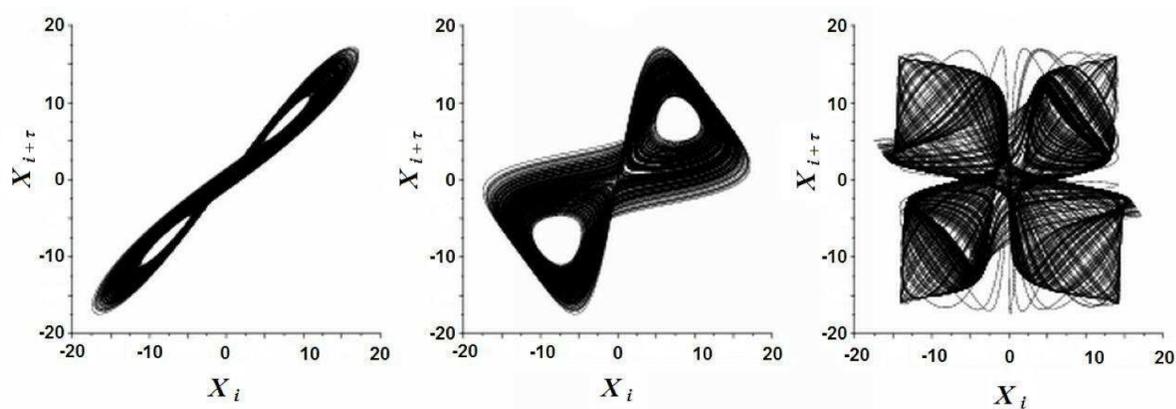


Figura 9.17: Imagen tomada de M. PERC, *Introducing nonlinear time series analysis in undergraduate courses*, *Fizika A* 15 (2006) 2, 91–112.

La figura 9.17 muestra los espacios de fase reconstruidos con diferentes valores escogidos para el *retardo* T y la dimensión m . En el primer caso, $T = 3$, $m = 2$, el retrato de fase se ve un poco comprimido sobre la diagonal; es claro que $m = 2$ es una dimensión muy baja como para capturar toda la estructura del atractor de Lorenz. En el cuadro de la derecha, $T = 100$, $m = 4$, la imagen resultante es demasiado compleja; intuitivamente (y con el beneficio de nuestro conocimiento de las ecuaciones de Lorenz), parece haber información sobrante. El retrato de fase más preciso es sin duda el del centro, $T = 17$, $m = 3$, en donde el objeto que emerge resulta más similar al verdadero atractor de Lorenz.

Existen algoritmos y paquetes computacionales para calcular valores apropia-

dos de T y m ; incluso paquetes que implementan tests para decidir si una serie de tiempo dada proviene de un sistema dinámico determinístico o si es en realidad la realización de una variable estocástica. Todos estos paquetes están disponibles en internet para quien los desee implementar!

9.3.4. Dimensiones fractales

Los métodos descritos en las secciones anteriores enfatizan los aspectos dinámicos de las órbitas. Una segunda categoría de cuantificadores se enfoca en aspectos geométricos de los atractores. Por ejemplo, la dimensionalidad de un atractor nos da una estimación del número de grados de libertad activos para el sistema. Por otro lado, objetos geométricos con dimensiones no enteras juegan un papel fundamental en la dinámica de sistemas caóticos. Estos objetos geométricos han sido llamados **fractales**, pues su dimensionalidad no es un número entero. Desafortunadamente, hay en uso muchas definiciones diferentes de **dimensión fractal**, aunque en algunos casos los números son cercanos. Restringiremos esta discusión a aquellas medidas de dimensión que son relativamente más directas de implementar para el tipo de datos generados en el estudio de un sistema dinámico.

Dimensión box-counting

La dimensión box-counting D_{BC} de un objeto geométrico (a veces llamada también dimensión de capacidad) está determinada por el siguiente proceso: Construya “cajas” de lado ϵ que cubran el espacio ocupado por el objeto geométrico en consideración. Aquí suponemos que este conjunto es un subconjunto acotado del espacio Euclideo \mathbb{R}^n . A medida que el tamaño de cada caja disminuye, necesitaremos que el número de cajas necesario para cubrir todo el objeto aumente. Sea $N(\epsilon)$ el número mínimo de cubos n -dimensionales de lado $\epsilon > 0$ necesarios para cubrir el objeto fractal. Luego, esperamos que se tenga la relación

$$N(\epsilon) \approx \epsilon^{-D},$$

para alguna constante apropiada $D > 0$. Tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación anterior, el límite (cuando exista)

$$D_{BC} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)},$$

se dice la **dimensión box-counting** del conjunto en cuestión.

Si aplicamos el método de box-counting a los datos de un sistema dinámico, ya sea experimental o teórico, podemos determinar la dimensión box-counting para el atractor del sistema. Si el atractor posee una dimensión no entera, hablamos de un *atractor extraño*. Sin embargo, la determinación de la dimensión no siempre es tan directa. Por ejemplo, en la práctica, no podemos tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$ pues tenemos una precisión finita en los datos. Sin embargo, la definición anterior implica que para ϵ suficientemente pequeño se tiene

$$\log N(\epsilon) \approx D_{BC} \log(1/\epsilon).$$

Es decir, aproximamos la dimensión box-counting como la pendiente de la recta que mejor ajuste la relación entre el logaritmo del número mínimo de cajas y el logaritmo de $1/\epsilon$.

Esta definición solamente requiere de una métrica o concepto de distancia entre puntos. En ese sentido, se trata de una medida puramente geométrica del objeto fractal. Por otro lado, esta medida tampoco discrimina si hay regiones del objeto que sean más “densas” que otras (en el sentido probabilístico de la sección 5.5.3), es decir, es independiente de cuántos puntos del objeto caben dentro de un mismo cubo de lado ϵ .

Dimensión de correlación

La dimensión de correlación ha sido ampliamente usada para caracterizar atractores extraños. Su ventaja computacional es que ocupa los puntos de las órbitas directamente y no requiere una partición del espacio de fase.

Supongamos que poseemos un conjunto de N puntos $\{X_i, i = 1, \dots, N\}$ que pertenecen a un atractor extraño \mathcal{A} . Podemos pensar que los puntos

$$X_i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_d^i) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d, \quad i = 1, \dots, N$$

han sido obtenidos a partir de N mediciones sucesivas de un mismo proceso tomadas en intervalos de tiempo predeterminados de duración $\tau > 0$, es decir, $X_i \equiv X(t + i\tau)$, $i = 1, \dots, N$. Definimos la **correlación espacial** del conjunto de datos $\{X_i\}$ como

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} (\#(i, j) \mid i < j \text{ tal que } \|X_i - X_j\| < \epsilon).$$

La norma en la definición anterior es la norma euclidea de \mathbb{R}^d , o bien la norma del supremo. Es posible interpretar la correlación $C(\epsilon)$ como un promedio de la distribución (frecuencia) de los puntos en esferas (o vecindades) de radio ϵ .

Se define la **dimensión de correlación** de la colección de puntos X_i como el siguiente límite (cuando existe):

$$D_c = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon}.$$

La definición anterior implica que para ϵ suficientemente pequeño se tiene

$$\log C(\epsilon) \approx D_c \log(\epsilon).$$

A diferencia de la dimensión box-counting, la dimensión de correlación toma en cuenta la distribución de puntos en el atractor. En cierta forma, la dimensión de correlación se basa en la probabilidad de que dos puntos escogidos al azar (para una distribución de probabilidad dada) estén a una distancia a lo más ϵ para $\epsilon \rightarrow 0$.

Cálculo de D_c en la práctica

Supongamos que tenemos un conjunto de M puntos m -dimensionales de la forma

$$(y_k, y_{k+T}, y_{k+2T}, \dots, y_{k+(m-1)T}),$$

generados a partir de la serie original mediante el método de incrustación visto en la sección 9.3.3. Ahora podemos calcular una aproximación de la dimensión de correlación D_c del conjunto extraño “teórico” que contiene a estos M vectores m -dimensionales.

El **Algoritmo de Grassberger-Procaccia (GPA)** nos dice que estimamos la correlación $C(\epsilon)$ de la forma

$$C_{GP}(\epsilon, M) = \frac{1}{M^2} (\#(i, j) \mid i < j \text{ tal que } \|X_i - X_j\| < \epsilon).$$

Esta norma corresponde a una norma euclidiana m -dimensional o a la norma del supremo. El conteo se recomienda realizar sobre todos los pares de vectores en \mathbb{R}^m solamente si los pares son estadísticamente independientes. En la práctica esto se logra al tener una frecuencia adecuada de muestreo de la serie original Y o un T apropiado en las órbitas reconstruidas.

Por otro lado, el **Algoritmo de Denker-Keller (DKA)** estima la correlación $C(\epsilon)$ de la forma

$$C_{DK}(\epsilon, M) = \frac{1}{\frac{1}{2}M(M-1)} (\#(i, j) \mid i < j \text{ tal que } \|X_i - X_j\| < \epsilon).$$

Aquí, al igual que para el GPA, esta norma corresponde a una norma euclidiana m -dimensional o a la norma del supremo. Se puede demostrar que esta estimación satisface $C_{DK}(\epsilon, M) \rightarrow C(\epsilon)$ para $M \rightarrow \infty$, es decir, esta estimación converge al valor verdadero de la correlación en sentido estadístico.

Dado que

$$\log C(\epsilon) \approx D_c \log(\epsilon)$$

para ϵ suficientemente pequeño, para ambas estimaciones de $C(\epsilon)$, estimamos D_c como la pendiente de $\log(C(\epsilon))$ versus $\log(\epsilon)$ —es decir, asumiendo una dependencia lineal de ambas cantidades— en un intervalo apropiado de ϵ . Sin embargo, para valores muy grandes de ϵ no se puede esperar una dependencia lineal de $C(\epsilon)$, pues las correlaciones son, por definición, a lo más iguales a 1. Esto se explica al tomar ϵ tan grande tal que los tamaños de las esferas m -dimensionales usadas para el conteo de $C(\epsilon)$ se vuelven comparables con el diámetro del atractor. Por otro lado, para valores muy pequeños de ϵ , los errores de estimación se vuelven muy grandes. Aún así, para muchos sistemas conocidos sabemos que tal dependencia lineal de $\log(C(\epsilon))$ con respecto a $\log(\epsilon)$ es una buena aproximación para valores intermedios de ϵ . Notemos que consideraciones análogas en relación al tamaño de ϵ podrían ser convenientes para la estimación de D_{BC} .

9.4. Ejercicios

Los siguientes problemas propuestos están todos asociados a las ecuaciones de Lorenz. La excepción es la pregunta 8.

1. Considerando la función de Lyapunov $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$, demuestre que el origen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es un equilibrio globalmente estable si $r < 1$.
2. Verifique que el origen sufre una bifurcación pitchfork en $r = 1$.
3. Si $r > 1$, demuestre que el origen es una silla hiperbólica.
4. Demuestre que la ecuación característica para los valores propios de p^\pm es

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

5. Busque valores propios de p^\pm de la forma $\lambda = \pm i\omega$, donde $\omega \neq 0$, y demuestre que ocurre una bifurcación de Hopf cuando $r = r_H = \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$. Encuentre también el tercer valor propio de los equilibrios p^\pm .
6. (Horizonte de tiempo) Para ilustrar el “horizonte de tiempo” después del cual predecir se vuelve imposible (sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales), integre numéricamente (use un computador) las ecuaciones de Lorenz para $r = 28$, $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. Comience dos trayectorias desde condiciones iniciales cercanas, y grafique $x(t)$ vs t para ambas en el mismo gráfico.
7. (Experimentos numéricos) Para cada uno de los valores de r dados abajo, use un computador para explorar la dinámica del sistema de Lorenz, asumiendo $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. En cada caso, grafique $x(t)$ vs t , $y(t)$ vs t , y x vs z . Investigue las consecuencias de escoger condiciones iniciales distintas y diferentes tiempos de integración. Además, en algunos casos, podría ser conveniente ignorar el comportamiento transiente, y graficar sólo el comportamiento sostenido en el largo plazo.
 - (a) $r = 10$.
 - (b) $r = 22$ (caos transiente),
 - (c) $r = 24,5$ (coexistencia de caos y equilibrios estables),
 - (d) $r = 100$ (sorpresa),
 - (e) $r = 126,52$,
 - (f) $r = 400$.

8. Considere el campo de vectores escalar y lineal $\dot{x} = ax$, $x \in \mathbb{R}$, donde a es una constante. Demuestre que el exponente de Lyapunov de cada órbita de este sistema es a .

Capítulo 10

Bonus: Bifurcación y caos — o las rutas al caos más comunes

10.1. Duplicación de período

Como discutimos anteriormente, la ruta al caos via duplicación de período comienza con un ciclo. Esta órbita periódica puede haber “nacido” de una bifurcación involucrando un punto de equilibrio, pero eso no nos incumbe por ahora. A medida que algún parámetro de control cambia, este ciclo se vuelve inestable. De nuevo, esto se aprecia mejor si visualizamos la dinámica restringida a una sección transversal de Poincaré. Si la bifurcación que ocurre en el punto fijo del mapeo de Poincaré asociado es una bifurcación flip, entonces el nuevo movimiento en el espacio de fase completo sigue siendo periódico pero posee un período el doble de largo que el del movimiento original. En la sección de Poincaré, este nuevo ciclo exhibe dos puntos fijos; ver figura 4.7. Para que este evento ocurra, necesitamos que el espacio de fase sea de dimensión tres o más.

A medida que el parámetro de control cambia aún más, este ciclo de período dos puede volverse inestable y dar nacimiento a un ciclo de período cuatro con cuatro puntos de intersección en la sección de Poincaré. Este proceso de duplicación de período puede continuar hasta que el período se vuelve infinito; es decir, la órbita nunca se repite a sí misma. La órbita es entonces caótica. Para apreciar esta concatenación de eventos de bifurcación que lleva a dinámica caótica, véase la descripción del mapeo logístico en la sección 5.1.

10.2. Cuasiperiodicidad

En el escenario cuasiperiódico, el sistema comienza de nuevo con un ciclo. A medida que un parámetro de control se mueve, aparece una segunda periodicidad (o equivalentemente, una nueva frecuencia) en el comportamiento del sistema mediante una bifurcación de toro (Neimarck-Sacker); ver sección 4.4.

Si la razón entre el período del segundo movimiento y el período del primero no es un número racional, entonces decimos que el movimiento es cuasiperiódico. Las órbitas del espacio de estados entonces tienden hacia (o residen en) la superficie de un toro. Bajo ciertas circunstancias, si el parámetro de control cambia aún más, el movimiento se vuelve caótico. Esta ruta también es conocida como el escenario Ruelle-Takens. A medida que el parámetro de control varía, uno puede esperar la aparición de una tercera frecuencia. Ahora las órbitas viven en un toro tridimensional (correspondiente al movimiento cuasiperiódico en un espacio de estados con cuatro o más dimensiones). Con cambios adicionales en el parámetro, el movimiento en el toro puede destruirse y el comportamiento del sistema puede volverse caótico creando un atractor caótico. (Sin embargo, algunos sistemas pueden pasar directamente de un comportamiento con tan solo dos frecuencias al comportamiento caótico).

10.3. Intermitencia y crisis

La ruta de intermitencia al caos se caracteriza por una dinámica cuyas órbitas típicas muestran ráfagas de comportamiento caótico ocurriendo en forma irregular intercaladas con intervalos de comportamiento aparentemente periódico. A medida que un parámetro de control varía, las ráfagas caóticas se vuelven más largas y ocurren con mayor frecuencia hasta que, eventualmente, la órbita es caótica todo el tiempo.

Una *crisis* es una bifurcación en la cual un atractor caótico y su cuenca de atracción desaparecen súbitamente o cambian de tamaño de súbito a medida que se ajusta un parámetro de control. Alternativamente, si el parámetro se cambia en la dirección opuesta, el atractor caótico aparece súbitamente “de la nada” o el tamaño del atractor puede agrandarse en forma súbita.

10.4. Caos de Shilnikov

Esta situación ocurre en espacios de dimensión al menos tres cuando un punto silla posee un valor propio positivo λ y un par de valores propios complejos conjugados estables $\alpha + i\beta$: el punto silla se dice un *silla-foco* y tiene una variedad inestable unidimensional y una variedad estable bidimensional.

L. P. Shilnikov probó que si se forma una órbita homoclínica a este silla-foco y si $\lambda > |\alpha|$ —esto es, las órbitas son repelidas más rápidamente a lo largo de la variedad inestable que lo que son atraídas a lo largo de la variedad estable—, entonces ocurre dinámica caótica en un rango de parámetros alrededor del valor en que se forma la órbita homoclínica. Más técnicamente, es posible hallar dinámica de herraduras en aplicaciones de Poincaré definidas en secciones transversales a la órbita homoclínica.

Capítulo 11

Epílogo

Para terminar, algunos mensajes finales o moralejas para llevarse como herencia de este curso...

1. Existen muchos tipos de comportamiento asintótico para cantidades que evolucionan en el tiempo:
Periódico, cuasiperiódico, aperiódico, caótico.
2. Incluso los sistemas no-lineales más sencillos (definidos por ecuaciones muy simples) pueden presentar un comportamiento extremadamente complicado — caos.
3. Un sistema que depende de parámetros puede exhibir bifurcaciones, es decir, cambios dramáticos en su comportamiento cualitativo al variar uno o más parámetros.
4. Las transiciones de dinámicas simples a dinámicas “complicadas” suelen ocurrir como secuencias de bifurcaciones que desembocan en caos a medida que uno o más parámetros del sistema varían.
5. Existen conjuntos invariantes “extraños” geoméricamente no-triviales y con características propias de conjuntos fractales (dimensión no entera, autosimilaridad, etc), usualmente en la forma de conjuntos de Cantor topológicos y sus generalizaciones correspondientes en dimensiones mayores (Ej: Cantor de superficies, etc.).

6. La dinámica restringida a estos conjuntos invariantes extraños suele ser igualmente no-trivial (caótica), y puede explicarse geoméricamente como consecuencia de un mecanismo iterativo de “estirar, contraer y doblar” el espacio de fase, y el cual es cualitativamente equivalente a un *shift* actuando en un espacio de secuencias (bi)infinitas con un número determinado de símbolos — dinámica simbólica.
7. La codificación de órbitas de un sistema caótico mediante una dinámica simbólica nos proporciona un mecanismo computable para entender y describir completamente comportamientos altamente complejos.
8. En el proceso de aprender y entender todo lo anterior, conocimos y aplicamos 4 maneras de simplificar el estudio de un sistema dinámico:
 - a) Linealización — Teorema de Hartman-Grobman (caso hiperbólico).
 - b) Caracterizar la estructura local del espacio de fase — Teorema de la variedad estable (caso hiperbólico).
 - c) Aplicar cambios de coordenadas — Equivalencias y conjugaciones.
 - d) Reducir la dimensión — Aplicación de retorno de Poincaré.

Bibliografía

- [1] R. H. Abraham and C. D. Shaw, *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Addison-Wesley, 1992.
- [2] K. Alligood, T. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1997.
- [3] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Dynamical Systems. Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall, 1992.
- [4] H. Broer and F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2010.
- [5] R. L. Devaney, *Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics*, Addison-Wesley, 1990.
- [6] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, Westview Press, 2003.
- [7] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1986.
- [8] J. Hale & H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1991.
- [9] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*, 2da edición, Oxford University Press, 2000.
- [10] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976), p. 459.
- [11] B. Krauskopf and H. Osinga, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Lecture notes, Department of Engineering Mathematics, University of Bristol.

- [12] Yu. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3ra edición, Springer, 2004.
- [13] J. Meiss, *Differential Dynamical Systems*, SIAM, Revised edition, 2017.
- [14] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975), pp. 985–992.
- [15] M. Perc, *Introducing nonlinear time series analysis in undergraduate courses*, Fizika A 15 (2006), pp. 91–112.
- [16] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.
- [17] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, 1999.
- [18] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, 1982.
- [19] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, CRC Press, 2014.
- [20] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*. In Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980 (pp. 366-381). Springer, Berlin, Heidelberg, 1981.